Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 5

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Eine Menge $B \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial B \subset B$ gilt.

b) Für alle $x \in X$ und $r > 0$ ist die Kugel $\{z \in X : d(x, z) \leq r\}$ in X abgeschlossen.

Aufgabe 2

Man entscheide, ob folgende Mengen M in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen bzw. offen sind. In jedem Fall bestimmen Sie $\bar{M}, \overset{\circ}{M}$ und ∂M :

a) $M = \{(x, y) : x \cdot y = 0\}$;

b) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;

c) $M = \{(x, \sin 1/x) : x > 0\}$.

d) $M = \{(x, y) : \quad 0 < x^2 + y \leq 2\}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$:

a) A, B offen $\Rightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen.

b) A, B abgeschlossen $\Rightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ abgeschlossen.

c) A, B beschränkt $\Rightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ beschränkt.

Aufgabe 4

Man zeige, dass jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ darstellbar ist als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Kugeln.

Hausaufgaben:

H1:

Entscheiden Sie, ob folgende Mengen M in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen bzw. offen sind
In jedem Fall bestimmen Sie $\bar{M}, \mathring{M}$ und ∂M :

a) $M = \{(1/n, 0) : \quad n \in \mathbb{N}\};$ b) $M = \{(x, y) : \quad x \geq \sin y\}.$

H2:

Konstruieren Sie offene Mengen U_n $(n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$, die das Intervall $]0, 1]$ überdecken, so dass $]0, 1]$ nicht von endlich vielen dieser Intervalle überdeckt wird.

H3:

Eine Menge M sei mit der diskreten Metrik

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

versehen.

a) Zeigen Sie, dass jede Menge $A \subset M$ offen und abgeschlossen ist.

b) Charakterisieren Sie die Menge aller stetigen Funktionen $f : (M, d) \to \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie für jede Menge $A \subset M$ ihren Abschluss $\bar{A}$ sowie ihren Rand ∂A.

d) Beschreiben Sie die kompakten Teilmengen von M.

H4:

Entscheiden Sie, ob für jeden metrischen Raum (X, d) und alle $x \in X$ und $r > 0$ folgende Gleichung gilt:

$$\overline{\{y \in X : d(x, y) < r\}} = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Ist die Aussage auf $\mathbb{R}^d$ korrekt?

H5:
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\cdot|y|^{3/2}}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(0,0)$ stetig ist.
(Hinweis: Schätzen Sie $|f(x,y)|$ geeignet ab!).

H6:
Es sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X,d) mit Limes x. Beweisen Sie, dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt ist.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 18.04.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 18.04.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.