Blatt 8 Hausaufgaben

H1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} &, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a f stetig und partiell diff'bar auf $\mathbb{R}^2$.

kritische Stelle $(x,y) = (0,0)$

Sei $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ mit $(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$

$$\Rightarrow \left|f(x_n,y_n) - f(0,0)\right| = \left|\frac{x_n \cdot y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right| \leq \frac{\max(|x_n|,|y_n|)^3}{\|(x_n,y_n)\|_2^2} =$$

$$= \frac{\|(x_n,y_n)\|_\infty^3}{\|(x_n,y_n)\|_2^2} \leq c^3 \cdot \frac{\|(x_n,y_n)\|_2^3}{\|(x_n,y_n)\|_2^2} = c^3 \cdot \|(x_n,y_n)\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\Rightarrow f$ stetig.

Blatt 7 (H4) $\Rightarrow$

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (y^4 - x^2y^2,\ 2x^3y) \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} &, (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) &, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f part. diff'bar (lt. Blatt 7)

b f diff'bar in $(0,0)$?

Ann: f diff'bar in $(0,0)$ $\Rightarrow$ Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}_{=0} + R(x,y) = R(x,y)$$

Aber: $\frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\!\!\!\!\!\!\!\!/\ \ \ \ 0$

zB. für $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

(H2) $f(x,y) := e^{xy} \cdot \cos(x+y)$.

Berechne Tangentialebene T_f für $(x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$

$T_f(0,\frac{\pi}{2}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - f(0,\frac{\pi}{2}) = \langle \nabla f(0,\frac{\pi}{2}), (x-0, y-\frac{\pi}{2}) \rangle \}$

$f(0,\frac{\pi}{2}) = e^0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$f_x(x,y) = y e^{xy} \cdot \cos(x+y) - e^{xy} \cdot \sin(x+y)$

$f_x(0,\frac{\pi}{2}) = 0 - 1 = -1$

$f_y(x,y) = x e^{xy} \cos(x+y) - e^{xy} \sin(x+y)$

$f_y(0,\frac{\pi}{2}) = -1$

$\Rightarrow T_f(0,\frac{\pi}{2}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 0 = \langle (-1,-1), (x, y-\frac{\pi}{2}) \rangle \}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \pi/2 \}$.

(H3) $f(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

Beh: f genügt der Wärmeleitungsgl.:

$$f_t = \frac{1}{2} f_{xx}$$

$f_x(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-x^2/2t} \cdot \left(-\frac{2x}{2t}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot t^{3/2}} \cdot x \cdot e^{-x^2/2t}$

$f_{xx}(t,x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot t^{3/2}} \cdot e^{-x^2/2t} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} \cdot x \cdot e^{-x^2/2t} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}t}\right) =$

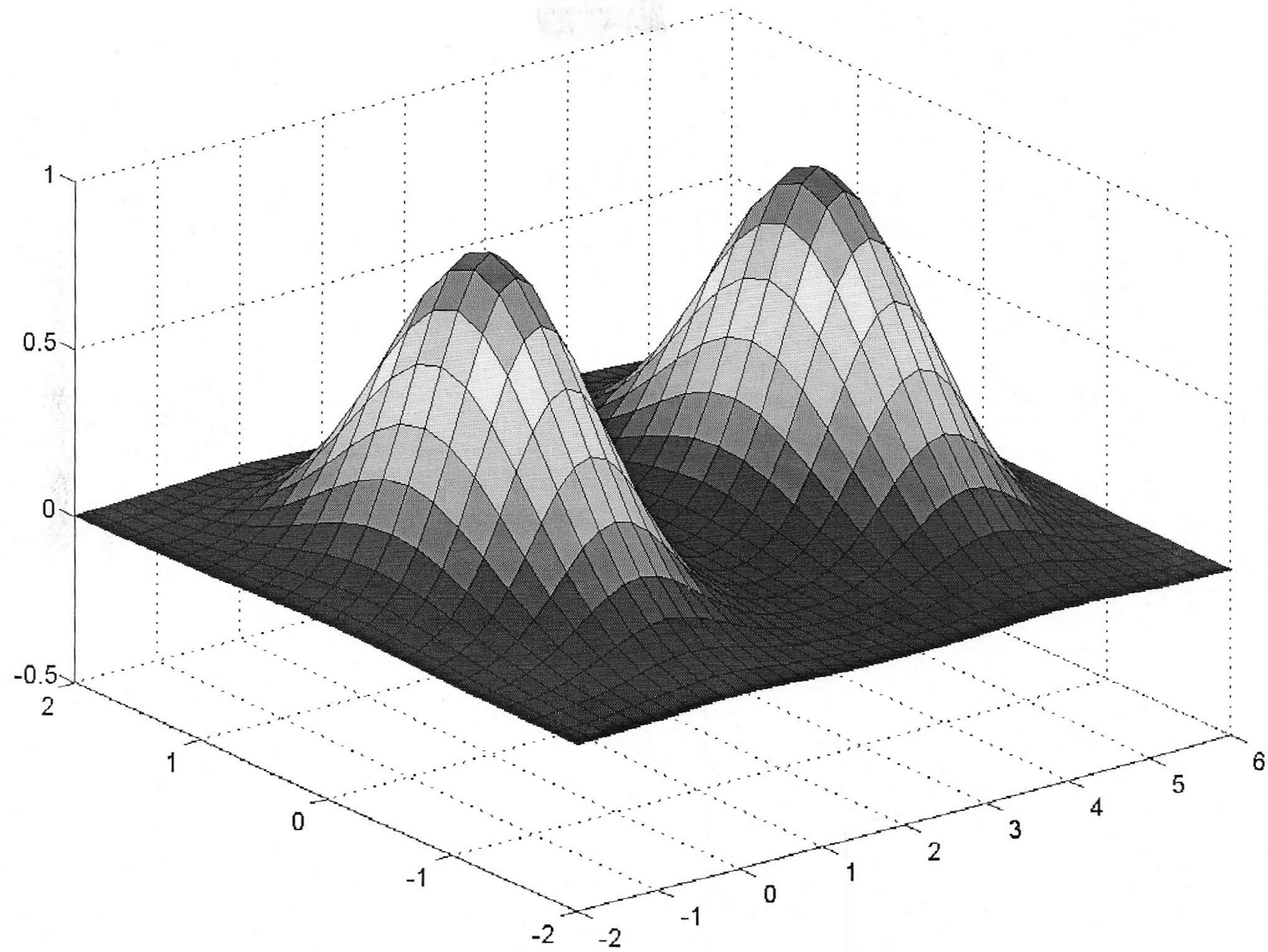
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot t^{3/2}} \cdot e^{-x^2/2t} \left(\frac{x^2}{t} - 1\right)$

