Blatt 10, Hausaufgaben

H1 $f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$

(a) $G: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit $G(y,z) := \int_0^y f(x,z)\,dx$

Beh: G ist stetig part. diff'bar

- Für festes $y \in [0,1]$ ist $z \mapsto G(y,z)$ laut A5, Blatt 9 stetig diff'bar mit

$$\frac{\partial}{\partial z} G(y,z) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial z} f(x,z)\,dx$$

- Für festes $z \in [0,1]$ ist $y \mapsto G(y,z)$ stetig diff'bar nach HDI mit:

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y,z) = f(y,z)$$

$$\Rightarrow \nabla G(y,z) = \left(f(y,z), \int_0^y \frac{\partial}{\partial z} f(x,z)\,dx \right)$$

(b) $H(y) := \int_0^y f(x,y)\,dx$, $y \in [0,1]$

Bestimme $H'(y)$ mit Kettenregel.

Betrachte die stetig diff'bare Kurve $\alpha: [0,1] \to [0,1]^2$:

$\alpha(y) = (y,y)$ mit $\dot{\alpha}(y) = (1,1)$. $\Rightarrow H(y) = G(\alpha(y))$

$\xRightarrow{\text{Kettenregel}}$ $H'(y) = \langle \nabla G(y,y), \dot{\alpha}(y) \rangle =$

$$= f(y,y) \cdot 1 + \left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx \right) \cdot 1$$

$$= f(y,y) + \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$$

(c) (i) $H_1(y) = \int_0^y e^{-xy^2}\,dx \quad , \quad y \in [0,1]$

1. Mögl. $H_1'(y) = e^{-y^3} + \int_0^y -2xy\cdot e^{-xy^2}\,dx =$

$= e^{-y^3} - 2y \cdot \int_0^y x \cdot e^{-xy^2}\,dx \overset{P.I}{=}$

$= e^{-y^3} - 2y \cdot \left[x \cdot \left(\frac{-1}{y^2}\right) \cdot e^{-xy^2} \Big|_{x=0}^{y} - \int_0^y \left(\frac{-1}{y^2} e^{-xy^2}\right) dx \right]$

$= e^{-y^3} - 2y \left[-\frac{1}{y} e^{-y^3} + \frac{1}{y^2} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot e^{-xy^2} \Big|_0^y \right]$

$= e^{-y^3} + 2e^{-y^3} + \frac{2}{y^3}\left(e^{-y^3} - 1\right) = 3e^{-y^3} + \frac{2}{y^3}\left(e^{-y^3} - 1\right)$

2. Mögl. $H_1(y) = \int_0^y e^{-xy^2}\,dx = -\frac{1}{y^2} e^{-xy^2} \Big|_0^y =$

$= -\frac{1}{y^2} e^{-y^3} + \frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow H_1'(y) = 2 \cdot \frac{1}{y^3} e^{-y^3} - \frac{1}{y^2} \cdot (-3y^2) \cdot e^{-y^3} - \frac{2}{y^3} =$

$= 3e^{-y^3} + \frac{2}{y^3}\left(e^{-y^3} - 1\right)$

(ii) $H_2(y) := \int_0^y e^{-x^2y^2}\,dx$ nicht in geschlossener Form darstellbar.

Ableitung nur über Parameterintegrale möglich:

$H_2'(y) = e^{-y^4} + \int_0^y -2x^2 y\, e^{-x^2y^2}\,dx =$

$= e^{-y^4} - 2y \int_0^y x \cdot x e^{-x^2y^2}\,dx \overset{P.I}{=}$

$= e^{-y^4} - 2y \cdot \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2y^2} e^{-x^2y^2}\right) \Big|_{x=0}^{y} - \int_0^y -\frac{1}{2y^2} e^{-x^2y^2}\,dx \right]$

$= 2e^{-y^4} - \frac{1}{y} \cdot H_2(y)$ Differentialgl'g (DGL).

(H2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x(1-y), xy)$

(a) f ist stetig partiell diff'bar mit

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix}$, $\det J_f(x,y) = x - xy + xy = x$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist f lokal umkehrbar.

