Blatt 5. Hausaufgaben

(H1) ⓐ $M = \{ (\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N} \}$

- M nicht abgeschl., da $(0,0) \notin M$ aber $M \ni (\frac{1}{n}, 0) \to (0,0)$

  insbesondere: $(0,0) \in \partial M$

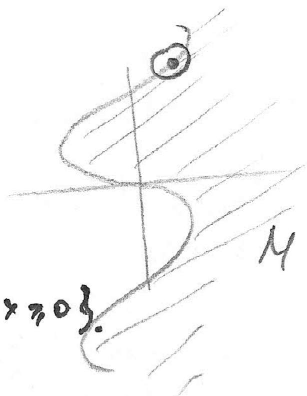
- M nicht offen, da zu $r > 0$:

  $B_r(\frac{1}{n}, 0) \ni \left(\frac{1}{n}, \frac{r}{2}\right) \notin M$

- $\overline{M} = M \cup \partial M = M \cup \{(0,0)\}$ abg.

  $\partial M = \overline{M}$, $\mathring{M} = \overline{M} \setminus \partial M = \emptyset$

ⓑ $M = \{ (x,y) : x \geq \sin y \}$



- M abg., da für $(x_n, y_n) \in M$

  mit $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \to \infty} (x,y)$ gilt

  $x \geq \sin y$, d.h. $(x,y) \in M$

  od. $\{ \sin y - x \geq 0 \}$.

- Ebenso ist $\{ (x,y) : x \leq \sin y \}$ abg.

- Für $(x,y) \in M$ mit $x = \sin y$ und $r > 0$ gilt:

  $(x - \frac{r}{2}, y) \in B_r(x,y)$ und $(x - \frac{r}{2}, y) \notin M$, d.h. $(x,y) \in \partial M$

- $\overline{M} = M$ da M abg.

  $\partial M = \{ (x,y) : x = \sin y \}$

  $\mathring{M} = \{ (x,y) : x > \sin y \}$.

(H2) $(0,1]$ nicht kompakt

Wähle $U_n = (\frac{1}{n}, 2)$

Zeige: $(0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$

Sei $x \in (0,1]$, insb. $x>0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0} < x$

$\Rightarrow x \in (\frac{1}{n_0}, 2) = U_{n_0}$

Ang: $U_{i_0}, \dots, U_{i_n}$ ist endl. Teilüberdeckung von $(0,1]$.

Sei $m = \max\{i_0, \dots, i_n\}$.

$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{n} U_{i_k} = U_m = (\frac{1}{m}, 2)$

aber: $\frac{1}{2m} \in (0,1] \setminus U_m$ $\lightning$ zu Überdeckung $\square$

(H3) $M \neq \emptyset$, diskrete Metrik $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

(a) $A \subseteq M$ bel.

- A ist offen: zu $r = \frac{1}{2}$ und $x \in A$ gilt: $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subseteq A$
- A ist abg., da $M \setminus A$ offen (wie oben).

(b) $f: M \to \mathbb{R}$ stetig $\Leftrightarrow$ f folgenstetig $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $x_n \xrightarrow{d} x$ gilt (nach Bl. 4): $x_n = x_N$ $\forall n \geq N$ und somit $f(x_n) \to f(x)$.

D.h. alle Fkt'en $f: M \to \mathbb{R}$ sind stetig

Urbilder off. sind offen. (Alle sind offen).

(c) Da $A \subseteq M$ abg. nach (a) gilt: $\bar{A} = A$, $\partial A = \emptyset$

(d) Sei $A \subseteq M$ komp.

$\Leftrightarrow$ Für jede offene Überdeckung von A existiert endl. Teilüberdeck. Insbesondere: zu Überdeck. mit offenen Kugeln von Radius $\frac{1}{2}$. $\Rightarrow A$ endlich.

$\square$

(H4) (X, d) metr. Raum

$\overline{B_r(x)} = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$. ?

d diskrete Metrik, $r = 1$, X mind. 2 Elemente

$\overline{B_r(x)} = \{x\} \subsetneq \{y \in X : d(x,y) \leq r\} = X$

Aussage für $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ klar.

(H5) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot |y|^{3/2}}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beh: f stetig in $(0,0)$ (sonst stetig - klar).

zeige: f folgenstetig in $(0,0)$:

Sei $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ mit $(x_n, y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$

$$|f(x_n, y_n) - f(0,0)| = \left| \frac{x_n \cdot |y_n|^{3/2}}{x_n^2 + y_n^2} \right| \leq \frac{\max(|x_n|, |y_n|)^{5/2}}{x_n^2 + y_n^2} =$$

$$= \frac{\|(x_n, y_n)\|_\infty^{5/2}}{\|(x_n, y_n)\|_2^2} \leq \frac{(C \cdot \|(x_n, y_n)\|_2)^{5/2}}{\|(x_n, y_n)\|_2^2} = C^{5/2} \cdot \|(x_n, y_n)\|_2^{1/2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\exists C > 0:$

$\|\cdot\|_\infty \leq C \cdot \|\cdot\|_2$

H16 (X,d) metr. Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ mit

$d(x_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für ein $x \in X$

<u>Beh</u>: $M := \{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ komp.

Sei $M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \subseteq X$ offen.

Wähle $j\in\mathbb{N}$: $x \in U_j$ offen

$\Rightarrow \exists r>0: B_r(x) \subseteq U_j$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$: $d(x_n,x) < r \quad \forall n \geq n_0$.

Insbesondere: $x_n \in U_j \quad \forall n \geq n_0$

Zu $x_1,\dots,x_{n_0-1}$ wähle $i_1,\dots,i_{n_0-1}$ so, daß $x_k \in U_{i_k}$

$\Rightarrow M \subseteq U_j \cup \bigcup_{k=1}^{n_0-1} U_k$ endl. Teilüberdeckung $\square$.