Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 12

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

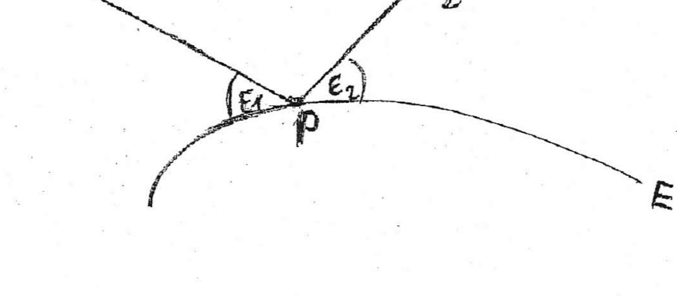
a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $y^3 - x^3 + xy + 1 = 0$ für jedes $x > 0$ genau eine Lösung $y = f(x) \in \mathbb{R}$ hat.

b) Bestimmen Sie durch zwei Iterationsschritte eine Näherung für $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 1$.

c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f bei $x = 1$.

Aufgabe 2 Das Fermatsche Prinzip

Eine Fläche $E \subset \mathbb{R}^3$ werde durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ beschrieben für eine differenzierbare Funktion f. Ein von einem Punkt $P_1 \in \mathbb{R}^3$ ausgehender Lichtstrahl trifft E in einem Punkt P, wird dort reflektiert und gelangt schließlich zu einem Punkt $P_2 \in \mathbb{R}^3$.
Nach dem Fermatschen Prinzip nimmt der Lichtstrahl dabei den kürzesten Weg von P_1 nach P_2 über den Punkt $P \in E$.
Man folgere aus diesem Prinzip das **Reflexionsgesetz**: Die Vektoren $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{PP_2}$ und der Normalenvektor N der Tangentialebene zu E in P liegen in einer Ebene, und Eintrittswinkel ε_1 und Austrittswinkel ε_2 stimmen überein.



Aufgabe 3

Betrachten Sie auf $G :=]0, \infty[^2$ die Schar der Halbparabeln

$$P_c : y = cx^2, \quad c > 0.$$

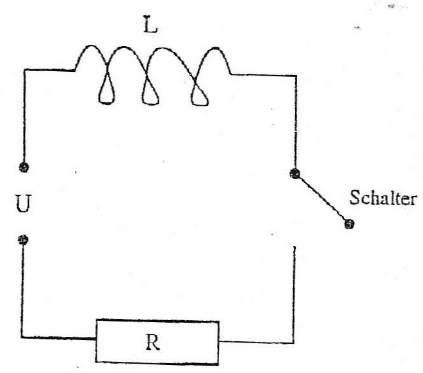
a) Konstruieren Sie eine Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ auf G, deren Lösungen genau die obigen Halbparabeln P_c sind.

b) Die orthogonalen Trajektorien zur Schar $\{P_c : c > 0\}$ sind all diejenigen Kurven in G, die alle P_c senkrecht schneiden.
Stellen Sie eine Differentialgleichung für die orthogonalen Trajektorien zu $\{P_c : c > 0\}$ auf, und lösen Sie diese Gleichung.
Skizzieren Sie die $\{P_c : c > 0\}$ und ihre orthogonalen Trajektorien.

Aufgabe 4

An einer Spannungsquelle mit Spannung U liegen über einem Schalter eine Spule L und ein Ohmscher Widerstand R in Reihe. Die zeitliche Entwicklung der Stromstärke I nach dem Einschalten genügt dem Anfangswertproblem

$$L\dot{I} + RI = U, \quad I(0) = 0$$



für $t \geq 0$. Dabei sind $L, R, U > 0$ konstant.
Lösen Sie das Anfangswertproblem. Wie verhält sich $I(t)$ für $t \to \infty$.
Skizzieren Sie die Lösung.

Hausaufgaben:

H1:
Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die Parabel $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$ und die Gerade $G := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = u - 10\}$. Bestimmen Sie durch einen Lagrange-Ansatz $(x,y) \in P$ und $(u,v) \in G$ mit minimalem Abstand.

H2:

a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots \cdot x_n^2$ unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$.

b) Folgern Sie aus a) die aus Analysis 1 bekannte Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.

H3:
Zeigen Sie, dass

$$z^3 + 4z - x^2 + xy^2 + 8y - 7 = 0$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung $z = f(x,y)$ hat, und untersuchen Sie f auf Extrema.

H4:
Bestimmen Sie den Quader $Q \subset \mathbb{R}^3$ mit Inhalt 1 und minimaler Oberfläche durch einen passenden Lagrange-Ansatz.

H5:
Gegeben sei die Differentialgleichung $y' + y \cdot \cos x = 0$.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 06.07.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 06.07.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.