$f_t(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot e^{-x^2/2t} + \frac{1}{t^{1/2}} \cdot e^{-x^2/2t} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot -\frac{1}{t^2} \right) =$

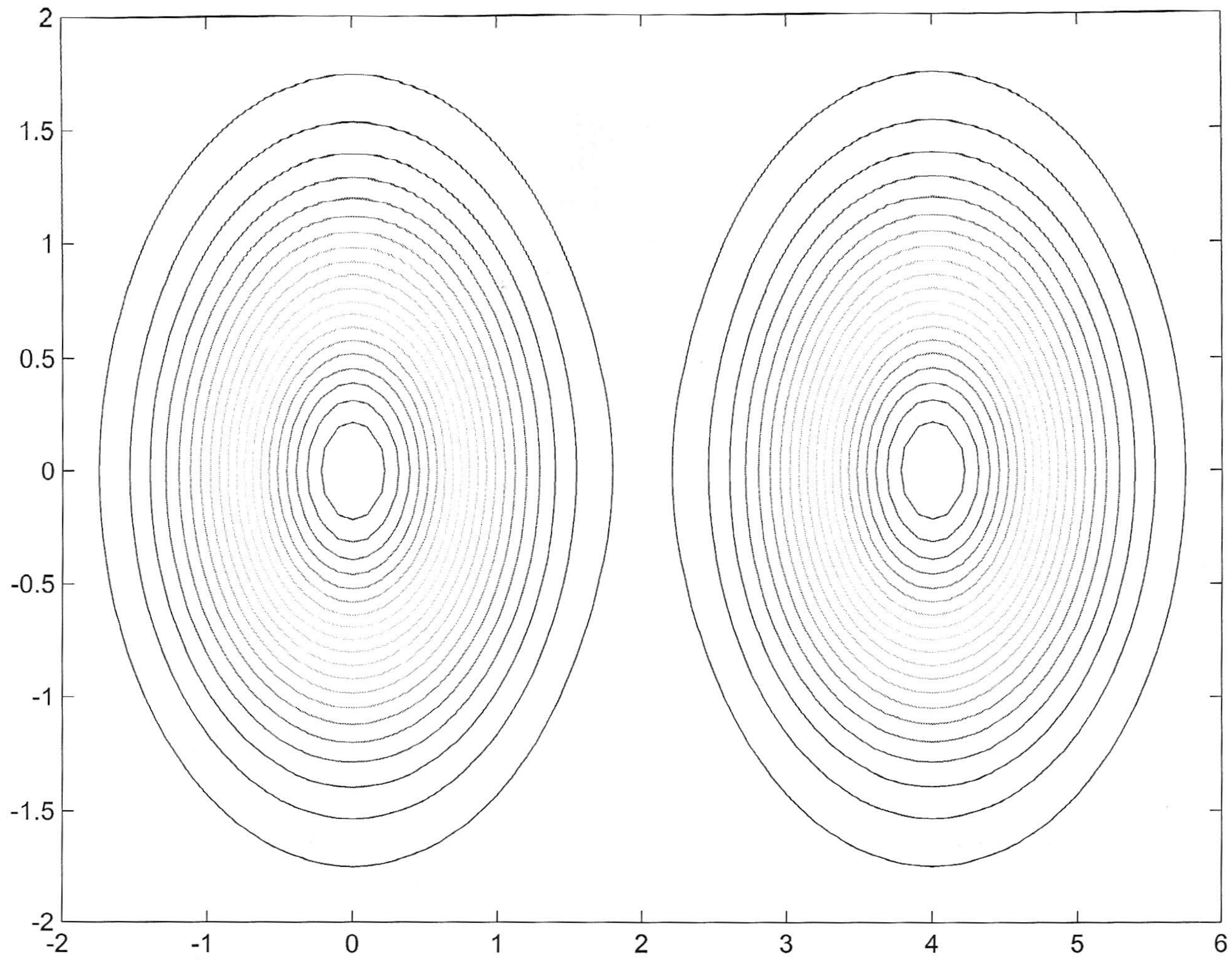
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}} \cdot e^{-x^2/2t} + \frac{1}{t^{5/2}} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x^2/2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} e^{-x^2/2t} \cdot \left(-1 + \frac{x^2}{t}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

