Hausaufgaben, Blatt 14

H1 AWP's

(a) $y'(t) = \frac{-t}{y(t)}$, $y(0) = y_0 > 0$

$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$ mit $f(t) = -t$, $t \in I = \mathbb{R}$

$g(y) = \frac{1}{y}$, $y \in J =]0, \infty[$

$$F(t) = \int_0^t -s \, ds = -\frac{t^2}{2}$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(z)} \, dz = \int_{y_0}^{y} z \, dz = \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2)$$

$$G(\varphi(t)) = F(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left((\varphi(t))^2 - y_0^2\right) = -\frac{1}{2} t^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(t)^2 = y_0^2 - t^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = \pm \sqrt{y_0^2 - t^2}$$

Da $y_0 > 0$ löst $\varphi(t) = \sqrt{y_0^2 - t^2}$ das AWP

Existenzintervall der Lösung ist $]-y_0, y_0[$

(b) $y'(t) = e^{y(t)} \cdot \sin t \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$ mit $f(t) = \sin t, \; t \in I := \mathbb{R}$

$g(t) = e^{y}, \; y \in J = \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_0^t \sin s \, ds = 1 - \cos t$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} e^{-z} \, dz = e^{-y_0} - e^{-y}$$

$$G(\varphi(t)) = F(t)$$

$$\Leftrightarrow \; e^{-y_0} - e^{-\varphi(t)} = 1 - \cos t$$

$$\Leftrightarrow \; e^{-\varphi(t)} = e^{-y_0} - 1 + \cos t$$

$$\Leftrightarrow \; \varphi(t) = -\ln(e^{-y_0} - 1 + \cos t)$$

$$e^{-y_0} - 1 + \cos t > 0$$

$$\Leftrightarrow \; \cos t > 1 - e^{-y_0}$$

Existenzintervall d. Lösung hängt vom Anfangswert y_0 ab:

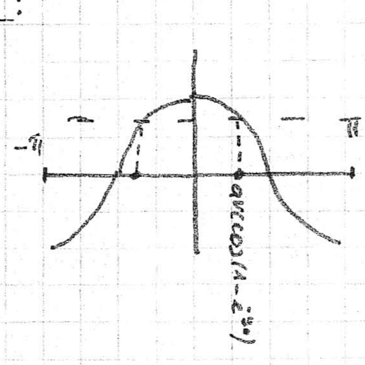
- $1 - e^{-y_0} < -1$
  $\Leftrightarrow$ $y_0 < -\ln 2$: φ existiert auf ganz $\mathbb{R}$

- $1 - e^{-y_0} = -1 \Leftrightarrow y_0 = -\ln 2$:
  $\cos t > -1$
  φ existiert auf $]-\pi, \pi[$

- $1 - e^{-y_0} > -1 \Leftrightarrow y_0 > -\ln 2$:
  $\cos t > 1 - e^{-y_0}$

  φ existiert auf:

  $]-\arccos(1 - e^{-y_0}), \arccos(1 - e^{-y_0})[$



(c) $\quad y'(t) = (y(t))^3 \quad , \; y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

Fall 1: $\quad y_0 = 0 \implies y \equiv 0$ Lösung $(\tilde{I} = \mathbb{R})$

Fall 2: $\quad y_0 > 0 \implies$

$$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t)) \quad \text{mit} \quad f(t) = 1, \; t \in I := \mathbb{R}$$

$$g(y) = y^3, \; y \in J :=]0, \infty[$$

$$F(t) = \int_0^t ds = t$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} z^{-3}\, dz = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

$$G(\varphi(t)) = F(t)$$

$$\iff \frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{\varphi^2(t)} = 2t$$

$$\iff \varphi^2(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0^2} - 2t}$$

$$\iff \varphi(t) = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 2t}}$$

Da $y_0 > 0$ löst $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 2t}}$ das AWP

Existenzintervall der Lösung $]-\infty, \frac{1}{2y_0^2}[$

Fall 3: $\quad y_0 < 0$

Analog: $(J =]-\infty, 0[)$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 2t}} \quad \text{löst das AWP.}$$

Max. Existenzintervall $\quad]-\infty, \frac{1}{2y_0^2}[$

(H2) AWP (*) $y'(x) = x \cdot \sin(x \cdot y)$, $y'(0) = y_0$; $f(x,y) := x \cdot \sin(xy)$

(a) Sei $x \in [a,b]$. Setze $g_x(y) := \sin xy \Rightarrow g_x'(y) = x \cdot \cos xy$

$$\text{MWS} \Rightarrow |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |x| \cdot |\sin(xy) - \sin(x\tilde{y})|$$
$$= |x| \cdot |x \cdot \cos(x \cdot y^*)| \cdot |y - \tilde{y}|, \quad y^* \in (y, \tilde{y})$$
$$\le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{beschr. auf } [a,b]}}{|x|^2} \cdot |y - \tilde{y}|$$

$\Rightarrow f$ erfüllt glob. Lipschitz-Bdg. (24.6 (1)).

