Blatt 7: Hausaufgaben

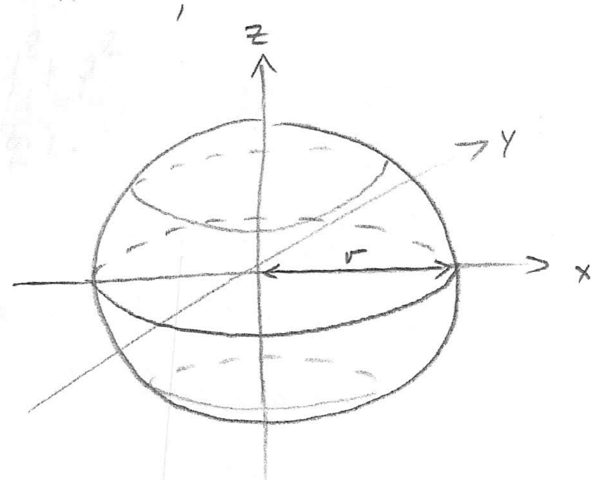
H1 Kugel $K_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$, $r>0$.

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq f(x)^2\}$$

mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| < r$.

18.8

$$\Rightarrow \text{Vol} = \pi \int_{-r}^{r} f(x)^2 \, dx =$$



$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx =$$

$$= \pi \cdot 2 \int_{0}^{r} r^2 - x^2 \, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = 2\pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

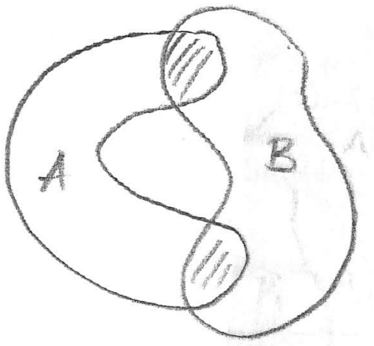
Allgemeine Formel: $\text{Vol}_d = \dfrac{2^d \cdot r^d \cdot \Gamma(1+\frac{1}{p})^d}{\Gamma(1+d/p)}$

mit: d : Dimension des Raumes (hier: 3)

p : die zugehörige Norm (hier Euklidische 2-Norm).

(H2) (a) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ zshd $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ zshd.

Gegenbsp:



(b) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ wegzshd $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ wegzshd

siehe (a).

(d) $GL(d, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{d \times d}$ nicht wegzshd.

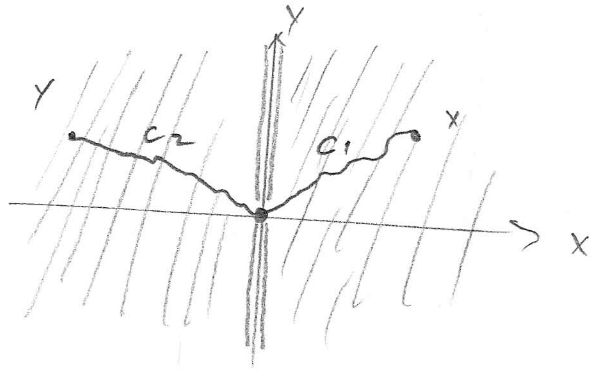
$$GL(d, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{d \times d} : \det A \neq 0 \} =$$
$$= \underbrace{\det^{-1}((-\infty, 0))}_{=: B_1 \neq \emptyset} \cup \underbrace{\det^{-1}((0, \infty))}_{=: B_2 \neq \emptyset}$$

$(0, \infty), (-\infty, 0)$ sind offen, det ist stetig

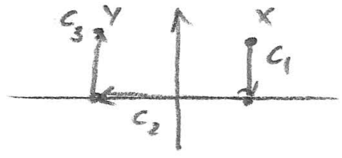
$\Rightarrow$ B_1, B_2 offen

Also: $GL(d, \mathbb{R})$ darstellbar als Vereinigung nicht leerer, disjunkter und offener Mengen $\Rightarrow$ $GL(d, \mathbb{R})$ nicht zshd.

