Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun SS 2010

Analysis II

Blatt 7

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1
Berechnen Sie das Volumen des Paraboloids

$$P_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq r \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 \leq x\}.$$

Aufgabe 2
Zeigen Sie: Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend und wegzusammenhängend.

Aufgabe 3
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängende Mengen.

a) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $A \cup B$ nicht notwendig zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie: Ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.

c) Wie ändert sich die Situation in a), b), falls der Begriff Wegzusammenhang statt Zusammenhang verwendet wird.

Aufgabe 4
Ist U wegzusammenhängend, so ist U polygonzusammenhängend, d.h. zu $a, b \in U$ existiert ein durchgehender Polygonzug von a nach b in U.

Hausaufgaben:

H1:
Berechnen Sie das Volumen der Kugel

$$K_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\}$$

von Radius $r > 0$.

H2:
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (eventuell durch Gegenbeispiele):

a) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, so ist $A \cap B$ zusammenhängend.

b) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend, so ist $A \cap B$ wegzusammenhängend.

c) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ oder } x = y = 0\}$ ist wegzusammenhängend.

d) Die Menge $GL(d, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ der invertierbaren Matrizen ist nicht zusammenhängend.

H3:
Skizzieren Sie den Graphen und die Niveaulinien der Funktion
$f(x, y) := |x| + |y|, \ x, y \in \mathbb{R}$.

H4:
Berechnen Sie grad (f) für:

a) $f(x, y, z) := y \cdot \sin(xz^2)$;

b) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(Hinweis: Der Punkt $(0, 0)$ muss separat untersucht werden!).

H5*:
Betrachten Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:
$A := \{(x, y) : x > 0, \quad y = \sin(1/x)\}, \quad B := \{0\} \times [-1, 1]$.

a) Skizzieren Sie die Mengen.

b) Zeigen Sie, dass A und B wegzusammenhängend und daher zusammenhängend sind.

c) Zeigen Sie, dass $A \cup B$ zusammenhängend ist.

d) Zeigen Sie, dass $A \cup B$ nicht wegzusammenhängend ist.
(Tipp: Widerspruchsbeweis!).

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 01.06.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 01.06.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.