Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 4

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Beweisen Sie analog zum Satz 9.3 aus Analysis I: Ist $f : X_1 \to X_2$ folgenstetig, so ist f stetig.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{C}$ die Matrix $\exp(A)$.

Aufgabe 3

Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $d \in \mathbb{N}$. Definieren Sie auf dem Vektorraum $X^n := X \times \ldots \times X$ Normen wie folgt:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\|$$

sowie

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{1/p} \text{ für } p \in [1, \infty[.$$

Überprüfen Sie, dass diese Formeln Normen auf X^n definieren und zeigen Sie, dass die obigen Normen äquivalent sind.
(Anleitung: Gehen Sie analog zum Beispiel 16.16 vor!)

Aufgabe 4

Sei $S = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stochastische Matrix, d.h. für $i, j = 1, \dots, n$ gilt:

$$p_{i,j} \geq 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1.$$

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$ als Vektorraum von Zeilenvektoren und setzen $P := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.\}$.

Wir versehen P mit der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_s(x) := x \cdot S$ den Raum P auf P abbildet, und dass φ_s Lipschitz-stetig mit der Konstanten 1 ist.

b) Nun habe S zusätzlich die Eigenschaft, dass alle Einträge der ersten Spalte positiv sind, d.h. $\epsilon := \min_{i=1,\dots,n} p_{i1} > 0$.
Zeigen Sie, dann $\varphi : P \to P$ Lipschitz-stetig mit der Konstanten $1 - \epsilon$ ist.

c) Zeigen Sie, dass es genau einen Vektor $x_0 \in P$ gibt mit $x_0 \cdot S = x_0$, und dass für die Potenzen S^n von S komponentenweise $\lim_{n\to\infty} S^n = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix}$ gilt.

Hausaufgaben:

H1: Spaltensummennormen

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ werde durch die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ dargestellt. Zeigen Sie: Ist $\mathbb{R}^d$ mit der Norm $\|.\|_1$ versehen, so gilt

$$\|T\| = \max_{j=1,\dots,d} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|.$$

(Anleitung: Gehen Sie analog zum Beispiel 16.24 der Vorlesung vor!)

H2:

Für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ bestimmen Sie:

a) A^n für $n \in \mathbb{N}$.
(Tipp: Berechnen Sie A^2, A^3, A^4; dann erraten Sie den allgemeinen Fall und beweisen Sie dies mit Induktion.)

b) $\exp(A)$.

H3:
Eine Menge $X \neq \emptyset$ sei mit der diskreten Metrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

versehen.

a) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in (X,d) genau dann konvergiert, wenn es einen Index N gibt, so dass $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$ gilt.

b) Charakterisieren Sie analog zu a) den Begriff einer Cauchy-Folge und entscheiden Sie, ob (X,d) vollständig ist.

H4:
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $c \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen

$$x \mapsto f(x,c) \quad \text{und} \quad y \mapsto f(c,y)$$

stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$;

b) Versieht man $\mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|.\|_\infty$, so ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in 0 unstetig!

H5:
Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass auch die Abbildung $\tilde{d} : X \times X \to [0,1[$ mit $\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine Metrik auf X definiert.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 11.04.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 11.04.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.