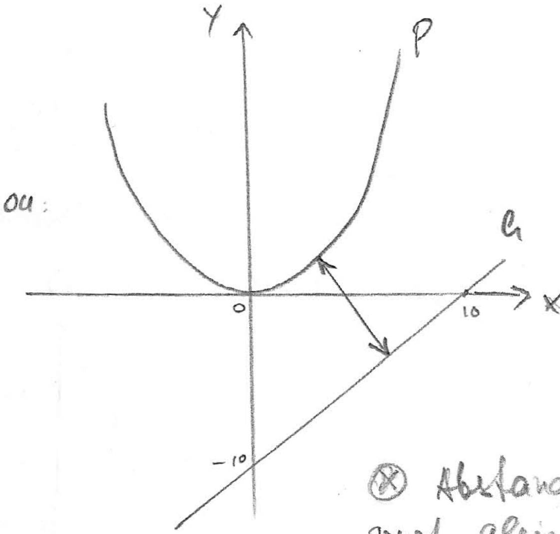
Blatt 12 Hausaufgaben

H1 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$

$G = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ v = u - 10\}$.



Gesucht ist das Minimum von:

$F(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$

(Abstandsfkt.)

⊗ Abstand $\neq 0$, sonst gleichsetzen $\Rightarrow$ ↯.

unter NB:

$$g(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,u,v) \\ g_2(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ v - u + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_g(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ hat Rang 2.

Lagrange-Ansatz:

$$\nabla F(x,y,u,v) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,u,v) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x,y,u,v), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$\Longleftrightarrow (2(x-u),\ 2(y-v),\ -2(x-u),\ -2(y-v)) = (2x\lambda_1,\ -\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \lambda_2)$

3&4. Komp. $\Rightarrow 2(x-u) = \lambda_2 = -2(y-v) = 2v - 2y \overset{NB}{=} 2u - 20 - 2y$ (*)

2. Komp $\Rightarrow 2(y-v) = -\lambda_1 = -\lambda_2$ (**)

1. Komp. $\Rightarrow 2(x-u) = 2x \cdot \lambda_1 \overset{(*)}{=} \lambda_2 \overset{(**)}{=} \lambda_1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$, da $\lambda_1 \neq 0$, sonst $y = v$ nach (**) und $x = u$ nach (*). ↯ zu ⊗.

1.NB. $\Rightarrow y = \frac{1}{4}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} 1 - 2u = 2u - 20 - \frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow 4u = 21{,}5$

$\Longleftrightarrow u = 43/8$

2.NB $\Rightarrow v = u - 10 = \frac{43-80}{8} = -37/8$

$\Rightarrow$ Abstand wird minimiert für: $P \ni (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $G \ni (u,v) = \left(\frac{43}{8}, -\frac{37}{8}\right)$

der eukl. Abstand beträgt: $\sqrt{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{43}{8}; -\frac{37}{8}\right)} = \frac{1}{8}\sqrt{39^2 + 35^2} \approx 6{,}55$

H2

a) Maximiere $F(x_1 \ldots, x_n) = x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2 \geq 0$ unter NB:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 \leq 0$$

① Lokale Extrema im Inneren:

$$\nabla F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2x_i \cdot \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1..n}} x_j^2 = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n \quad \Rightarrow x_k = 0 \text{ für ein } k \in \{1..n\}.$$

$$\Rightarrow F(x_1, \ldots, \underset{\substack{k\text{-te Stelle} \\ \downarrow}}{0}, \ldots, x_n) = 0$$

das ist glob. Minimum

und damit nicht relevant $\forall k \in \{1..n\}$.

② Extrema auf dem Rand

Lagrange: $2x_i \cdot \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1..n}} x_j^2 = \lambda \cdot 2x_i, \quad \forall i = 1 \ldots n, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\overset{x_i \neq 0}{\Longleftrightarrow} \lambda = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1..n}} x_j^2 \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n \Longleftrightarrow \lambda x_i^2 = \prod_{j=1}^n x_j^2 \quad \forall i \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} x_i^2 = \frac{1}{\lambda} \prod_{j=1}^n x_j^2 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow x_1^2 = \ldots = x_n^2 \overset{NB.}{=} \frac{1}{n}$$

Also ist F unter NB. maximal $\left(\frac{1}{n}\right)^n$

b) (i) Wenn $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, folgt aus a): $x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}}_{\text{geom. Mittel}} \leq \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot (\underbrace{x_1^2 + \ldots + x_n^2}_{=1})}_{\text{arith. Mittel}}$$

(ii) Wenn $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = a > 0$, setze $y_i^2 = \frac{x_i^2}{a} \Rightarrow y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$

$$\overset{(i)}{\Rightarrow} \sqrt[n]{y_1^2 \cdot \ldots \cdot y_n^2} \leq \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{\frac{x_1^2}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n^2}{a}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2} \leq \frac{1}{n} \cdot a = \frac{1}{n} \cdot (x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

(H3) $z^3+4z-x^2+xy^2+8y-7=0$

$h(z):=z^3+4z$ ist str. mon. stg., da $h'(z)=3z^2+4>0\ \forall z$.