$\xrightarrow[\text{bzw. S. 24.16}]{\text{Lemma 24.15}}$ AWP (*) hat $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lsg. auf $\mathbb{R}$.

(b) Beh: $y \equiv 0$ ist die stationäre Lsg von (*),

denn: $y \equiv 0$ erfüllt (*) $\left[0 = y'(x) = x \cdot \underbrace{\sin(x \cdot 0)}_{=0}\right] \checkmark$

und Eindeutigkeit folgt aus (a) mit $y_0 = 0$.

(c) Ann: $\exists x_0 \in \mathbb{R}: y(x_0) = 0 \Rightarrow$

Das AWP $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$ hat 2 Lösungen:

y und $\tilde{y} \equiv 0$

↯ zur Eindeutigkeit.

Ann: $\exists x_0 \in \mathbb{R}: y(x_0) < 0$

$\xrightarrow[y(0)>0]{\text{ZWS}} \exists \tilde{x}$ zw. x_0 und 0 mit $y(\tilde{x}) = 0$ ↯ (s.o.).

(43) $(*)$ $\dot{x} = x^{\beta}\cdot(g-x)^{\gamma}$, $g>0$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

(a) Stationäre Lsg'en $x_s(t) = c \ \forall t$

$$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad 0 = c^{\beta}\cdot(g-c)^{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 & \text{für } \beta>0 \\ c=g & \text{für } \gamma>0 \end{cases}$$

(b) Seien $\beta,\gamma\geq 1$.

Setze $h(x) := x^{\beta}\cdot(g-x)^{\gamma}$

$\Rightarrow h'(x) = \beta\cdot x^{\beta-1}\cdot(g-x)^{\gamma} - \gamma\cdot x^{\beta}\cdot(g-x)^{\gamma-1}$ stetig $\forall x\in(0,g)$,

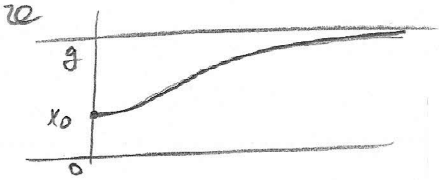
da $\beta,\gamma\geq 1$

$\Rightarrow h$ ist auf $(0,g)$ stetig diff'bar $\Rightarrow$ Lipschitz-st. auf $(0,g)$

$\overset{\text{Ex.-Eind.}}{\underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}}$ $\exists!$ Lösung $x(t)$ von $(*)$ mit max. Def.bereich $D_{max} = \mathbb{R}$, sodass $x(t)\in(0,g)$ $\forall t$., denn

Ann $\exists t_0\in\mathbb{R}$: OE $x(t_0) = g$ $\Rightarrow$ $(*)$ hat in t_0 zwei Lösungen $x(t)$ und $\tilde{x}(t)\equiv g$ (s.a).

$\lightning$ zu Eindeutigkeit. Skizze



(c) $\beta=\gamma=1$.

$\dot{x} = x\cdot(g-x)$

Logistische Glchg (23.14)

TdV. liefert eine eind. Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{g} + c\cdot e^{-gt}}, \quad c \text{ konst}$$

(d) $\beta=0$, $\gamma=\frac{1}{2}$

$\dot{x} = (g-x)^{1/2}$

$$\text{TdV} \Rightarrow \int \frac{1}{(g-x)^{1/2}}\,dx = \int 1\,dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(g-x)^{1/2}}{1/2} = t - C, \quad C \text{ konst}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{g-x} = -\frac{1}{2}(t-c) \quad$ für $\quad t<c.$

$= \frac{1}{2}(c-t)$

$\Rightarrow \quad g-x(t) = \frac{1}{4}(c-t)^2$

$\Rightarrow \quad x(t) = g - \frac{1}{4}(c-t)^2$ ist Lösung von $(*)$

aber auch $x \equiv g$ ist Lösung von $(*)$.

(e) Lösung $x(t)$ hat WP in t_W, falls

$\ddot{x}(t_W) = 0$ und $\dddot{x}(t_W) \neq 0$.

$$\dot{x}(t) = h(x(t)), \quad h(x) = x^{\beta}(g-x)^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = (\dot{x}(t))' = h'(x(t))\cdot \dot{x}(t) \overset{(\ast)}{=}$$

$$= h(x(t))\cdot\{\beta\cdot x^{\beta-1}(g-x)^{\gamma} - \gamma x^{\beta}(g-x)^{\gamma-1}\} =$$

$$= h(x(t))^2 \left\{\frac{\beta}{x} - \frac{\gamma}{g-x}\right\} \overset{!}{=} 0$$

$\underline{\beta,\gamma \geq 1}$: $h(x(t)) \neq 0$, da sonst $x(t_W) = 0$ oder $x(t_W) = g$ $\lightning$ zu $(\ast)$.

$$\Rightarrow \frac{\beta}{x} - \frac{\gamma}{g-x} = 0 \iff \beta(g - x(t_W)) = \gamma\cdot x(t_W)$$

$$\iff x(t_W) = \frac{\beta g}{\gamma-\beta}$$

d.h. WP ist gegeben, falls $\gamma \neq \beta$.