Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 9

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Taylorpolynome

a) $T_{3,(1,1)}f$ für $f(x,y) = \sin(x+y)$.

b) $T_{2,(1,1,1)}f$ für $f(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x,y) := x^3 + y^3 + 3xy$$

die Hesse-Matrix und die Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, wo diese positiv bzw. negativ definit bzw. semidefinit bzw. indefinit ist. Wo liegen die lokalen und globalen Extrema in $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 3

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $N_A := \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax = 0\}$.
Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \backslash N_A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^T Ax}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie das Differential.

Aufgabe 4 Methode der kleinsten Quadrate

Es seien n Paare $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ von Meßwerten gegeben.
Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(a,b) := \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$$

minimal wird.

Aufgabe 5

Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass
$F(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx$ auf $[0,1]$ stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie $F'(y)$.

Hausaufgaben:

H1:

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{3,(1,1)}$ folgender Funktionen:

a) $f(x,y) = \cos(xy)$;

b) $f(x,y) = x^y \quad$ für $\quad x, y > 0$.

H2:

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x,y) := x^2 e^y \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

die Hesse-Matrix und die Punkte, wo diese positiv bzw. negativ definit bzw. semidefinit bzw. indefinit ist. Wo liegen die lokalen und globalen Extrema?

H3:

Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := (y - x^2)(y - 2x^2)$ zeige man:

a) f hat kein lokales Minimum in $(0,0)$.

b) Die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch $(0,0)$ hat in $(0,0)$ ein isoliertes lokales Minimum.

Skizzieren Sie den Graphen von f in der Nähe von (0,0)
(per Hand oder einem geeigneten Computerprogramm).

H4:

Für Vektoren $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{R}^n$ bestimme man das Minimum von

$$f(x) := \sum_{k=1}^{r} \|x - z_k\|_2^2 \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

H5:

Für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeige man:

$$\triangle(fg) = f \cdot \triangle g + 2\langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g \rangle + g \cdot \triangle f.$$

H6:
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \quad \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f total differenzierbar in $(0,0)$ ist, und die partiellen Ableitungen nicht stetig in $(0,0)$ sind.

H7*:
Die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ wird aufgefasst als Funktion in Abhängigkeit von n Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für $a_1, \dots, a_n, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n$: $(d\det)(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 15.06.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 15.06.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.