Blatt 9

H1

$f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \Rightarrow T_k f(x,a) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} d^l f(a)(x-a)$ Taylor-Polynom der Ordn. l

$d^l f(x)(h) := \sum_{i_1,\dots,i_l = 1,\dots,n} \partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f(x)\cdot h_{i_1}\cdots h_{i_l}$ Differential l-ter Ordnung.

(a) $f(x,y) = \cos(xy)$, $\left(T_3 f(x,y,(1,1))\right) = T_{3,(1,1)} f(x,y) = ?$

$f_x(x,y) = -y\cdot\sin(xy)$

$f_y(x,y) = -x\cdot\sin(xy)$

$f_{xx}(x,y) = -y^2\cdot\cos(xy)$

Schwarz

$f_{xy}(x,y) = -\sin(xy) - xy\cdot\cos(xy) \overset{\downarrow}{=} f_{yx}(x,y)$

$f_{yy}(x,y) = -x^2\cdot\cos(xy)$

$f_{xxx}(x,y) = y^3\cdot\sin(xy)$

Schwarz auf f_x:

$f_{xxy}(x,y) = -2y\cdot\cos(xy) + xy^2\cdot\sin(xy) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y)$

$f_{xyy}(x,y) = -x\cdot\cos(xy) - x\cdot\cos(xy) + x^2y\cdot\sin(xy) = f_{yxy}(x,y)$

$f_{yyy}(x,y) = x^3\cdot\sin(xy) \qquad = f_{yyx}(x,y)$

$\Rightarrow T_{3,(1,1)} f(x,y) = \cos(1) - \sin(1)(x-1) - \sin(1)\cdot(y-1)$

$- \cos(1)(x-1)^2 - 2(\sin(1) + \cos(1))\cdot(x-1)(y-1) - \cos(1)(y-1)^2$

$+ \sin(1)(x-1)^3 + 3\cdot(-2\cdot\cos(1) + \sin(1))\cdot(x-1)^2(y-1) +$

$+3(-\cos(1) - \cos(1) + \sin(1))\cdot(x-1)(y-1)^2 + \sin(1)\cdot(y-1)^3$

(b) $f(x,y) = x^y = e^{y\ln(x)}$, $x,y>0$

$f_x(x,y) = x^y \cdot \frac{y}{x}$

$f_y(x,y) = x^y \cdot \ln x$

$f_{xy}(x,y) = x^y \ln x \cdot \frac{y}{x} + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^y \cdot \frac{y\ln x + 1}{x} = f_{yx}(x,y)$

$f_{xx}(x,y) = x^y \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{x} - x^y \cdot \frac{y}{x^2} = x^y\left(\frac{y^2-y}{x^2}\right)$

$f_{yy}(x,y) = x^y \ln x \cdot \ln x = x^y (\ln x)^2$

$f_{xxx}(x,y) = x^y \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{y^2-y}{x^2} + x^y \cdot (-2)\frac{y^2-y}{x^3} = x^y \cdot \frac{y^3-y^2-2y^2+2y}{x^3} =$

$= x^y \cdot \frac{y^3-3y^2+2y}{x^3}$

$f_{xxy}(x,y) = x^y \ln x \cdot \frac{y^2-y}{x^2} + x^y \cdot \frac{1}{x^2}(2y-1) =$

$= x^y \cdot \frac{\ln x \cdot (y^2-y) + 2y - 1}{x^2} = f_{xyx}(\ldots) = f_{yxx}(\ldots)$

$f_{yyx}(x,y) = x^y \cdot \frac{y}{x}(\ln x)^2 + x^y \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} =$

$= x^y\left(\frac{y}{x}(\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = f_{yxy}(\ldots) = f_{xyy}(\ldots)$

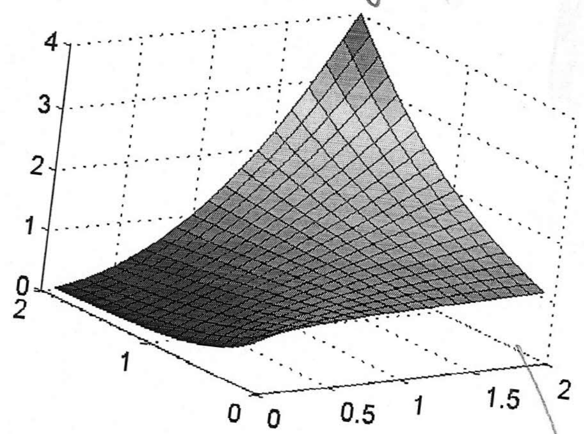
$f_{yyy}(x,y) = (\ln x)^2 \cdot \ln x \cdot x^y = (\ln x)^3 \cdot x^y$

