AR Dr. A. Neuenkirch
Dr. A. Schnurr

SoSe 2010
TU Dortmund

Stochastik I

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 10.06.2010, bis 12 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 36:

a) Sei $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra auf Ω' und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine σ-Algebra auf Ω ist.

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass $f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \neq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 37:

Eine Pumpe sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfalle. Die Zufallsvariable X, die die zufällige Dauer der Funktionsfähigkeit der Pumpe beschreibt, möge stetig verteilt sein mit einer Dichte der Form

$$f(x) := \begin{cases} \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus langfristigen Beobachtungen hat sich ergeben, dass $\lambda = 1/50$ gilt.

a) Man bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \leq 100) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{P}(X \leq 200 | X \geq 100).$$

b) Aus Sicherheitsgründen tauscht man die Pumpe, sobald sie 100 Stunden lang ununterbrochen gelaufen ist, gegen eine neue gleichartige aus. Man bestimme die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y, die die Einsatzzeit einer Pumpe beschreibt. (Die Einsatzzeit ist die Zeit, die vergeht, bis die Pumpe entweder ausfällt oder aber ausgewechselt wird.)

Aufgabe 38:

Bestimmen Sie die Dichte von $Y := \sin^{-1}(X)$, wenn

a) X gleichverteilt ist auf dem Intervall $[0, 1]$,

b) X gleichverteilt ist auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Aufgabe 39:

Bestimmen Sie die Dichte von $Y = a/(1 + X^2)$, wobei $a > 0$ und X Cauchy(0,1)-verteilt ist.
(Hinweis: Der Transformationssatz aus der VL ist hier nicht anwendbar. Betrachten Sie stattdessen die Verteilungsfunktion $\mathbf{P}(Y \leq y)$.)

Aufgabe 40*:

Let X and Y have the bivariate normal density function

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right).$$

Show that X and $Z := (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ are independent $N(0, 1)$ variables, and deduce that

$$\mathbf{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \rho.$$