Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 11

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Betrachten Sie die bijektive Abbildung

$$f:\ ]0,\infty[\ \times\ ]0,\pi[\ \times\ ]0,2\pi[\ \to \mathbb{R}^3\backslash S$$

mit der Halbebene $S := \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ und

$$f(r,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} r & \sin\vartheta & \cos\varphi \\ r & \sin\vartheta & \sin\varphi \\ r & \cos\vartheta & \end{pmatrix}$$

(vgl. Tutoraufgabe 2) vom Blatt 10.
Entscheiden Sie, ob f ein Diffemorphismus ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Gleichung

$$f(x,y) := x^2 + x^3 + y^3 + e^y - 1 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

a) Zeigen Sie ohne den Satz über implizite Funtionen, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x,y) = 0$.
Also existiert eine auf $\mathbb{R}$ definierte Auflösung $y = g(x)$.

b) Begründen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen, dass g aus a) auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Extrema von g.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es sei $a \in \mathbb{R}^3$ mit $f(a) = 0$, und $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit $a \in U$, so dass auf U die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

differenzierbare Auflösungen

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z) \quad \text{und} \quad z = z(x, y)$$

hat. Zeigen Sie in a:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \quad \text{auf} \quad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Hausaufgaben:

H1:

Betrachten Sie die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ hat;

b) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist;

c) Berechnen Sie $\operatorname{grad} g(1, 1)$;

d) Untersuchen Sie g auf lokale und globale Extrema.

H2:

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 = 1$$

in einer Umgebung von $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ durch eine differenzierbare Abbildung

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

mit $u(1/5, 2/5) = 2/5$, $v(1/5, 2/5) = 1/5$ aufgelöst werden kann.
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix dieser Auflösung im Punkt $(1/5, 2/5)$.

H3:
Betrachten Sie die Menge

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad x + y + z = 1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass E kompakt ist;

b) Begründen Sie, das es Punkte in E gibt, die minimalen und maximalen Abstand von $(1, 1, 1)$ haben. Bestimmen Sie sodann diese Punkte.

H4:
Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y) := xy$ auf der Ellipse
$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$

a) mit Lagrange-Formalismus;

b) unter Verwendung einer passenden Parametrisierung von E.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 29.06.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 29.06.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.