Blatt 3 Hausaufgaben

(H1) Normen auf $\mathbb{C}^d$?

(a) $\|x\| := \sum_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |x_k|$ ist eine Norm, denn

(i) Sei $x \in \mathbb{C}^d$, $x \neq 0$. $\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, d\}: \ x_j \neq 0$

$\Rightarrow \|x\| = \sum_{k=1}^{d} (k+1)|x_k| \geq (j+1) \cdot |x_j| > 0$ und

$\|0\| = \sum_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |0| = 0$ ✓

(ii) Sei $x \in \mathbb{C}^d$, $c \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \|c \cdot x\| = \sum_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |c \cdot x_k| = |c| \cdot \sum_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |x_k| = |c| \cdot \|x\|$ ✓

(iii) Seien $x, y \in \mathbb{C}^d$

$\Rightarrow \|x+y\| = \sum_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |x_k + y_k| \overset{\triangle\text{-Ugl}}{\leq} \sum_{k=1}^{d} (k+1)(|x_k| + |y_k|) =$

$= \sum_{k=1}^{d} (k+1) \cdot |x_k| + \sum_{k=1}^{d} (k+1) |y_k| = \|x\| + \|y\|$ ✓.

(b) $\|x\| = \sum_{k=1}^{d} (k-1) \cdot |x_k|$ ist keine Norm, denn

Wähle $x := (1, 0, \dots, 0) \neq 0_{\mathbb{C}^d}$. ↯ zu (ii).

Aber $\|x\| = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \dots + (d-1) \cdot 0 = 0$.

(c) $\|x\| = \sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2}$, wobei $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ Normen auf $\mathbb{C}^d$.

Beh: $\|x\|$ ist eine Norm, denn:

(i) Sei $x \in \mathbb{C}^d$, $x \neq 0 \Rightarrow$

$\|x\| = \sqrt{\underbrace{\|x\|_1^2}_{>0} + \underbrace{\|x\|_2^2}_{>0}} > 0$ und $\|0\| = \sqrt{\underbrace{\|0\|_1^2}_{=0} + \underbrace{\|0\|_2^2}_{=0}} = 0$ ✓

da $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen

(ii) Sei $c \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{C}^d$.

$\Rightarrow \|c \cdot x\| = \sqrt{\|c \cdot x\|_1^2 + \|c \cdot x\|_2^2} = \sqrt{c^2 (\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2)} =$

$= |c| \cdot \|x\|$ ✓

(iii) siehe Extrablatt

(c) $\|x\| := \sum_{k=1}^{d} (|Re\, x_i| + |Im\, x_i|)$ ist keine Norm, denn

Gegenbsp: $d=1$, $x := 1-i \in \mathbb{C}^1$, $c := 1+i \in \mathbb{C}$, $c\cdot x = 2$

$\Rightarrow \|c\cdot x\| = |Re(cx)| + |Im(cx)| = |2| + |0| = 2$

Aber: $|c|\cdot\|x\| = \sqrt{2}\cdot(|Re\, x| + |Im\, x|) = \sqrt{2}\cdot(1+1) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ↯ zu (ii)

(d) $\|x\| := \max(\|x\|_1, \|x\|_2)$ ist Norm für $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen.

(i) Sei $x \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. $\Rightarrow \|x\| = \max(\underbrace{\|x\|_1}_{>0}, \underbrace{\|x\|_2}_{>0}) > 0$; $\|0\| = \max(0,0) = 0$.

(ii) Sei $c \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^d \Rightarrow \|c\cdot x\| = \max(\|cx\|_1, \|c\,x\|_2) =$

$= \max(|c|\cdot\|x\|_1, |c|\cdot\|x\|_2) = |c|\cdot\max(\|x\|_1, \|x\|_2) = |c|\cdot\|x\|$

(iii) seien $x, y \in \mathbb{C}^d \Rightarrow \|x+y\| = \max(\|x+y\|_1, \|x+y\|_2) \leq$

$\leq \max(\|x\|_1 + \|y\|_1, \|x\|_2 + \|y\|_2) \leq$

$\leq \max(\|x\|_1; \|x\|_2) + \max(\|y\|_1 + \|y\|_2) = \|x\| + \|y\|$

Zz: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$\iff \sqrt{\|x+y\|_1^2 + \|x+y\|_2^2} \le \sqrt{\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2} + \sqrt{\|y\|_1^2 + \|y\|_2^2}$

