Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 6

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:
Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, so ist $f(A)$ abgeschlossen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \min(1, |x| \cdot |x-y|)$:

a) f ist stetig und beschränkt;

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert $g(x) := \max\{f(x,y) : y \in \mathbb{R}\}$;

c) Die in b) definierte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unstetig.

Aufgabe 3

Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge, und sei $f : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $g(x) := \max\{f(x,y) : y \in K\}$ eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 4

Betrachte die für $r > 0$ die Kurve

$$\gamma(t) := (r\cos t, r\sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und die Bogenlänge der Kurve.

b) Skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurven:

a) $t \mapsto (t, t^2)$ für $t \in [0,1]$,

b) $t \mapsto (t, e^t)$ für $t \in [0,1]$

Aufgabe 6

Es sei $GL(d,\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} : \det A \neq 0\}$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen. Zeigen Sie, dass die Matrixinvertierung $A \mapsto A^{-1}$ eine Homöomorphie auf $GL(d,\mathbb{R})$ ist.
(Tipp: Cramersche Regel!)

Hausaufgaben:

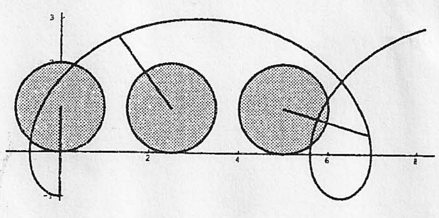
H1:

Berechnen Sie die Länge der Kettenlinie im $\mathbb{R}^2$, d.h. des Graphen der Funktion

$$f(t) := \cosh t \quad \text{für} \quad t \in [-1,1].$$

H2: Zykloide

Eine Kreisscheibe mit Radius 1 rollt auf der x-Achse im $\mathbb{R}^2$ ohne Schlupf mit konstanter Geschwindigkeit, so daß sich der Mittelpunkt der Scheibe zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ im Punkt $M(t) = (t,1)$ befindet.
Am Mittelpunkt der Scheibe ist ein Pfeil der Länge $b > 0$ befestigt, der zur Zeit $t = 0$ nach unten weist und dessen Spitze sich entlang der Kurve $\gamma_b(t)$ bewegt; siehe Skizze



Zykloide mit $b = 2$

a) Begründen Sie $\gamma_b(t) = (t - b\sin t, 1 - b\cos t)$.

b) Beschreiben Sie die Bogenlänge von $\gamma_b(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ durch ein geeignetes Intergral und berechnen Sie dieses für $b = 1$.

c) Skizzieren Sie $\gamma_b(t)$ für $b = 1/2$ und $b = 1$.

H3:
Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen kompakt sind:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - y^4 \leq 16\}$.

c) $SO(d) := \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} : A \cdot A^T = I_d \text{ und } \det A = 1\}$.
(Dabei ist I_d die d-dimensionale Einheitsmatrix).

H4:
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.
Zeigen Sie, dass die Abstandsfunktion

$$d_A : X \to [0, \infty[, \ x \mapsto \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

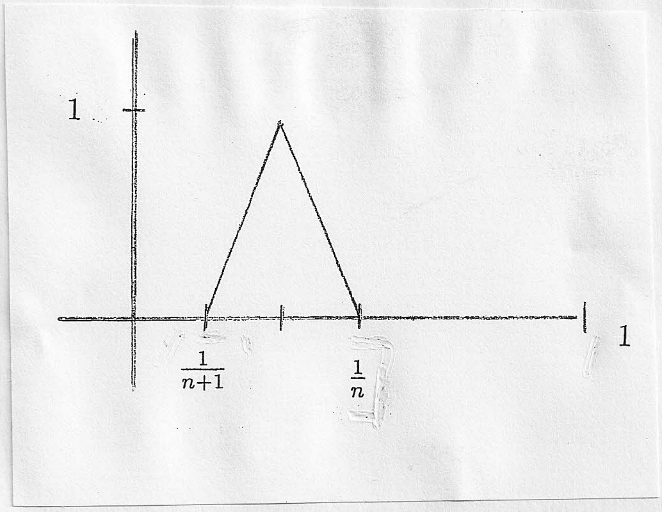
stetig ist.

H5:

a) Seien $K_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ und $K_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ kompakt. Zeigen Sie, dass $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \simeq \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ kompakt ist.

b) Zeigen Sie für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$:
A ist kompakt genau dann, wenn A vollständig und beschränkt ist.

H6*:
Betrachten Sie die stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit den Graphen



a) Zeigen Sie, dass $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass A und die Einheitskugel $B := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ nicht kompakt in $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ sind.

c) In welcher Beziehung stehen a) und b) zum Satz von Heine-Borel?

d) Zeigen Sie, dass die Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_\infty$ auf $\mathcal{C}([0,1])$ nicht äquivalent sind.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 25.05.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 25.05.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.