Blatt 13

(H1) DGL: $y' + 2 \cdot \frac{y}{x} = x^a$, $x > 0, a \in \mathbb{R}$.

d.h. $y' = a(x)y + b(x)$, $a(x) = -\frac{2}{x}$, $b(x) = x^a$

(a) Homogener Fall: $y'(x) = a(x) \cdot y(x)$

$$\Rightarrow y(x) = c \cdot e^{\int a(x)dx} = c \cdot e^{-2 \cdot \ln x} = c \cdot e^{\ln x^{-2}} = c \cdot x^{-2}$$

Partikuläre Lsg. des inhomogenen Systems:

Ansatz: VdK (Satz 23.12)

$$y(x) = (u(x) + c) \cdot e^{A(x)} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Dabei A Stammfkt. von a, u Stammfkt von $e^{-A(x)} \cdot b(x)$.

$$A(x) = \ln x^{-2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\int e^{-\ln x^{-2}} \cdot x^a dx + c\right) \cdot e^{\ln x^{-2}} =$$

$$= \left(\int x^{a+2} dx + c\right) \cdot x^{-2} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{x^{a+3}}{a+3} + c\right) \cdot x^{-2} & , a \neq -3 \\ (\ln x + c) x^{-2} & , a = -3 \end{cases}$$

(b) AWP: $y(1) = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \begin{cases} \frac{1}{a+3} + c & , a \neq -3 \\ c & , a = -3 \end{cases} \Rightarrow c = \begin{cases} c = \frac{-1}{a+3} & , a \neq -3 \\ c = 0 & , a = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung des AWP's: } y(x) = \begin{cases} \frac{x^{a+3} - 1}{a+3} \cdot x^{-2} & , a \neq -3 \\ \ln x \cdot x^{-2} & , a = -3 \end{cases}$$

(H2) <u>AWP</u>: $y' = \dfrac{y-x}{1+y-x}$, $y(0)=1$

<u>Ansatz</u>: $z(x) := y(x) - x + 1 \Rightarrow z'(x) = y'(x) - 1$

sowie $y(x) = z(x) + x - 1$, $y'(x) = z'(x) + 1$

<u>DGL in z</u>: $z' + 1 = \dfrac{z-1}{z} = 1 - \dfrac{1}{z}$

$\Rightarrow z' = -\frac{1}{z} \cdot 1 = f(z) \cdot g(x)$ Tol.V $\Rightarrow$

$\int -z \, dz = \int 1 \, dx + C$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} z^2 = x + C \Rightarrow z^2 = -2x - 2c$

$\Rightarrow z = \pm \sqrt{-2x-2c}$

$\Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{-2x-2c} + x - 1$

<u>AW</u>: $y(0) = \pm \sqrt{-2c} - 1 \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow$ Nur VZ + möglich $\Rightarrow c = -2$

$\Rightarrow y(x) = \sqrt{4-2x} + x - 1$

$\Rightarrow$ max. Def. bereich: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$.

(H3) (D) $\dot{x}(t) = F(x(t))\ , t \in \mathbb{R}$

(a) Sei x eine Lsg. von (D), Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ fest.
Definiere $y(t) := x(t+t_0)\ , t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y'(t) = x'(t+t_0) \overset{(D)}{=} F(x(t+t_0)) = F(y(t))\ \forall t$

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Definiere $y(t) = c \cdot x(t)$
$\Rightarrow y'(t) = (c \cdot x(t))' = c \cdot x'(t) \overset{(D)}{=} c \cdot F(x(t)) = c \cdot F(\frac{1}{c} \cdot y(t)) \overset{(*)}{=} F(y(t))$

(*) Gilt, falls $F(c \cdot x) = c \cdot F(x)\ \forall x, c \in \mathbb{R}$.

(H4) (*) $\dot{x}(t) = t^n \cdot x(t) + e^{at}\ , n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$.

(*) ist eine lineare Dgl. 1. Ord. mit Inhomogenität $b(t) = e^{at}$

1. Homogener Fall: (H) $\dot{x}(t) = t^n \cdot x(t)$
$\Rightarrow \varphi_c(t) = c \cdot e^{\int t^n dt} = c \cdot e^{\frac{t^{n+1}}{n+1}}\ , c \in \mathbb{R}$
ist Lsg. von (H).

2. Inhomog. Fall mit Vark:

Ansatz: $x(t) = \varphi(t) \cdot u(t)$ mit $\varphi(t) = \varphi_1(t) = e^{t^{n+1}/n+1}$
$\Rightarrow$
$\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t) \cdot u(t) + \varphi(t) \cdot \dot{u}(t) = t^n \cdot x(t) + e^{at}$
$= t^n \cdot \varphi(t) u(t) + e^{at}$
$\Leftrightarrow t^n \cdot \varphi(t) \cdot u(t) + e^{at} \overset{(H)}{=} t^n \cdot \varphi(t) \cdot u(t) + \varphi(t) \cdot \dot{u}(t)$
$\Rightarrow \varphi(t) \cdot \dot{u}(t) = e^{at} \Rightarrow \dot{u}(t) = \frac{1}{\varphi(t)} e^{at}$
$\Rightarrow u(t) = \int_0^t \frac{e^{as}}{\varphi(s)} ds + c =$
$= \int_0^t \exp(as - \frac{s^{n+1}}{n+1}) ds + c$

$$\Rightarrow \quad x_c(t) = \varphi(t) \cdot \int_0^t \exp\left(as - \frac{s^{n+1}}{n+1}\right) ds + c \cdot \varphi(t)$$

sind Lsg!en der DGL. (*).