Blatt 6. Hausaufgaben

H1 Betrachte Fkt $f(t) = \cosh t$ für $t \in [-1,1]$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

Der Graph der Fkt wird parametrisiert durch die Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, $t \in [-1,1]$.

Satz 18.6 bzw. Bsp. 18.7(2) $\Longrightarrow$

Länge der Kettenlinie

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2 t}}_{\sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t} \, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \cosh t \, dt = \sinh t \Big|_{-1}^{1} = \sinh(1) - \sinh(-1) =$$

$$= 2\sinh(1)$$

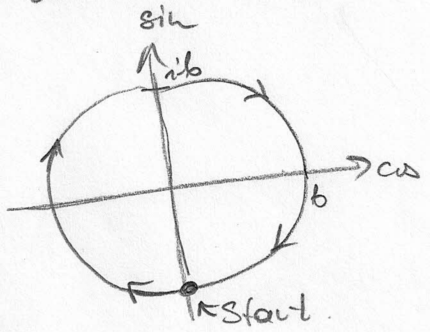
H2 Zykloide

a) zerlege die Bewegung in zwei Teilbewegungen

1. Bewegung des Mittelpunktes des Kreises.

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

2. Bewegung der Pfeilspitze relativ zum Mittelpunkt:



$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

Start d. Bewegung in $b \cdot e^{-\frac{\pi}{2} i}$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\gamma}}_{\mathbb{C}}(t) = b \cdot e^{i\cdot(-\frac{\pi}{2}-t)} \overset{\text{Euler}}{=}$$

$$= b\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}-t\right) + i \cdot \sin\left(-\tfrac{\pi}{2}-t\right)\right)$$

entspricht in $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} b \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}-t) \\ b \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \cdot \sin t \\ -b \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{zusammen: } \gamma(t) = \begin{pmatrix} t - b \cdot \sin t \\ 1 - b \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

(b) Länge des Zykloidenbogens:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - b\sin t \\ 1 - b\cos t \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - b\cdot\cos t \\ b\cdot\sin t \end{pmatrix}. \text{ für } b = 1 \text{ gilt:}$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t \underbrace{+\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4(-2)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = -8\cdot\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\Big) = 8.$$

(c) Skizze für $b = 1/2$ und $b = 1$.

H3 Kompaktheit der Mengen:

a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (|x|^4 + |y|^4)^{1/4} \leq 2\}$

= abg. Ball mit Radius 2 in $(\mathbb{R}^2, \|.\|_4)$

$\Rightarrow$ M abg. und beschränkt

$\Rightarrow$ M kompakt

b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - y^4 \leq 16\} \supseteq \underbrace{\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}}_{\text{unbeschränkt}}$

$\Rightarrow$ M ist unbeschränkt $\Rightarrow$ M nicht kompakt.

c) $SO(d) := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} : A \cdot A^T = I_d$ und $\det A = 1\}$

$= B_1 \cap B_2$

$B_1 := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} : \det A = 1\} = \det^{-1}(\{1\})$

Da $\{1\}$ abg. in $\mathbb{R}$ und $\det : \mathbb{R}^{d \times d} \to \mathbb{R}$ stetig, folgt: B_1 abg.

$B_2 = f^{-1}(\{I_d\})$, $f : \mathbb{R}^{d \times d} \to \mathbb{R}^d$, $f(A) = A \cdot A^T$ stetig

$\Rightarrow B_2$ abg.

Zusammen folgt: SO(d) abg.

SO(d) beschränkt:

Sei $A \in SO(d)$. Da $\mathbb{R}^{d \times d} \simeq \mathbb{R}^{d^2}$, betrachte $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ als Spalte $a \in \mathbb{R}^{d^2}$ mit d^2 reellwertigen Einträgen

$\Rightarrow \|a\|_\infty \hat{=} \max_{i \in \{1,\dots,d^2\}} |a_i| \hat{=}$ Der größte Betrag eines Eintrags der Matrix.

Da $A^T = A^{-1}$, bilden Spalten (so wie Zeilen) von A ein ON-System in $\mathbb{R}^d$, d.h. die Spalten von A sind gleich 1 in $\|.\|_2$.

$\Rightarrow$ Die Einträge der Spalten können alle <u>maximal</u> einen Betrag von 1 haben.

$\Rightarrow$ Die Einträge der Matrix A haben höchstens Betrag 1. $I \to i,j \rightsquigarrow$ alle Eintr. $\leq 1 \Rightarrow$ beschr. bzgl $\|.\|_\infty$.

$\Rightarrow \|a\|_\infty \leq 1$.

Äquiv. d. Normen $\Rightarrow$ $SO(d)$ beschränkt bzgl. $\|.\|_1$ (Spaltensummennorm).