$\Rightarrow T_{3,(1,1)}f(x,y) = 1 + 1\cdot(x-1) + 0(y-1) + 1(x-1)(y-1) +$

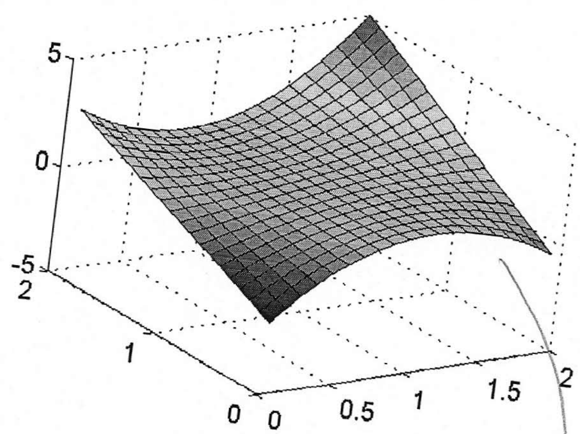
$+ 1\cdot(x-1)^2(y-1)\cdot 3 + 0\cdot(x-1)(y-1)^2\cdot 3 + 0(y-1)^3 =$

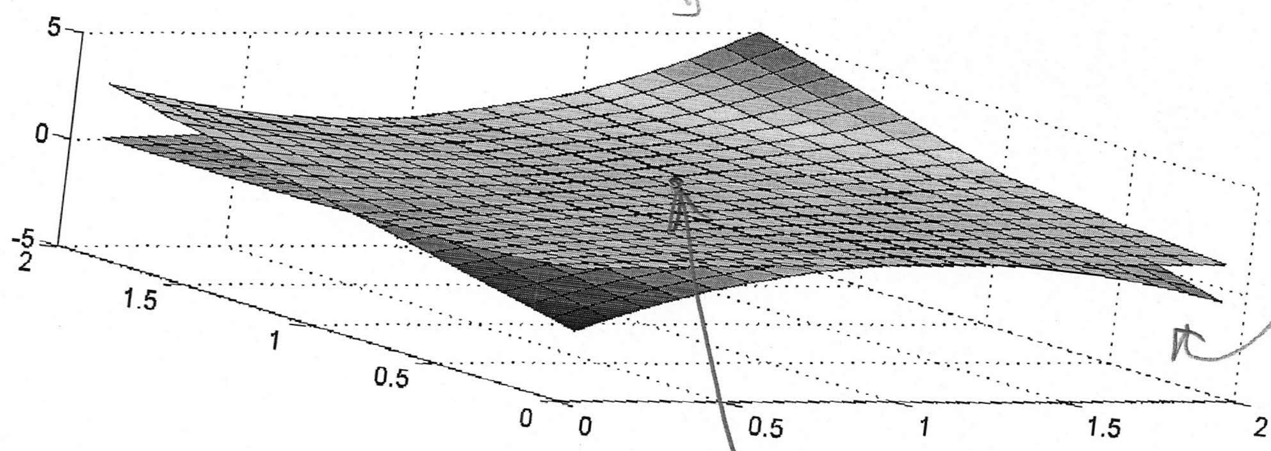
$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + 3(x-1)^2(y-1)$

$f(x,y) = x^y$



$T_{3,(1,1)}\, f(x,y)$





$f(1,1) = T_{3,(1,1)}\, f(1,1)$.

(H2) $f(x,y) = x^2 e^y \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (2xe^y, x^2e^y)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix}$, $\det Hf(x,y) = \ldots = -2x^2e^{2y} \leq 0$.

Lemma 20.8 (3) (Hurwitz-Krit):

$Hf(x,y)$ pos. def. $\Leftrightarrow$ $2e^y > 0$ und $\det Hf(x,y) > 0$ $\lightning$

$Hf(x,y)$ neg. def $\Leftrightarrow$ $2e^y < 0$ und $\det Hf(x,y) > 0$ $\lightning$

$Hf(x,y)$ indefinit $\Leftrightarrow$ $\det Hf(x,y) < 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Betrachte $x=0, y \in \mathbb{R}$:

$\Rightarrow \nabla f(0,y) = (0,0)$ kritischer Punkt.

$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,y)$ pos. semi-definit.

und $Hf(x,y)$ nie neg. semi-def.

$\Rightarrow$ Bei $(0,y)$ liegt ein lok. Min. oder Sattelpunkt vor.

