Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 13

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$y'' = a\sqrt{1 + y'^2} \quad (a > 0).$$

Aufgabe 3
Betrachten Sie eine Differentialgleichung der Form

$$(*) \quad y' = f(y/x) \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

für eine gegebene stetige Funktion f.

a) Zeigen Sie: Ist y eine Lösung von $(*)$, so ist für jedes $a \neq 0$ auch $y_a(x) := a \cdot y(\frac{x}{a})$ eine Lösung von $(*)$, d.h. Streckungen mit Zentrum $(0, 0)$ führen Lösungen in Lösungen über.

b) Zeigen Sie: Ist y eine Lösung von $(*)$, so genügt $z(x) := y(x)/x$ einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy' = y \ln y - y \ln x, \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 4

Zur Bestimmung einer nichttrivialen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + (1 - \frac{\alpha^2}{x^2}) \cdot y(x) = 0$$

für $x > 0$ und Parameter $\alpha \geq \frac{1}{2}$ machen Sie einen Potenzreihenansatz

$$y(x) = x^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

und bestimmen Sie die a_k mithilfe der Bedingungen $\left.\frac{y(x)}{x^\alpha}\right|_{x=0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha}$ und $\left.\left(\frac{y(x)}{x^\alpha}\right)'\right|_{x=0} = 0$.

Hausaufgaben:

H1:
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' + 2\frac{y}{x} = x^a$$

für $x > 0$ mit Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(1) = 0$.

H2:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y - x}{1 + y - x}; \quad y(0) = 1$$

und bestimmen Sie das maximale Definitionsintervall dieser Lösung.
Anleitung: Schreiben Sie $z(x) := y(x) - x + 1$, und stellen Sie eine Gleichung für z auf!

H3:
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(D) \quad \dot{x}(t) = F(x(t)),\; t \in \mathbb{R}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für beliebiges F korrekt sind:

a) Ist $t \mapsto x(t)$ Lösung von (D), so ist auch $t \mapsto x(t + t_0)$ eine Lösung von (D) für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$.

b) Ist $t \mapsto x(t)$ Lösung von (D), so ist auch $t \mapsto c \cdot x(t)$ eine Lösung für $c \in \mathbb{R}$.

Im Falle der Nichtgültigkeit formuliere man ggf. eine Bedingung von F, unter der die Aussage richtig ist.

H4:
Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\dot{x}(t) = t^n \cdot x(t) + e^{at} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}).$$

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 13.07.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 13.07.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.

Informationen zur Klausur Analysis II im SS 2010

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/klausur.html