Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 8

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie grad f für $f(x, y, z) = \cos x \cdot \sin(yz^2)$.

b) Entscheiden Sie, ob es stetig partiell differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ gibt mit
grad $f = (x + y, \ -x + y)$ bzw. grad $f = (yz, xz, xy)$.
Bestimmen Sie gegebenfalls ein solches f!

Aufgabe 2

Es sei $f(x, y) := x^2 + y^2$.

a) Bestimmen Sie die Tangentialebene des Graphen von f für $(x, y) = (3, 4)$.

b) Für die Kurve $t \mapsto \binom{t\cos t}{t\sin t}$ berechne man auf zwei Weisen

$$\frac{d}{dt}\, f(x(t), y(t)).$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie:
Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, und sind $f, g : U \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so ist auch $f + g$ in x differenzierbar.

Aufgabe 4

Für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $F(r, \varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $(r > 0, \varphi \in \mathbb{R})$ zeige man:

a) $f_x^2 + f_y^2 = F_r^2 + \frac{1}{r^2}\, F_\varphi^2$,

b) $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{1}{r^2}\, F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\, F_r$.

Aufgabe 5

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **homogen vom Grad** $k > 0$, falls $f(t \cdot x) = t^k \cdot f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

a) Zeigen Sie für eine differenzierbare, vom Grad k homogene Funktion:

$$\langle \text{grad } f(x), x \rangle = k \cdot f(x).$$

b) Geben Sie Beispiele von Polynomen in 2 Variablen, die homogen vom Grad 2 sind.

Hausaufgaben:

H1:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) f ist stetig und partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

b) Entscheiden Sie, ob f in $(0,0)$ total differenzierbar ist.

H2:
Berechnen Sie die Tangentialebene des Graphen von

$$f(x,y) := e^{xy} \cdot \cos(x+y)$$

für $(x,y) = (0, \pi/2)$.

H3:
Zeigen Sie, dass die Gaußfunktion

$$f(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \ e^{-x^2/(2t)} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

der Wärmeleitungsgleichung $f_t = \frac{1}{2} \ f_{xx}$ genügt.

H4:
Skizzieren Sie den Graphen und die Niveaulinien von

$$f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} + e^{-((x-4)^2+y^2)}.$$

H5:

Zeigen Sie, dass
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist.

H6*:

Beweisen Sie:
Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, und ist $f : U \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ in einem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so ist auch $1/f$ in x differenzierbar.
(**Anleitung:** Geben Sie analog zum eindimensionalen Fall in Analysis I vor!)

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 08.06.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 08.06.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.