Betrachte f:

$f(0,y) = 0$, $f(x,y) = x^2e^y > 0 \quad \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (0,y)$ ist lok. Minimum $\forall y \in \mathbb{R}$.

(H3) $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2) =$

$= y^2 - 3x^2 y + 2x^4$

$\nabla f(x,y) = (-6xy + 8x^3,\ 2y - 3x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 = 6xy \\ 3x^2 = 2y \end{cases}$ $\quad 8x^3 = 3x \cdot 3x^2$

$\Leftrightarrow 8x^3 = 9x^3$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 0$

D.h. $(0,0)$ ist ein kritischer Punkt ($\nabla f(0,0) = 0$)

Hesse-Matrix:

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit ($\Rightarrow$ keine Aussage möglich!)

Extremum in $(0,0)$?

$g(x) := f(x,0) = 2x^4 \rightarrow$ lok. Min in $x=0$

$h(x) := f(x, 1{,}5x^2) = (1{,}5x^2 - x^2)\cdot(1{,}5x^2 - 2x^2)$

$= -0{,}25x^2 \rightarrow$ lok. Max. in $x = 0$.

$\Rightarrow (0,0)$ ist kein lok. Extremum.

(b) Zeige: $\forall\ h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ gilt:

$\varphi_h(t) := f(th_1, th_2)$ hat in 0 lok. Minimum.

$\uparrow$ Gerade durch den Ursprung.

$\varphi_h(t) = f(th_1, th_2) = t^2 h_2^2 - 3t^3 \cdot h_1^2 h_2 + 2t^4 \cdot h_1^4$

