AR Dr. A. Neuenkirch
Dr. A. Schnurr

SoSe 2010
TU Dortmund

Stochastik I

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 22.04.2009, bis 12 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 1:

Seien X und Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung,
$A, A_i \subset X,\ \ B, B_i \subset Y\ \ \forall\, i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge sei. Es gelten folgende Aussagen:

a) i) $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_i B_i\Big) = \bigcup\limits_i f^{-1}(B_i)$, ii) $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_i B_i\Big) = \bigcap\limits_i f^{-1}(B_i)$
iii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

b) i) $f\Big(\bigcup\limits_i A_i\Big) = \bigcup\limits_i f(A_i)$, ii) $f\Big(\bigcap\limits_i A_i\Big) \subset \bigcap\limits_i f(A_i)$
iii) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$

c) i) $A \subset f^{-1}(f(A))$, ii) $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

Zeigen Sie exemplarisch die Aussagen a), ii) und b), i), und begründen Sie durch ein Beispiel, dass in b), ii) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 2:

Ein 'Glücksrad' hat vier Segmente (rot, gelb, grün und blau), die beim Drehen alle mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten. Das 'Glücksrad' wird n-mal ($n \in \mathbb{N}$) gedreht und die Ergebnisse werden notiert.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der obiges Experiment modelliert.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim 4-maligen Drehen mindestens einmal das rote Segment auftritt.

c) Wie oft muss man das Rad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 mindestens einmal das rote Segment zu erhalten?

Aufgabe 3:

Im Erdgeschoss eines 7-stöckigen Hauses steigen 9 Personen in den Aufzug. Im Folgenden verteilen sie sich auf die Stockwerke 1 bis 6.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Personen, sich zu verteilen, wenn man sich nur dafür interessiert, *wie viele* Personen in jedem Stock aussteigen, und nicht *welche*?

b) Wir nehmen an, dass sich jede Person zufällig entscheidet, in welchem Stock sie aussteigt. Dabei wird kein Stockwerk bevorzugt und die Personen entscheiden sich unabhängig voneinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   - alle 9 Personen im ersten Stock aussteigen,
   - 4 Personen im ersten und 5 im zweiten Stock aussteigen?

c) Begründen Sie anhand von b), dass eine Laplace-Verteilung auf dem in a) beschriebenen Raum kein passendes Modell für die gegebene Situation ist.

Aufgabe 4:

Sieben Rechner sind kreisförmig durch Datenleitungen verbunden, d.h. Rechner 1 mit 2, 2 mit 3, usw., bis 6 mit 7 und 7 mit 1. Die Leitungen sind entweder intakt oder defekt, alle Konfigurationen seien gleichwahrscheinlich. Bestimmen Sie in einem geeigneten Laplace-Raum die Wahrscheinlichkeit, dass der größte Teilgraph von miteinander verbundenen Rechnern weniger als 6 Rechner umfasst.

Zur Erinnerung: Sei Ω eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *Topologie*, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $\Omega \in \mathcal{T}$.

(T2) Wenn $A_j \in \mathcal{T}$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt $\bigcap_{j=1,...,n} A_j \in \mathcal{T}$.

(T3) Für beliebige Indexmengen I gilt: Wenn $A_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$, dann gilt $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra*, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(A2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann gilt $A^c \in \mathcal{A}$.

(A3) Wenn $A_j \in \mathcal{A}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 5*:

Die Beispiele sind jeweils zu begründen:

a) Geben Sie ein Mengensystem auf $\Omega = \mathbb{R}$ an, das sowohl eine σ-Algebra, als auch eine Topologie ist.

b) Geben Sie ein Mengensystem auf $\Omega = \mathbb{R}$ an, das keine σ-Algebra, aber eine Topologie ist.

c) Geben Sie ein Mengensystem auf $\Omega = \mathbb{R}$ an, das eine σ-Algebra, aber keine Topologie ist.