Prof. Dr. Michael Voit
Dipl.-Math. A. Kaplun

SS 2010

Analysis II

Blatt 14

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/ana_II_10.html

Tutoraufgaben:

Aufgabe 1

Zeigen Sie: das Anfangswertproblem

$$y' = \arctan(y),\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

hat genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

Aufgabe 2

a) Leiten Sie aus einer Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$ für $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ab.

b) Berechnen Sie alle Lösungen von $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$. Geben Sie dabei die maximalen Definitionsbereiche der Lösungen an!

Aufgabe 3 Picard-Iteration

Approximative Lösungen des Anfangswertproblems

$$(AWP) \quad y'(t) = 3t^2 y(t),\ y(0) = c$$

seien durch die Picard-Iteration wie folgt bestimmt:

$$\varphi_0 :\equiv c; \quad \varphi_{n+1}(t) = c + 3\int_0^t s^2 \varphi_n(s)\ ds,\ n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie:

a) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$;

b) φ_n für $n \in \mathbb{N}$;

c) Die Lösung von (AWP).

Aufgabe 4
Zur Bestimmung einer nichttrivialen Lösung der Differentialgleichung

$$4t \cdot y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

machen Sie einen Potenzreihenansatz

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, t^k$$

und bestimmen Sie die a_k mithilfe von a_0. Stellen Sie dann diese Lösungen in möglichst einfacher Form dar!

Hausaufgaben:

H1:
Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme:

a) $y'(t) = -t/y(t), \quad y(0) = y_0 > 0;$

b) $y'(t) = e^{y(t)}, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R};$

c) $y'(t) = y(t)^3, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$

Geben Sie jeweils maximale Zeitintervalle an, auf denen die Lösung existiert.

H2:
Betrachten Sie für $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$(*) \quad y'(x) = x \cdot \sin(xy); \quad y(0) = y_0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(*)$ für $y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung hat;

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen, d.h. alle $y_0 \in \mathbb{R}$, so dass $y \equiv y_0$ die Gleichung $(*)$ erfüllt.

c) Begründen Sie, dass eine Lösung y von $(*)$ mit $y(0) > 0$ der Beziehung $y(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genügt.

H3:
Eine zeitabhängige Population $x = x(t)$ löse eine Differentialgleichung

$$(1) \quad \dot{x} = x^\beta (g-x)^\gamma, \quad g > 0,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die stationären Lösungen von (1).
b) Zusätzlich zu der Differentialgleichung (1) sei nun eine Anfangsbedingung

$$(2) \quad x(0) = x_0, \quad 0 < x_0 < g,$$

gegeben. Zeigen Sie, dass das AWP (1) + (2) für $\beta, \gamma \geq 1$ eine eindeutige, auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt, und dass für alle $t \in \mathbb{R} : 0 < x(t) < g$ gilt. Skizzieren Sie qualitativ die Lösung!
c) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) für $\beta = \gamma = 1$.
d) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) für $\beta = 0$ und $\gamma = \frac{1}{2}$.
(Hinweis: Geben Sie analog zum Beispiel 23.15 der Vorlesung vor!)
e) Für welche Parameter $\beta, \gamma \geq 1$ hat die Lösung aus b) Wendepunkte? Berechnen Sie dort den Wert der Lösung.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Dienstag, 20.07.2010, 10.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Besprechung der Hausaufgaben:

Am Dienstag, 20.07.2010, 10.15 Uhr, in der Globalübung in HG II HS 5.

Informationen zur Klausur Analysis II im SS 2010

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis2/klausur.html