Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 2

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Taylorreihen von:

a) $f(x) = \cos x$ um $a = 0$

b) $f(x) = \ln(x)$ um $a = 1$.

Bestimmen Sie in beiden Fällen das Taylorpolynom $T_{n,a}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$, und Schätzen Sie mit der Lagrange-Restgliedformel $f(x) - T_{n,a}(x)$ ab!

Aufgabe 2

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $n, m \in \mathbb{N}$.
Betrachten Sie die Landau-Symbole O und o für $x \to 0$.

a) Zeigen Sie: Falls $f(x) = O(x^n)$ und $g(x) = O(x^m)$, so gilt $f(x) + g(x) = O(x^{\min(n,m)})$ und $f(x) \cdot g(x) = O(x^{n+m})$.

b) Bleibt die Aussage a) richtig, falls stets o statt O geschrieben wird?

c) Es gelte $f(x) = O(x^n)$ und $g(x) = O(x^n)$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt dann stets $f(x) - g(x) = O(x^k)$ bzw. $f(x)/g(x) = O(x^k)$?

(Im letzten Fall sei $g(x) > 0$ für $x \neq 0$!).

Aufgabe 3 **Die Produktregel für uneigentliche Integrale**

Es seien $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f'(x) \cdot g(x)\, dx$ existiert.
Man formuliere eine Bedingung an die Funktionen f und g die notwendig und hinreichend dafür ist, dass durch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x) \cdot g'(x)\, dx$ existiert und die Produktregel in einer geeigneten Form gültig bleibt.
(Anleitung: Verwenden Sie die Produktregel für klassische Regelfunktionen!

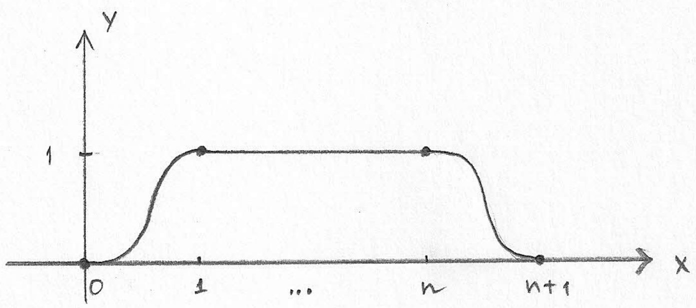
Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} e^{1-1/x} \cdot (1 - e^{-1/(1-x)}) & x \in]0, 1[, \\ 0 & x \leq 0, \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

in jedem $x \in \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist.

b) Konstruieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ aus h eine unendliche oft differenzierbare Funktion f, deren Graph folgende Gestellt hat



Hausaufgaben

H1:
Bestimmen Sie die Taylorreihen von:

a) $f(x) = \frac{2}{3-4x}$ um $a = 4$,

b) $f(x) = \sinh x$ um $a = 0$,

c) $f(x) = \ln(2 + x)$ um $a = 0$.

Bestimmen Sie in allen Fällen das Taylorpolynom $T_{n,a}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und schätzen Sie $f(x) - T_{n,a}(x)$ mit der Lagrange-Restgliedformel ab!

H2:
Betrachten Sie für $s \in \mathbb{R}$ die Taylorentwicklung von $f(x) = (1+x)^s$ um $a = 0$.

a) Bestimmen Sie $T_{n,a}(x)$ für $n \in \mathbb{R}$.

b) Begründen Sie mit einem geeigneten Resultat aus Analysis I, dass f in eine Potenzreihe um 0 entwickelbar ist, und geben Sie diese Reihe an.

Was ergibt sich aus dem Vergleich von a) und b) ?

H3:
Beweisen Sie für $a < b \in \mathbb{R}$ und Regelfunktionen $f, g \in R[a, b]$ und $p \in [1, \infty]$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

(Anleitung: Betrachten Sie die Fälle $p < \infty$ und $p = \infty$ getrennt, und gehen Sie bei dem Beweis analog zum Beweis der entsprechenden Hölderungleichung in § 13 von Analysis I vor.)

H4:
Beweisen Sie für festes $x > 0$, dass die Funktion

$$F(y) := \ln \left(\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt \right)$$

auf $]0, \infty[$ konvex ist.
(Anleitung: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 14.9 der Vorlesung vor).

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 27.04.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 27.04.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.