$= 1/2 f_{xx}$ ✓

(H4) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} + e^{-((x-4)^2+y^2)}$



3


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

(H5) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ist (total) diff'bar auf $\mathbb{R}^2$.

Zeige: $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, d.h. stetig part. diff'bar.

$(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+y^2)^{1/2} - x^3 \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2+y^2)^{1/2} - x^4 \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\cancel{0 \cdot \sqrt{x^2+y^2}} - x^3 \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{-x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$(x,y) = (0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{|h| h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{cases} (f_x(x,y), f_y(x,y)) & , (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & , (x,y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow f \text{ part. diff'bar.}$$

zeige noch: $\nabla f(.,.)$ stetig auf $\mathbb{R}^2$

"Kritischer" Punkt $(x,y) = (0,0)$.

Sei $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$

$$|f_x(x_n, y_n) - f_x(0,0)| = \left| \frac{2x_n^4 + 3x_n^2 y_n^2}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} - 0 \right| \leq$$

$$\leq \frac{5 \cdot \max(|x_n|, |y_n|)^4}{\|x_n, y_n\|_2^3} \underset{\exists C > 0}{\leq} 5 \cdot C \frac{\|(x_n, y_n)\|_2^4}{\|(x_n, y_n)\|_2^3} = 5 C \cdot \|x_n, y_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

✓

$$|f_y(x_n, y_n) - f_y(0,0)| = \left| \frac{-x_n^3 y_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} - 0 \right| \leq$$

$$\leq \frac{\|x_n, y_n\|_\infty^4}{\|x_n, y_n\|_2^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\Rightarrow \nabla f(x_n, y_n) \to \nabla f(0,0) \Rightarrow$ stetigkeit $\Rightarrow$ Bch.

$\square$

H6*

$U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei in $(x,y) \in U$ differenzierbar. Dann folgt (z.B. mit Kettenregel), dass auch $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$ in $(x,y) \in U$ differenzierbar ist. Zum Zeitpunkt der Aufgabenstallung war die (mehrdimensionale) Kettenregel jedoch noch nicht bekannt, daher gehen wir wie folgt vor:
Nach Voraussetzung gilt für $(h_1, h_2) \to 0$:

$$\frac{R_f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - \langle \mathrm{grad} f(x,y), (h_1,h_2)\rangle}{\|(h_1,h_2)\|} \to 0.$$

Weiterhin ist g mit Methoden aus Analysis I partiell differenzierbar und es gilt $\mathrm{grad} g(x,y) = -\frac{1}{f^2(x,y)} \mathrm{grad} f(x,y)$. Betrachte daher:

$$\begin{aligned}
\frac{R_g(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} &= \frac{\frac{1}{f(x+h_1,y+h_2)} - \frac{1}{f(x,y)} + \frac{1}{f^2(x,y)}\langle \mathrm{grad} f(x,y), (h_1,h_2)\rangle}{\|(h_1,h_2)\|} \\
&= \frac{f(x,y) - f(x+h_1,y+h_2) + \langle \mathrm{grad} f(x,y), (h_1,h_2)\rangle}{\|(h_1,h_2)\| \cdot f(x+h_1,y+h_2) f(x,y)} \\
&\quad + \Big(\frac{1}{f^2(x,y)} - \frac{1}{f(x+h_1,y+h_2)f(x,y)}\Big) \cdot \frac{\langle \mathrm{grad} f(x,y), (h_1,h_2)\rangle}{\|(h_1,h_2)\|} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $(h_1,h_2) \to 0$, wegen obiger Voraussetzung, der Stetigkeit von f in (x,y) und der Beschränktheit von

$$\left| \frac{\langle \mathrm{grad} f(x,y), (h_1,h_2)\rangle}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} \right| \le |f_x(x,y)| + |f_y(x,y)| = \|\mathrm{grad} f(x,y)\|_1.$$

Also ist g in (x,y) (total) differenzierbar.