$\Rightarrow SO(d)$ kompakt. $\square$

(H4) (X,d) metr. Raum, $A \subseteq X$

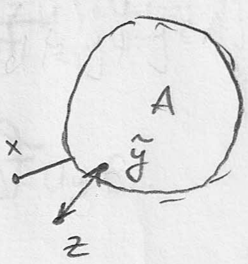
<u>Beh</u>: $d_A : X \to [0,\infty)$, $x \mapsto \inf\{d(x,y) : y \in A\}$ stetig.

<u>Bew</u>: zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall z \in X$ mit $d(x,z) < \delta$ gilt:

$$d\,|d_A(x) - d_A(z)| < \varepsilon.$$

Zu $x,z \in X$ sei $\varepsilon > 0$ geg. $\Rightarrow \exists\, \tilde{y} \in A$ mit $d(z,\tilde{y}) < d_A(z) + \varepsilon$

$\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\Rightarrow} d(x,\tilde{y}) \leq d(x,z) + d(z,\tilde{y}) < d(x,z) + d_A(z) + \varepsilon$



$\Rightarrow d_A(x) < d(x,\tilde{y}) \leq d(x,z) + d_A(z) + \varepsilon$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ gilt:

$d_A(x) \leq d(x,z) + d_A(z)$

$\Rightarrow d_A(x) - d_A(z) \leq d(x,z)$

Vertauschung von x,z liefert: $d_A(z) - d_A(x) \leq d(z,x) = d(x,z)$

$\Rightarrow |d_A(x) - d_A(z)| \leq d(x,z)$

$\Rightarrow d_A(\cdot)$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$. $\Rightarrow$ stetig. $\square$

H5 ⓐ $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}, K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ komp.

Beh: $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \simeq \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ komp

1. Möglichkeit:

$K_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}, K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ komp $\xRightarrow{\text{Heine-Borel}}$ K_1, K_2 abg., beschränkt.

$\xRightarrow[\text{A3.}]{\text{Blatt5.}}$ $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \simeq \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ abg. und beschr.

$\xRightarrow{\text{Heine-Borel}}$ $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ komp.

2. Möglichkeit: (mit Folgenkompaktheit)

Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_1 \times K_2$ eine Folge.

Dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_1$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_2$ Folgen.

$K_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$ komp $\Longrightarrow \exists$ konvergente TF $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Betrachte $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K_2$ Folge.

Da $K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ komp. $\Longrightarrow \exists$ konv. TF $(y_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\Longrightarrow (x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq K_1 \times K_2$ konvergiert.

$\xRightarrow{\text{17.18 (Folgenkomp)}}$ $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ komp. ✓

ⓑ $A \subseteq \mathbb{R}^d$

Beh: A komp $\Longleftrightarrow$ A vollst. und beschränkt.

„$\Rightarrow$": $A \subseteq \mathbb{R}^d$ komp $\xRightarrow{17.18}$ A vollst. und total beschr.

$\xRightarrow{17.17(2)}$ A vollst. und beschränkt ✓

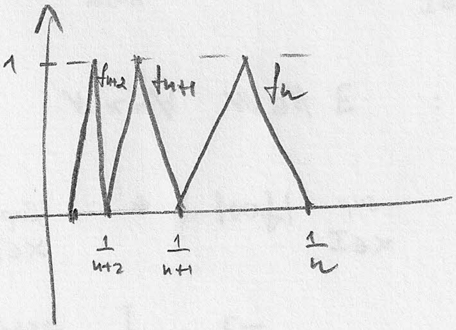
„$\Leftarrow$": $A \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt $\xRightarrow{17.17(3)}$ $A \subseteq \mathbb{R}^d$ total beschränkt

$\xRightarrow[17.18]{A\text{ vollst.}}$ A kompakt

□

H6*

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$



ⓐ $A := \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ beschränkt in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$,

da $\|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ⓑ z.z. A und die Einheitskugel $B = \{ f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1 \}$ sind <u>nicht</u> kompakt in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

<u>Zur Kompaktheit</u>: $M \subseteq X$ komp.:

(1) $\forall$ offene Überdeckung von $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt es endliche Teilüberdeck. $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$: $M = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$

(2) Folgenkompaktheit: Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ besitzt konvergente Teilfolge in M.

Bew. hier mit (2):

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in ⓐ ~~beliebig~~

<u>Ann</u>: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine konv. Teilfolge. $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$: $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine konv. Teilfolge in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \to \infty} 0 =: f(x)$

<u>Aber</u>: $\|f_{n_k} - f\|_\infty = \|f_{n_k}\|_\infty = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ↯ zu konv. TF.

(c) Satz v. Heine-Borel gilt <u>nicht</u> für unendlich dimensionale Räume!

(d) zz $\|.\|_1$ und $\|.\|_\infty$ sind <u>nicht</u> äquivalent auf $C[0,1]$.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx \leq 1\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n^2+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \not\leq c\cdot\|f_n\|_1 \quad \text{für ein } c>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$