(b) offensichtlich gilt $f((0,\infty)\times(0,1)) \subseteq (0,\infty)^2$

Sei $(u,v) \in (0,\infty)^2$ bel. Dann:

$(u,v) = f(x,y) \iff \begin{cases} u = x - xy \\ v = xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = u+v \in (0,\infty) \\ y = \frac{v}{x} = \frac{v}{u+v} \in (0,1) \end{cases}$

Also besitzt jedes $(u,v) \in (0,\infty)^2$ ein eindeutiges Urbild $(x,y) \in (0,\infty)\times(0,1)$.

$\Rightarrow f: (0,\infty)\times(0,1) \to (0,\infty)^2$ ist bijektiv $\square$

(H3) $g: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $g(z) := \frac{1}{z}$

(a) Setze $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

$\Rightarrow g(z) = g(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

Identifiziere also g mit $f: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ mit

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,-y)$

(b)

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-1(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} -x^2+y^2 & -2xy \\ 2xy & -x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Für Spalten von J_f gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -(x^2-y^2) \\ 2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2xy \\ -(x^2-y^2) \end{pmatrix} \right\rangle = 2xy(x^2-y^2) - 2xy(x^2-y^2) = 0.$$

$\Rightarrow$ J_f ist vielfaches einer orthog. Matrix $\Rightarrow$ f ist konform.

<u>Ferner</u>: $\det J_f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left((x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2\right) =$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \cdot (x^2+y^2)^2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

$\Rightarrow$ f ist orientierungstreu konform.

(H4) $f(x,y) = y(x-1)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$. Untersuche f auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$

$f_x(x,y) = ye^{-(x^2+y^2)} + y(x-1)\cdot(-2x)\cdot e^{-(x^2+y^2)} =$

$= ye^{-(x^2+y^2)}\cdot(1-2x^2+2x)$

$f_y(x,y) = (x-1)e^{-(x^2+y^2)} + y(x-1)\cdot(-2y)e^{-(x^2+y^2)} =$

$= (x-1)e^{-(x^2+y^2)}\cdot(1-2y^2)$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y(1-2x^2+2x) = 0 & \text{I} \\ 1-2y^2 = 0 & \text{II} \end{cases}$ ($x=1 \Rightarrow y=0$ $\not\in$ zu Def.-Bereich).

$\text{II} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin (0,\infty)\right)$

$\text{I} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2x^2+2x) = 0 \iff x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\left(x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \notin (0,\infty)\right)$

$\Rightarrow$ Kritische Stelle auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$: $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =: (x_{max}, y_{max})$

Untersuche die Hesse-Matrix:

$f_{xx}(x,y) = (-4x+2)\cdot y\cdot e^{-(x^2+y^2)} + (1-2x^2+2x)y(-2x)e^{-(x^2+y^2)}$

$= e^{-(x^2+y^2)}\cdot y\cdot(4x^3-4x^2-6x+2)$

$$f_{xy}(x,y) = (1-2x^2+2x)\left(e^{-(x^2+y^2)} + y(-2y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}\right) =$$

$$= (1-2x^2+2x)\, e^{-(x^2+y^2)}\cdot(1-2y^2) = f_{yx}(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) = (x-1)\cdot\left[(-2y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2) + e^{-(x^2+y^2)}(-4y)\right]$$

$$= (x-1)\cdot(4y^3-6y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} (4x^3-4x^2-6x+2)\cdot y & (1-2x^2+2x)(1-2y^2) \\ (1-2x^2+2x)(1-2y^2) & (x-1)(4y^3-6y) \end{pmatrix}$$

Setze $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ein:

$$\Rightarrow H_f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix} \Rightarrow H_f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ist}$$

negativ definit.

$\Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ist ein lok. Maximum

Untersuche Rand:

- Betrachte $g(x) := f(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,\infty)$

Sei $\varepsilon > 0$, $x < 1 \Rightarrow f(x,\varepsilon) = \underbrace{\varepsilon}_{>0} \underbrace{(x-1)}_{<0} \cdot \underbrace{e^{-(x^2+\varepsilon^2)}}_{>0} < 0 = f(x,0)$

$\Rightarrow$ In jedem $(x,0) \in [0,1) \times \{0\}$ ist ein lok. Maximum.