(c)



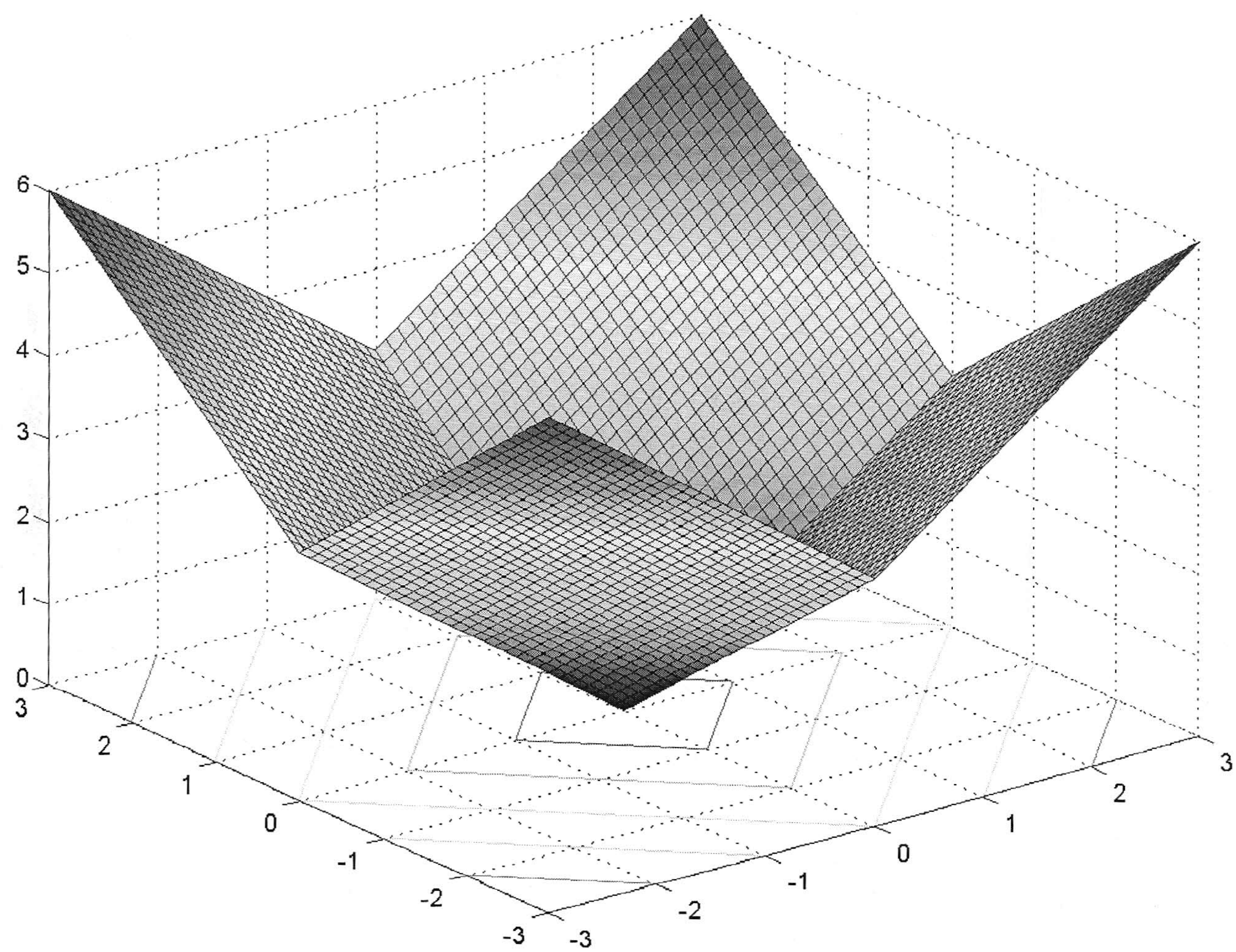
zu d.



(H3) $f(x,y) = |x| + |y| = \|x,y\|_1$

Nieveaumenge von f: $N_f(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 = c\}$

für $c > 0$.



H4 ⓐ $f(x,y,z) = y \cdot \sin(xz^2)$

Gradient von f:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\partial_x f(x,y,z),\ \partial_y f(x,y,z),\ \partial_z f(x,y,z)\right)$$

$$= \left(yz^2 \cdot \cos(xz^2),\ \sin(xz^2),\ 2xyz \cdot \cos(xz^2)\right)$$

ⓑ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

2. $(x,y) = (0,0)$

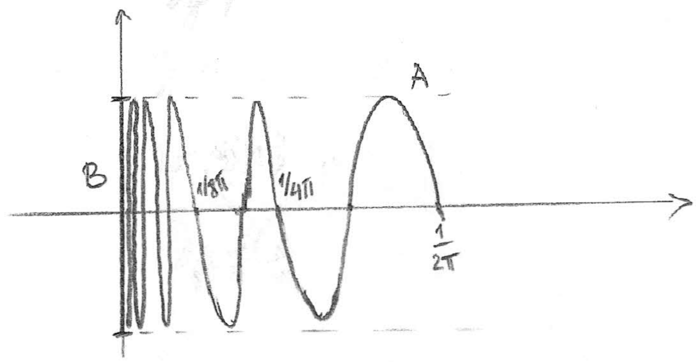
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{cases} (y^4 - x^2y^2,\ 2x^3y)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