$\iff \underbrace{\|x+y\|_1^2 + \|x+y\|_2^2}_{=LS} \le \|x\|_1^2 + \|x\|_2^2 + \|y\|_1^2 + \|y\|_2^2 +$
$+ 2\sqrt{(\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2)(\|y\|_1^2 + \|y\|_2^2)} =: RS$

$LS \le (\|x\|_1 + \|y\|_1)^2 + (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 =$
$= \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 +$
$+ 2\|x\|_1\|y\|_1 + 2\|x\|_2\|y\|_2 =: (*)$

Falls gilt: $(*) \le RS$, dann folgt die Beh,

Dazu: (Kürze $\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2 + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$):

Zz: $\cancel{2}\|x\|_1\|y\|_1 + \cancel{2}\|x\|_2\|y\|_2 \le \cancel{2}\sqrt{(\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2)(\|y\|_1^2 + \|y\|_2^2)}$

$\iff \cancel{(\|x\|_1\|y\|_1)^2} + 2\|x\|_1\|y\|_1\|x\|_2\|y\|_2 + \cancel{(\|x\|_2\|y\|_2)^2} \le$
$\le \cancel{(\|x\|_1\|y\|_1)^2} + \|x\|_1^2\|y\|_2^2 + \|x\|_2^2\|y\|_1^2 + \cancel{(\|x\|_2\|y\|_2)^2}$

$\iff 0 \le (\|x\|_1\|y\|_2)^2 - 2\|x\|_1\|y\|_2 \cdot \|x\|_2\|y\|_1 + (\|x\|_2\|y\|_1)^2 =$
$= (\|x\|_1\|y\|_2 - \|x\|_2\|y\|_1)^2$ ✓.

Extrablatt

(H2) $\mathcal{C}[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ stetig} \}.$

(*) 13.29 $\Rightarrow$ $f \in R[a,b]$ und $p \in [1,\infty)$,

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Dann: • $\|f\|_p \geq 0 \quad \forall f \in R[a,b]$

• $\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

• $f \in \mathcal{C}[a,b],\ f \neq 0 \overset{13.15}{\Rightarrow} \|f\|_p > 0.$

(a) $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, dx$ ist Norm auf $\mathcal{C}[a,b]$,

sog. L^1-Norm, denn.

(i) und (ii) folgen mit (*)

(iii) klar mit Minkowski-Ungl. (13.31).

(b) $\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}[a,b]$,

sog. L^2-Norm.

Bew. wie in (a).

(H3) Sei $\|x\| := \sum_{k=1}^{n} k \cdot |x_k|$ auf $\mathbb{R}^n$.

Dann $\|.\|$ ist eine Norm (klar, s. (H1)).

Beh: $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ ist Banach-Raum.

Zu zeigen: $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ ist vollständig

(1) Sei $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \cdot |x_k|}_{= \|x\|} \leq \sum_{k=1}^{n} n \cdot |x_k| = n \cdot \|x\|_1$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ und $\|.\|_1$ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^n$.

$\left.\begin{array}{l} (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \text{ Banach-R. (s. 16.16(2))} \\ 16.16\,(3) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Beh

(H4) $\mathbb{R}[x]$ VR der Polynome

(a) $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ und $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx$

sind Normen auf $\mathbb{R}[x]$, da

da Polynome stetig sind und die Beh. für $C_{[0,1]}$-Fkt'en schon gezeigt ist (Ident.-Satz f. Polynome).

(b) $(\mathbb{R}[x], \|.\|_\infty)$ kein Banach-Raum.

Betrachte $f(x) = e^x$; $f \in C([0,1])$.

Setze $p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \in \mathbb{R}[x]$ Polynom.

§12 (glm. konv.) $\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $p_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ glm., d.h. $\|p_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

((*) vgl. auch (A2), Blatt 15: glm. konv. gg. Zeta-Fkt)

D.h. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine CF bzgl. $\|.\|_\infty$, aber die Grenzfkt. $f \notin \mathbb{R}[x]$. $\Rightarrow$ Beh.

(c) $\|x^n\|_\infty \overset{\text{Def}/(a)}{=} \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$

$\|x^n\|_1 = \int_0^1 |x^n|\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

(d) $\|.\|_1$ & $\|.\|_\infty$ sind nicht äquivalent,

denn $\|x^n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. und $\|x^n\|_\infty = 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \nexists\, c>0 : \|x^n\|_\infty \le c\cdot\|x\|_1$