Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 3

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen Normen auf $\mathbb{R}^d$ definieren:

a) $\|x\| := \sum_{i=1}^{d} i \cdot |x_i|$;

b) $\|x\| := \sum_{i=1}^{d} i \cdot |x_i|^2$;

c) $\|x\| := \|x\|_1 + \|x_i\|_2$, für $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^d$;

d) $\|x\| := \|x\|_1 \cdot \|x_i\|_2$, für $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^d$.

Skizzieren Sie ferner in den Fällen, wo $\|x\|$ eine Norm definiert, die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ für $d = 2$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Vektorraum $R[a, b]$ aller Regelfunktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass
$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$
eine Norm auf $R[a, b]$ definiert.

b) Entscheiden Sie, ob
$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, dx$$
eine Norm auf $R[a, b]$ definiert.

Aufgabe 3

Der Vektorraum $\mathcal{C}[a,b]$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sei mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ versehen. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}[a,b], \|.\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 4

Es sei M eine nichtleere Menge und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass für $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in M^n$,

$$d(x,y) := \text{Anzahl der Indizes } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } x_i \neq y_i$$

eine Metrik auf M^n definiert.

b) Zeigen Sie, dass für $\epsilon \in]0,1[$ und $x \in M^n$
$B_\epsilon(x) := \{y \in M^n : d(x,y) \leq \epsilon\} = \{x\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : M^n \to \mathbb{R}$ stetig ist.

d) Entscheiden Sie, ob jede Funktion $f : M^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

e) Entscheiden Sie, ob jede Funktion $f : M^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

Hausaufgaben:

H1:

Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen Normen auf $\mathbb{C}^d$ bilden:

a) $\|x\| := \sum\limits_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |x_k|$;

b) $\|x\| := \sum\limits_{k=1}^{d} (k-1) \cdot |x_k|$;

c) $\|x\| := \sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2}$, für $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf $\mathbb{C}^d$;

d) $\|x\| := \max(\|x\|_1, \|x\|_2)$, für $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf $\mathbb{C}^d$;

e) $\|x\| := \sum\limits_{k=1}^{d} (|\mathrm{Re}\ x_i| + |\mathrm{Im}\ x_i|)$.

H2:

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{C}[a,b]$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$.

a) Entscheiden Sie, ob $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\ dx$ eine Norm auf $\mathcal{C}[a,b]$ definiert.

b) Entscheiden Sie, ob $\|f\|_2 := (\int_a^b |f(x)|^2 \, dx)^{1/2}$ eine Norm auf $\mathcal{C}[a,b]$ definiert.

H3:
Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $\|x\| := \sum_{k=1}^{n} k \cdot |x_k|$ ein Banachraum ist.

H4:
Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome auf $\mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| \, dx$$

Normen auf $\mathbb{R}[x]$ definieren.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_\infty)$ kein Banachraum ist.
(Tipp: Approximieren Sie z.B. e^x durch passende Polynome).

c) Bestimmen Sie $\|x^n\|_\infty$ und $\|x^n\|_1$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) Entscheiden Sie, ob $\|.\|_1$ und $\|.\|_\infty$ äquivalent sind.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 04.04.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 04.04.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.