Sei $\varepsilon > 0$, $x > 1 \Rightarrow f(x,\varepsilon) > 0 = f(x,0)$

$\Rightarrow$ In jedem $(x,0) \in (1,\infty) \times \{0\}$ ist ein lok. Minimum

$\Rightarrow$ Für $x = 1$ gilt:

$$f(1-\varepsilon,\delta) \leq f(1,0) \leq f(1+\varepsilon,\delta) \qquad \forall \varepsilon,\delta > 0.$$

D.h. $(1,0)$ ist ein Sattelpunkt

- Betrachte $h(y) := f(y,0) = -y e^{-y^2} : [0,\infty) \to (-\infty, 0]$

$h'(y) = -e^{-y^2} - y e^{-y^2}(-2y) = e^{-y^2}(-1+2y^2) \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0,\infty)}{\Rightarrow} y^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist ein Kandidat für ein Extremum.

$f(0,\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-1/2} \approx -0,43$, $\quad (0,\frac{\sqrt{2}}{2}) := (x_{min}, y_{min})$.

Da für $(x,y) \in [0,\infty)^2 : \|x,y\| \to \infty$ gilt: $f(x,y) \nearrow 0$:

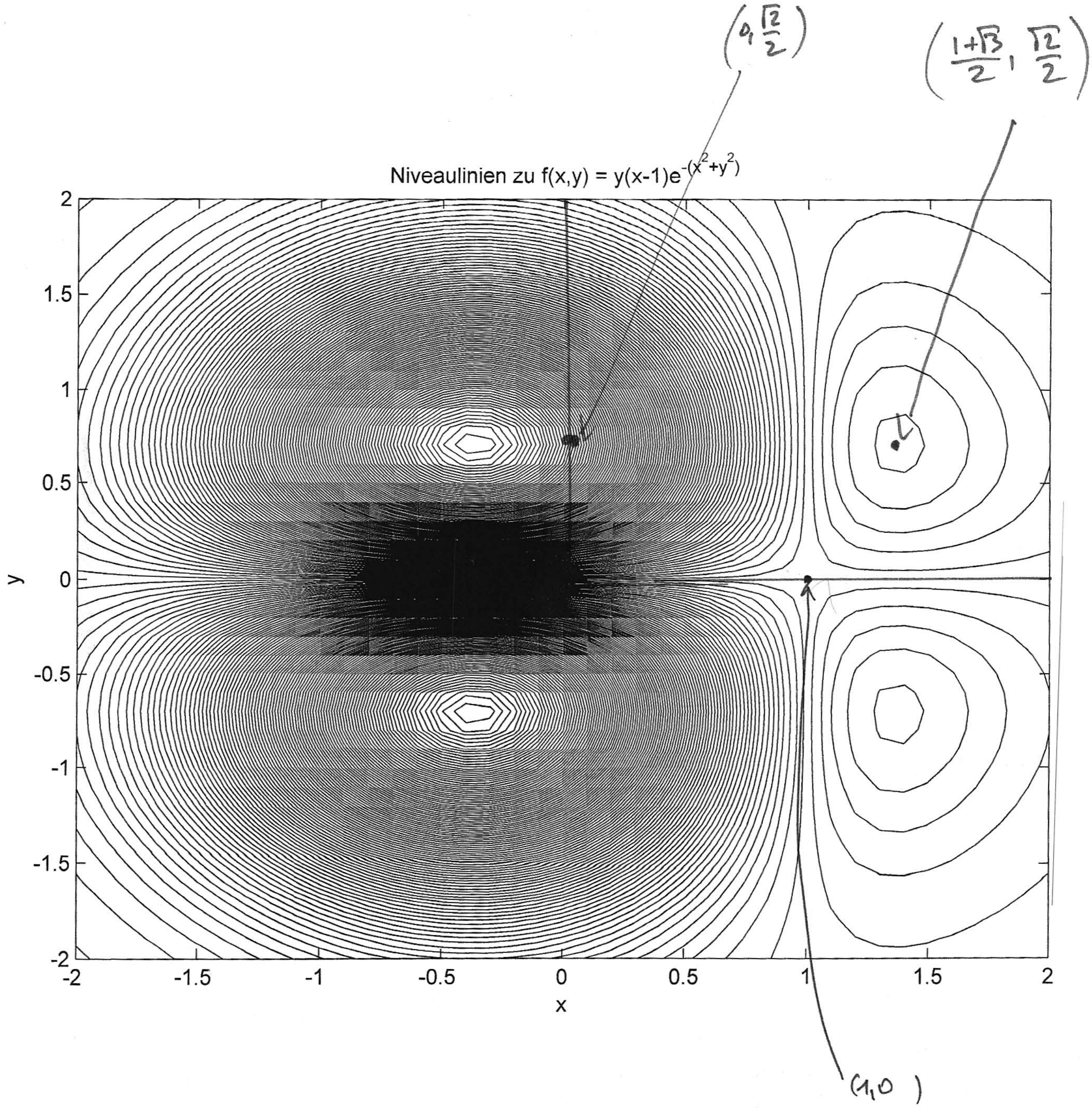
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 : |f(x,y)| < \varepsilon \quad \forall (x,y) \in [0,\infty)^2 \setminus (0,M]^2$,

