AR Dr. A. Neuenkirch
Dr. A. Schnurr

SoSe 2010
TU Dortmund

Stochastik I

Blatt 7

Abgabe: Mittwoch (!!), 02.06.2010, bis 12 Uhr in die Briefkästen

---

Die Punkte auf diesem Übungszettel sind Bonuspunkte, d.h. sie zählen nicht auf der Soll-, wohl aber auf der Haben-Seite. Sollte dies nötig sein, so können Sie zwischen der ersten Hälfte (Blatt 01-06) und der zweiten Hälfte (Blatt 08-13) aufgeteilt werden. Die Bonuspunkte eingerechnet müssen dabei jeweils **38** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 31:

Sei $\mathbf{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mathbf{P}((0,\infty)) = 1$. Es bezeichne f die Dichte von $\mathbf{P}$ und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Die Ausfallfunktion ist definiert durch $H(x) := -\log(1 - F(x))$ und die infinitesimale Ausfallrate durch:

$$r(x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}((0, x+h] | (x, \infty)), \qquad x \geq 0.$$

Zeigen Sie:

a) $r(x) = H'(x) = f(x)/(1 - F(x))$

b) Wenn $x \mapsto r(x)$ monoton wachsend ist, dann ist auch $x \mapsto H(x)/x$ monoton wachsend.

c) $x \mapsto H(x)/x$ ist genau dann monoton wachsend, wenn

$$(1 - F(x))^\alpha \leq 1 - F(\alpha x)$$

für alle $0 \leq \alpha \leq 1$.

d) Wenn $x \mapsto H(x)/x$ monoton wachsend ist, dann gilt

$$H(x+y) \geq H(x) + H(y)$$

für alle $x, y \geq 0$.

Aufgabe 32:

Bestimmen Sie die infinitesimale Ausfallrate, wenn $\mathbf{P}$

a) Weibull verteilt ist, d.h. (für $x \geq 0$)

$$\mathbf{P}((x, \infty)) = \exp(-\alpha x^{\beta}),$$

b) exponential-verteilt ist mit Parameter λ,

c) die Dichte $\alpha f + (1 - \alpha) g$ hat, wobei $0 < \alpha < 1$ und f und g Exponentialdichten sind (mit Parametern λ, μ). Was passiert mit der infinitesimale Ausfallrate $r(x)$ für $x \to \infty$?

Geben Sie jeweils die vollständigen Rechnungen an!

Aufgabe 33:

Sei

$$F_{\mathbf{P}}(x, y) = \frac{1}{2}\Phi(\min\{x, y\}) + \frac{1}{2}(\Phi(x) - \Phi(-y)) \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x + y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

a) $F_{\mathbf{P}}$ eine Verteilungsfunktion ist,

b) $F_{\mathbf{P}_1}(x) = F_{\mathbf{P}_2}(x) = \Phi(x)$ gilt, d.h die Marginale sind standard-normalverteilt,

c) aber $\mathbf{P}$ keine mehrdimensionale Normalverteilung ist.

Aufgabe 34:

Zwei Studenten gehen zwischen 13.00 und 14.00 Uhr zu einem zufälligen gleichverteilten Zeitpunkt zur Mensa. Sie beschließen, jeweils genau 6 Minuten am Mensaeingang aufeinander zu warten. Bestimmen Sie mit geometrischen Mitteln die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen am Mensa-Eingang.

Aufgabe 35*:

Pick two points A and B independently at random on the circumference of the unit circle. Let Π be the length of the perpendicular from the origin O to the line AB and let Θ be the angle AB makes with the horizontal. Show that (Π, Θ) has joint density

$$f(p, \theta) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{1 - p^2}}, \qquad 0 \leq p \leq 1, 0 \leq \theta, \leq 2\pi.$$