H5 $\quad A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y = \sin\frac{1}{x}\}, \quad B := \{0\} \times [-1,1]$

(a) Skizze:



(b) A wegzshd:

Seien $p, q \in A$, d.h. $\exists\, x, y > 0$ mit $p = (x, \sin\frac{1}{x}),\ q = (y, \sin\frac{1}{y})$

OE: $x < y$: $c : [x,y] \longrightarrow A$ mit $c(t) := (t, \sin\frac{1}{t})$ ist ein Weg von p nach q, da c stetig ist und $c(x) = p$, $c(y) = q$.

B wegzshd:

Seien $p, q \in B$, d.h. $\exists\, x, y \in [-1,1]$ mit $p = (0,x),\ q = (0,y)$

OE $x < y$: $\quad c(t) = (0, yt + x(1-t)),\ t \in [0,1]$

Weg von p nach q

$\Rightarrow A, B$ zshd.

(c) $C := A \cup B$ zshd

zeige zunächst (*):

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } U \subseteq C \text{ offen und abg. in } C. \\ \text{Dann: entweder } A \cap U = \emptyset \text{ od. } A \subseteq U \\ \phantom{\text{Dann: }}\text{entweder } B \cap U = \emptyset \text{ od. } B \subseteq U \end{array} \right\}$

Dazu: Sei $U \subseteq C$ offen und abg in C.

Zwischenbemerkung: Sei (X,d) metr. R. und $Y \subseteq X$.

B offen $\Rightarrow B \cap Y \subseteq Y$ offen in Y

B abg. $\Rightarrow B \cap Y \subseteq Y$ abg. in Y

$\Rightarrow U \cap A$ offen und abg in A

$\overset{A \text{ zshd}}{\Longrightarrow} U \cap A = \emptyset$ oder $U \cap A = A$
$\Leftrightarrow A \subseteq U$

Aussage $\circledast$ für B folgt analog.

Also: $U \subseteq C$ offen & abg, $U \neq \emptyset$

Zz: $U = C$. Sei $x \in U$.

1. Fall: $x \in A \overset{\circledast}{\Longrightarrow} A \subseteq U \Rightarrow \left(\frac{1}{\pi k}, 0\right) \in A \subseteq U \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\overset{U \text{ abg.}}{\Longrightarrow} \underbrace{(0,0)}_{\in B} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{\pi k}, 0\right) \in U$

$\Rightarrow B \cap U \neq \emptyset \overset{\circledast}{\Longrightarrow} B \subseteq U \Rightarrow C = A \cup B \subseteq U$

2. Fall: $x \in B \overset{\circledast}{\Longrightarrow} B \subseteq U \Rightarrow (0,0) \in B \subseteq U$

$\overset{U \text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(0,0) \cap C \subseteq U$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \underbrace{\left(\frac{1}{\pi k}, 0\right)}_{\in A} \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \overset{\circledast}{\Longrightarrow} A \subseteq U$
$\Rightarrow U = C$

ⓓ $A \cup B$ nicht wegzshd

Ann: $A \cup B$ wegzshd.

$\Rightarrow \exists$ weg $\gamma: [0,1] \to C$ mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(1) = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$

Diese Abbildung ist also stetig

$\Rightarrow$ Projektionen $p_1 \circ \gamma$, $p_2 \circ \gamma$ sind stetig. $\left(p_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto x_i\right)$

alg. ZWS $\xRightarrow[18.13]{}$ Alle Werte zw. 0 und $\frac{1}{\pi}$ werden von $p_1 \circ \gamma$ angenommen; insbesondere die Werte $\frac{2}{(2n+1)\pi}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $p_2 \circ \gamma$ nimmt alle Werte $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$ an und somit in jeder Umgebung von 0 die Werte $+1$ und -1.

$\Rightarrow \nexists\ \delta > 0$ mit: $(p_2 \circ \gamma)([0, \delta[) \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Alle offenen Umgebungen von 0 in $[0,1]$ haben die Form $[0, \delta)$. $\Rightarrow$ c ist in 0 nicht stetig. $\lightning$.