d.h. außerhalb von $[0,M]^2$ gibt es keine Punkte (x,y) mit: $f(x,y) > f(x_{max}, y_{max})$ oder $f(x,y) < f(x_{min}, y_{min})$

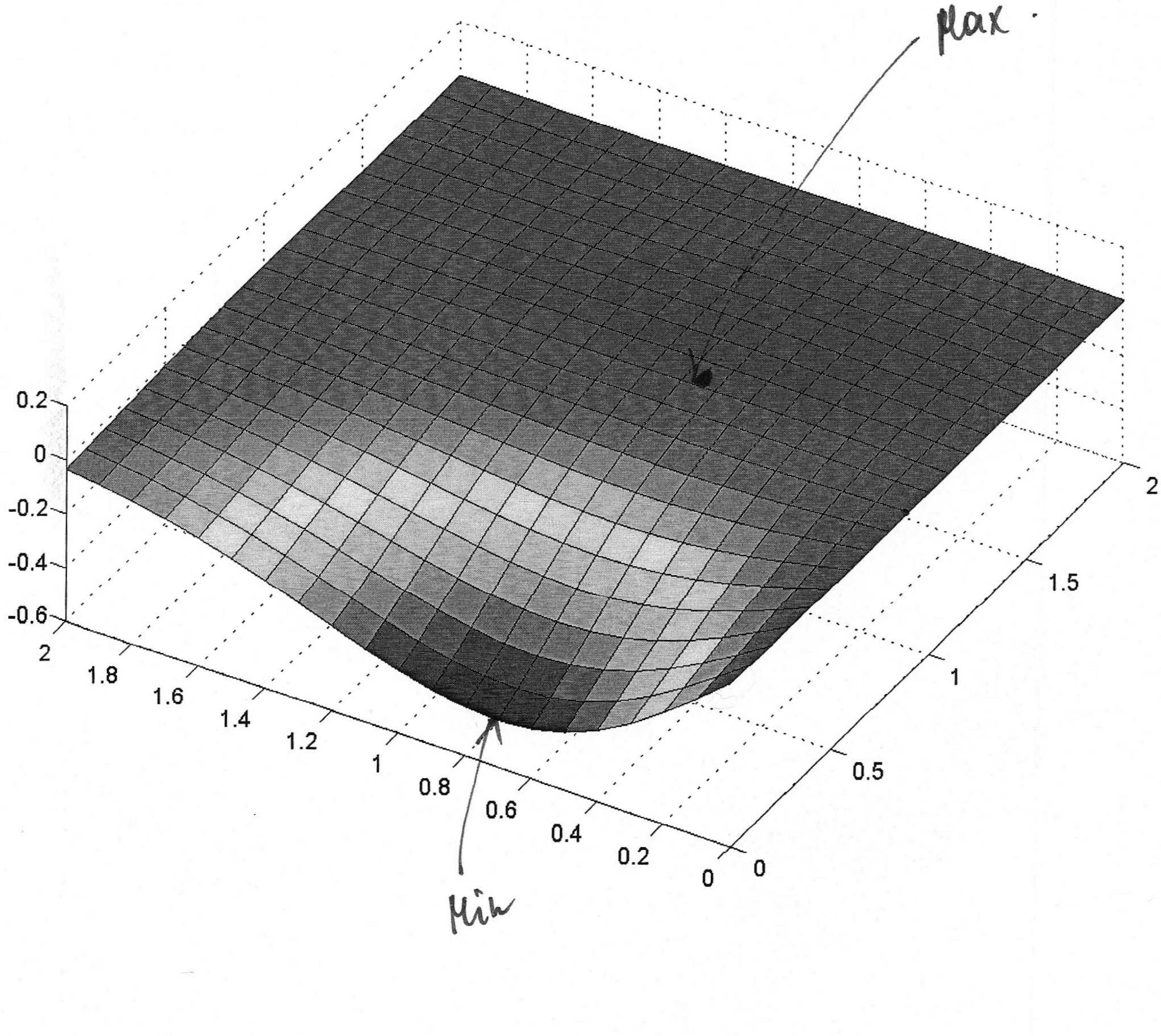
Da f stetig ist, nimmt sie auf $[0,M]$ ihr Minimum und Maximum an, d.h. es gibt glob. Extrema.