D.h. h ist injektiv und h ist surjektiv nach ZWS.

$\Rightarrow$ h ist bijektiv

$\Rightarrow \exists!$ Lösung $f(x,y)=z=h^{-1}(x^2-xy^2-8y+7)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

wobei h^{-1} die Inverse von h ist, auch str. mon. stg.

<u>Extrema von</u> f: (Satz ü. impl. Fkt $\Rightarrow f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ und auch $\mathcal{C}^\infty$).

Da f str. mon. stg. hat f dort Extrema, wo

$g(x,y)=x^2-xy^2-8y+7$ Extrema hat.

D.h. $\nabla g(x,y)=(2x-y^2,-2xy-8)\overset{!}{=}(0,0)$

$$\begin{cases} \text{I} & y^2=2x \\ \text{II} & -2xy=8 \end{cases} \quad \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}y^2$$

$\overset{\text{I}}{\Rightarrow} -\frac{1}{2}y^2y=4 \Rightarrow y^3=-8 \Rightarrow y=-2$

$\overset{\text{I}}{\Rightarrow} x=2$

Kritische Stelle $(2,-2)$.

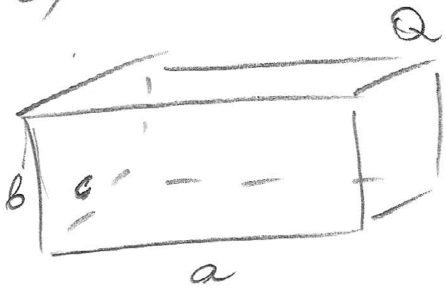
$Hg(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -2y\\ -2y & -2x\end{pmatrix} \Rightarrow Hg(2,-2)=\begin{pmatrix}2 & +4\\ +4 & -4\end{pmatrix}$, $\det Hg(2,-2)=$
$=-8-16=-32$

g indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum

H4 Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Seiten der Längen $a, b, c > 0$

hat Volumen: $V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$ und

Oberfläche $F(a,b,c) = 2(ab + bc + ac)$



minimiere $F(a,b,c)$ unter

NB: $g(a,b,c) = abc - 1 = 0$

⊗

Lagrange:

$\nabla F(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \big(2(b+c), 2(a+c), 2(a+b)\big) = \lambda \cdot (bc, ac, ab)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{I} & b+c = \frac{bc}{2} \\ \mathrm{II} & a+c = \frac{ac}{2} \\ \mathrm{III} & a+b = \frac{ab}{2} \end{cases}$$

$\mathrm{I} - \mathrm{II} \Rightarrow b - a = \frac{bc - ac}{2} = \frac{c}{2}(b-a)$

$\Rightarrow b = a$ oder $c = 2$.

($\lightning$, sonst II: $a + 2 = a$
$\Rightarrow 2 = 0$)

$\mathrm{I} - \mathrm{III} \Rightarrow a = c$ od $b = 2$ $\lightning$

$\mathrm{II} - \mathrm{III} \Rightarrow c = b$ od. $a = 2$ $\lightning$

NB. $\Rightarrow$ $a = b = c = 1$ ist einziger Kand. mit $F(1,1,1) = 6$

Betrachte z.B. Punkt $(a, 2b, c/2)$ mit

$V(a, 2b, c/2) = a \cdot 2b \cdot c/2 = abc = 1$ aber

$F(a, 2b, c/2) = 2(a2b + bc + ac/2) \overset{a=b=c=1}{=} 7 > 6 = F(a,b,c)$

$\Rightarrow (1,1,1)$ glob. Min!

⊗ OE Schränke Def. Bereich auf $[\varepsilon, M]^3$, $\varepsilon > 0$, $M < \infty$, denn für $a \to \infty$ (analog b, c) folgt: $F(a,b,c) \to \infty$

H5 DGL: $y' + y \cdot \cos x = 0$.

a) Schreibe DGL: $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $f(x) = -\cos x$

$g(y) = y$

stetige Fkt'en.

23.5 $\Rightarrow$ getrennte Variable

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz$$

$$\Leftrightarrow \int_{\tilde{y}}^{y} \frac{1}{z}\, dz = -\int_{\tilde{x}}^{x} \cos z\, dz \quad , \quad \tilde{x} \in \mathbb{R},\ \tilde{y} = y(\tilde{x})$$

$$\ln|y| = \ln y - \ln \tilde{y} = -\sin x + \sin \tilde{x}$$

$$\Rightarrow y = \tilde{y} \cdot e^{-\sin x + \sin \tilde{x}} = \tilde{y} \cdot e^{\sin \tilde{x}} \cdot e^{-\sin x} =: c \cdot e^{-\sin x}$$

$c \in \mathbb{R}$ konst.

b) AWP: $x_0 = 0$, $y_0 = y(x_0) = 1$

$$(*) \Rightarrow 1 = c \cdot e^{-\sin(0)} = c \cdot 1 \Rightarrow c = 1$$

$\Rightarrow$ Lösung von AWP: $\begin{cases} y' + y \cdot \cos x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ist:

$$y(x) = e^{-\sin x}$$