Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 10

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Überprüfen Sie für die Funktionen

$$f_1(x,y) = (x-y)^2 + y^4 \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = x^2 + y^3,$$

dass grad $f_i(0,0) = 0$ und $Hf_i(0,0) = 0$ gilt.
Entscheiden Sie, ob in $(0,0)$ Extrema vorliegen!

Aufgabe 2 Kugel-Koordinaten

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinate für

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(r,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} r & \sin\vartheta & \cos\varphi \\ r & \sin\vartheta & \sin\varphi \\ r & \cos\vartheta & \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die (r,ϑ,φ), wo die Jacobi-Matrix singulär ist.

c) Betrachten Sie die Halbebene $S := \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie, dass $f :\ ]0,\infty[\ \times\ ]0,\pi[\ \times\ ]0,2\pi[\ \to \mathbb{R}^3 \backslash S$ bijektiv ist.

Aufgabe 3

a) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ wie üblich und fassen die komplexe Exponentialfunktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = e^z$ auf als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ explizit, und skizzieren Sie die Bilder der Geraden, die parallel zur x- bzw. y-Achse sind.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ heißt <u>konform</u>, falls $c \cdot A$ orthogonal für ein $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist.
Überprüfen Sie, dass eine konforme Matrix eine winkeltreue lineare Abbildung definiert. (Kosinussatz!)

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x,y)$ für die Funktion f aus a) und überprüfen Sie, dass sie in jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ konform ist.

Aufgabe 4 Integralgleichungen

Es sei $K : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, zu der eine Konstante $L \in]0,1[$ existiere mit

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, s, t \in [0,1] : |K(s,t,u) - K(s,t,v)| \le L \cdot |u - v|.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $f \in \mathcal{C}([0,1])$ gibt mit

$$f(s) = \int_0^1 K(s,t,f(t))\ dt \qquad \text{für alle} \quad s \in [0,1].$$

Tipp: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes im Banachraum $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$; vgl. Blatt 3.

Hausaufgaben:

H1:

Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar.

a) Überprüfen Sie, dass $G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$G(y,z) := \int_0^y f(x,z)\ dx$$

stetig partiell differenzierbar ist und berechnen Sie grad $G(y,z)$.
(Tipp: Tutoraufgabe 5, Blatt 9!)

b) Berechnen Sie für $H(y) := \int_0^y f(x,y)\ dx$ ($y \in [0,1]$) die Ableitung $G'(y)$ mit der Kettenregel.

c) Berechnen Sie die Ableitungen von
i) $H_1(y) := \int_0^y e^{-xy^2}\ dx$.
ii) $H_2(y) := \int_0^y e^{-x^2y^2}\ dx$.

H2: Jacobi-Transformation

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := (x(1-y), xy)$.

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix.

b) Zeigen Sie, dass f die Menge $]0,\infty[\ \times\ ]0,1[$ bijektiv auf $]0,\infty[^2$ abbildet.

H3:
Betrachten Sie die komplexe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $g(z) := 1/z$.

a) Fassen Sie g als Abbildung $f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ auf und geben Sie f explizit an.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x, y)$ und bestimmen Sie, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \quad J_f(x, y)$ konform ist.
(Hinweis: Geben Sie analog zur Tutoraufgabe 3) vor!)

H4:
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x, y) := y(x-1)\ e^{-(x^2+y^2)}$$

Lage und Art aller Extrema in $[0, \infty[\ \times\ [0, \infty[$.
(Anleitung: Beachten Sie, dass Extrema auch auf dem Rand von M liegen können. So muss man z.B. für Randpunkte der Form $(x, 0), x \geq 0$, die Funktion $x \mapsto f(x, 0)$ studieren!)

H5*　Elliptische Koordinaten:
Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(u, v) := \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \sinh u \sin v \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix.

b) Entscheiden Sie, ob f konform und/oder lokal umkehrbar ist.

c) Bestimmen Sie ggf. die Jacobimatrix der lokalen Umkehrfunktion.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 22.06.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 22.06.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.