H 1) Sei $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear

<u>Beh.:</u> $\|T\| = \max_{j \in \{1,..,d\}} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|$

<u>Bew.:</u> "$\leq$": $\|T\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \sum_{i=1}^{d} \left| \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \right| \leq \sup_{\|x\|_1 = 1} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} |a_{ij}| |x_j|$

$$= \sup_{\|x\|_1 = 1} \sum_{j=1}^{d} |x_j| \underbrace{\sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|}_{\leq \max_{j \in \{1,..,d\}} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|} \leqq \sup_{\|x\|_1 = 1} \left(\max_{j \in \{1,..,d\}} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}| \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{d} |x_j| \right)}_{= \|x\|_1 = 1}$$

$$\leqq \max_{j \in \{1,..,d\}} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|$$

"$\geqq$": Sei j_0 der Index für den $\sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|$ maximal wird

$$\|T\|_1 = \sup_{\|x\|_1 \leqq 1} \left\| \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \right\|_1 \geq \left\| \sum_{j=1}^{d} a_{ij} e_{j_0} \right\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \left| \sum_{j=1}^{d} a_{ij} e_{j_0} \right| = \sum_{i=1}^{d} |a_{ij_0}| = \max_{j \in \{1,..,d\}} \sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|$$

$\square$

H 2) a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}8 & -8\\ -8 & 8\end{pmatrix}$ usw.

Beh.: $A^k=(-2)^{k-1}\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +1 & -1\end{pmatrix}$

Bew.: I.A. $k=1$ ✓

I.S.: $A^{k+1}=A^k\cdot A=(-2)^{k-1}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +1 & -1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$

$=(-2)^k\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $\square$

b) $\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{k!}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=I-\frac{1}{(-2)}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}}_{(e^{-2}-1)}\left(-I+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=+I+\frac{1}{2}(e^{-2}-1)I-\frac{1}{2}(e^{-2}-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$=\left(1+\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}\right)I+\frac{1}{2}(1-e^{-2})\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}(e^{-2}+1)\right)I+\frac{1}{2}(1-e^{-2})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$=e^{-1}\underbrace{\left(\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)}_{\cosh(1)}\cdot I+e^{-1}\cdot\underbrace{\left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)}_{\sinh(1)}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=e^{-1}\left(\cosh(1)\cdot I+\sinh(1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$

$=e^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\cosh(1) & \sinh(1)\\ \sinh(1) & \cosh(1)\end{pmatrix}$ //

H3) a) Sei $X \neq \emptyset$ mit der Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

versehen.

„$\Longleftarrow$": Sei Folge (x_n) gegeben und es gelte
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \ x_n = x_N$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Dann gilt $\forall n \geq N: \ d(x_n, x_N) = 0 < \varepsilon$

d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_N$

„$\Longrightarrow$": Sei x_n konv. gegen x_0, d.h.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: d(x_n, x_0) < \varepsilon$

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}$

Da $d(x_n, x_0) < \frac{1}{2}$ für $\forall n \geq N$ folgt

$d(x_n, x_0) = 0 \quad \forall n \geq N.$

$\Longrightarrow x_n = x_0 \quad \forall n > N$

d.h. insbesondere folgt $x_n = x_N \ \forall n \geq N.$

b) Sei (x_n) eine C.F., d.h.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, n > N: \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}$, d.h.
$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N: \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$, also $d(x_n, x_m) = 0$

d.h. $x_n = x_m$
Insbesondere gilt: $x_N = x_m$ (da für $0 < \varepsilon < 1$ folgt: $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$ $d(x_m, x_N) = 0$)

Es folgt:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: d(x_n, x_N) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow (x_n)$ ist konvergent, d.h. (X, d) ist vollständig. $\square$

H4) a) Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{" } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) <u>Beh.</u>: $x \mapsto f(x,c)$ ist stetig $\forall c \in \mathbb{R}$

<u>Bew.</u>: <u>1. Fall</u>: $c = 0$

$f(x,c) = 0$, also stetig

<u>2. Fall</u>: $c \neq 0$

$$f(x,c) = \frac{\overbrace{2xc}^{\xrightarrow{x\to 0} 0}}{\underbrace{x^2+c^2}_{\xrightarrow{x\downarrow 0} c^2}} \} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ist stetig}$$

~~und: $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,c) - f(0,c)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{hc}{h^2+c^2}$~~

(ii) $y \mapsto f(c,y)$: <u>Analog</u>

b) <u>Beh.</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist in 0 unstetig

<u>Bew.</u>: f stetig <u>in 0</u>

$\Longleftrightarrow$ f folgenstetig <u>in 0</u>

Blatt 4
Tutorübung
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ metrische Räume

<u>zeige</u>: $\exists$ konv. Folge $(x_n, y_n) = a_n$ in $\mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Setze $a_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = (0,0)$, $f(0,0) = 0$

Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{2} \neq 0$$

↯

H5) **Beh.:** $\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ist eine Metrik auf X

Bew.: (i) Definitheit

$d(x,y) \geqq 0 \quad \forall x,y \in X$, da

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{\overbrace{d(x,y)}^{\geq 0}}{\underbrace{1+d(x,y)}_{\neq 0}} \geqq 0$$

$$\tilde{d}(x,y) = 0 \iff \frac{\overset{\geqq 0}{d(x,y)}}{\underbrace{1+d(x,y)}_{\geqq 0}} = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$$

(ii) Symmetrie:

$$\tilde{d}(y,x) = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \tilde{d}(x,y)$$

(iii) Δ-Ungleichung:

Sei $f: \begin{cases} [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \\ x \longmapsto \frac{x}{1+x} \end{cases}$

Dann gilt: $\tilde{d}(x,y) = f(d(x,y))$ und f ist str. mon st,

da $f'(x) = \frac{(1+x)\cdot 1 - 1\cdot x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

$$\tilde{d}(x,z) = f(\underbrace{d(x,z)}_{\leq d(x,y)+d(y,z)}) \leq f(d(x,y)+d(y,z))$$

$$= \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+(d(x,y)+d(y,z))} = \frac{d(x,y)}{1+(d(x,y)+\underbrace{d(y,z)}_{\geqq 0})} + \frac{d(y,z)}{1+(d(x,y)+\underbrace{d(y,z)}_{\geqq 0})}$$

$$\leqq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$$

$\square$