Da (x_{min}, y_{min}) der einzige Kandidat für ein Extremum mit $f(x_{min}, y_{min}) < 0$ ist $\Rightarrow (x_{min}, y_{min})$ ist glob. Min.

Analog: (x_{max}, y_{max}) ist glob. Max.



Niveaulinien zu f(x,y) = y(x-1)e^{-(x^2+y^2)}
y
x
-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2
$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$(1,0)$


Max
Min
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2

(H5) Elliptische Koordinaten

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh u \cdot \cos v \\ \sinh u \cdot \sin v \end{pmatrix}$

(a) $J_f(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh u \cdot \cos v & -\cosh u \cdot \sin v \\ \cosh u \cdot \sin v & \sinh u \cdot \cos v \end{pmatrix} =$

$= c \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \cdot \sinh u \cdot \cos v & -\frac{1}{c} \cosh u \cdot \sin v \\ \frac{1}{c} \cosh u \cdot \sin v & \frac{1}{c} \cdot \sinh u \cdot \cos v \end{pmatrix}$

mit $c := \sinh^2 u \cdot \cos^2 v + \cosh^2 u \cdot \sin^2 v$

(b) $\Rightarrow J_f(u,v)$ ist ein Vielfaches einer Orthog. Matrix,

denn: $\left\langle \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \sinh u \cdot \cos v \\ \cosh u \cdot \sin v \end{pmatrix}, \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -\cosh u \cdot \sin v \\ \sinh u \cdot \cos v \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ und

$\left\| \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \sinh u \cdot \cos v \\ \cosh u \cdot \sin v \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{c} (\sinh^2 u \cdot \cos^2 v + \cosh^2 u \cdot \sin^2 v) = 1$

$\Rightarrow f$ ist konform.

f lok. umkehrbar ?

$\det J_f(u,v) = \sinh^2 u \cdot \cos^2 v + \underbrace{\cosh^2 u}_{>0} \cdot \sin^2 v = 0$

$\Leftrightarrow u = 0$ und $v = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, \pi k) : k \in \mathbb{Z}\}$ offen

$\Rightarrow \forall (u,v) \in M$ ist f mit 21.12 lok umkehrbar.

(c) Für $(u,v) \in M$ gilt:

$J_{f^{-1}}(f(u,v)) \overset{21.10}{=} (J_f(u,v))^{-1} \overset{\text{Lin A}}{=} \frac{1}{\det J_f(u,v)} \cdot J_f(u,v)^T$