$\varphi_h'(t) = 2th_2^2 - 9t^2 h_1^2 h_2 + 8t^3 h_1^4$

$\varphi_h'(0) = 0$

$\varphi_h''(t) = 2h_2^2 - 18t\,h_1^2 h_2 + 24t^2 h_1^4$

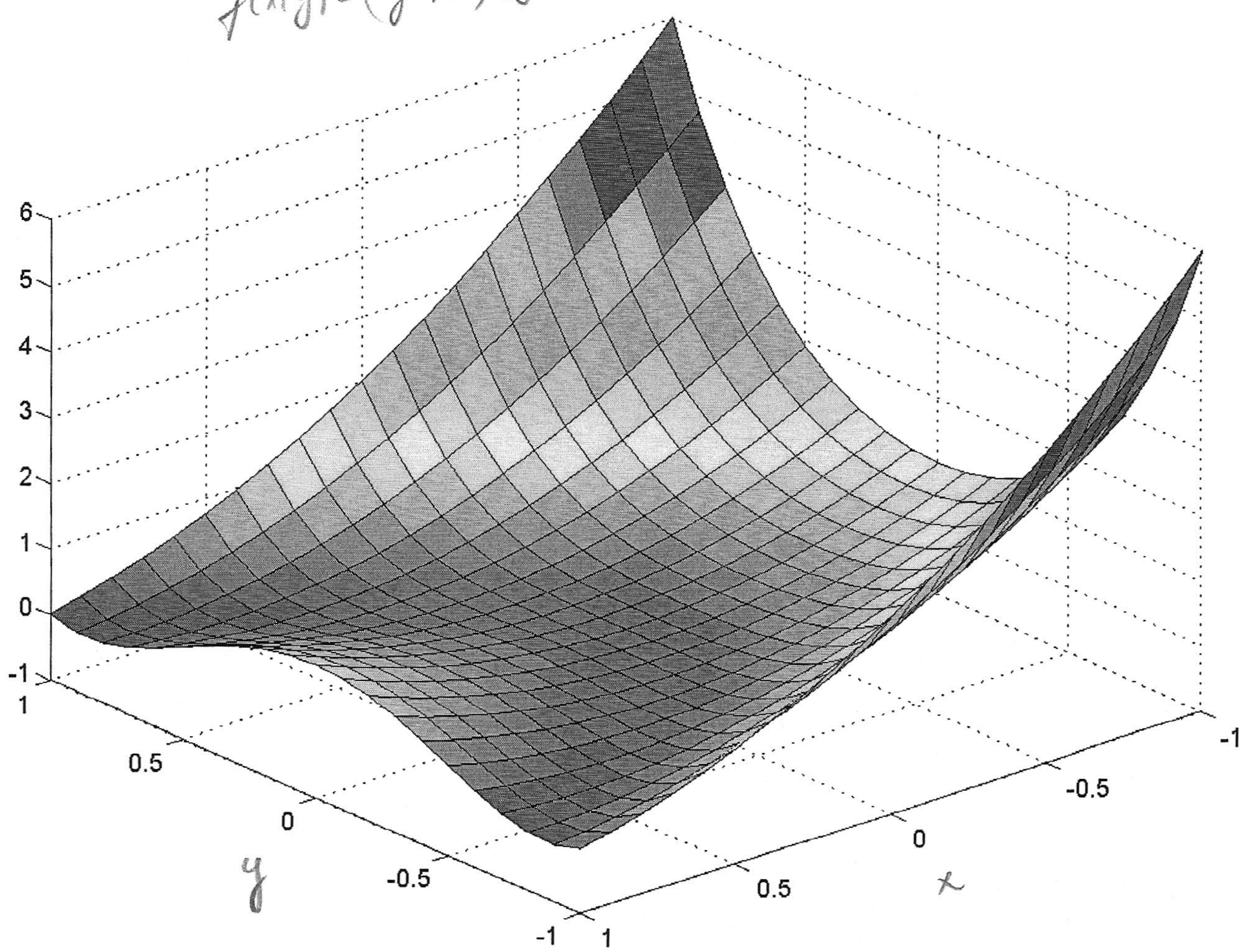
$\varphi_h''(0) = 2h_2^2 \geq 0$

Für $h_2 \neq 0$: $\varphi_h''(0) > 0 \Rightarrow t=0$ ist lok. Min.

Für $h_2 = 0 \;(\Rightarrow h_1 \neq 0)$: $\varphi_h(t) = 2t^4 h_1^4 \Rightarrow t=0$ ist lok. Min

$\square$

$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$



(H6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen reicht es, eine partielle Ableitung zu betrachten, z.B. gilt für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Für $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$ ist aber:

$f_x(x_n,y_n) = 2 \cdot \frac{1}{n} \sin(n) - \cos(n)$ nicht konvergent.

$\Rightarrow$ part. Ableitungen sind nicht stetig.

Dennoch existiert:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)}_{\in [-1,1]} = 0$$

$\overset{\text{Symmetrie}}{\Longrightarrow}$ $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}_{=0} + R(x,y) = R(x,y),$$

wobei für $(x,y) \to (0,0)$ gilt:

$$\frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \xrightarrow{(x,y) \to (0,0)} 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ total diff'bar.

$\square$

(H4) $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{r} \|x - z_k\|_2^2 \to \min! \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (x_j - z_{k,j})^2$$

Argumentation mit glob. Min. möglich.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{r} 2(x_i - z_{k,i}) \quad \Rightarrow \nabla f(x) = \sum_{k=1}^{r} 2(x - z_k)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\ell}(x) = \begin{cases} 2 \cdot r, & i = \ell \\ 0, & i \neq \ell \end{cases} \quad \Rightarrow Hf(x) = 2r \cdot I_{n \times n} \text{ pos. definit.}$$

$$\nabla f(x) = 0 \iff 2rx = 2\sum_{k=1}^{r} z_k \iff x^* = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^{r} z_k \text{ lok. Min!}$$

Da für $\|x\| \to \infty$ gilt: $f(x) \to \infty$ und x^* einziges Extremum ist
$\Rightarrow x^*$ ist <u>glob</u> Minimum.

(H5) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

<u>Beh</u>: $\Delta(fg) = f \cdot \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \cdot \Delta f$

$$\Delta(fg)(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(fg)(x_1 \dots x_n) =: \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(fg)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \cdot g + f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(fg) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f\right) g + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g\right) + f\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g\right)$$

$$\Rightarrow \Delta(fg)(x_1 \dots x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1 \dots x_n)\right) g(x_1 \dots x_n) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\dots) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(\dots) +$$

$$+ f(x_1 \dots x_n) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(\dots) =$$

$$= \Delta f(x_1 \dots x_n) \cdot g(x_1 \dots x_n) + 2\langle \nabla f(\dots), \nabla g(\dots) \rangle + \Delta g(\dots) f(\dots)$$

7 3

(H7*) Fasse $A = (a_{ij})_{i,j=1..n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n^2}$ (durch Verklebung der Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$) auf.

Laplace-Entwicklung nach der j-ten Spalte $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A'_{kj}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij}),$$

da die für $k = 1 \dots n$ aus A durch Streichung der k-ten Zeile und j-ten Spalte entstandenen Matrizen A'_{kj} unabhängig von a_{ij} sind. $H := (h_1, \dots, h_n)$

$$\Rightarrow d \det(A)(H) = \langle \nabla \det(a_1, \dots, a_n), (h_1, \dots, h_n) \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_{kj}} \det(A) \cdot h_{kj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} h_{kj} \cdot \det(A'_{kj}) \overset{\text{Laplace-Entw. n. j-ten Spalte } h_j}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$\square$