AR Dr. A. Neuenkirch
Dr. A. Schnurr

SoSe 2010
TU Dortmund

Stochastik I

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 17.06.2010, bis 12 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 41:

Seien X und Y unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $a > 0$ und $b > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $X + Y$ ebenfalls Poisson-verteilt ist mit Parameter $a + b$.

b) Zeigen Sie, dass für $k = 0, ..., n$ gilt

$$\mathbf{P}(X = k \,|\, X + Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

mit $p = \frac{a}{a+b}$.

Definition: Für eine Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seien die mengenalgebraischen Limites

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=i}^{\infty} A_k \qquad \text{sprich } \textit{Limes inferior}$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k \qquad \text{sprich } \textit{Limes superior}$$

definiert. Eine Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt. In diesem Fall schreibt man $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ mit $A := \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 42:

a) Begründen Sie folgende Gleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ bis auf endlich viele} \right\},$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

b) Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

c) Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ für

$$A_n \quad := \quad \begin{cases} A & \text{für} \quad n = 2k\ ,\ k \in \mathbb{N} \\ B & \text{für} \quad n = 2k-1\ ,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

d) Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} (A_n)^c = (\limsup_{n\to\infty} A_n)^c.$$

Aufgabe 43:

a) Zeigen Sie, dass man den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X, die nur Werte in den natürlichen Zahlen annimmt, wie folgt berechnen kann:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

b) Eine Urne enthalte b blaue und r rote Kugeln. Man zieht nun so lange (ohne Zurücklegen) eine Kugel nach der anderen, bis man zum ersten Mal eine blaue Kugel erhält. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert für die Anzahl der gezogenen Kugeln $(b + r + 1)/(b + 1)$ ist.

(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Identität

$$\sum_{n=0}^{r} \binom{n+b}{b} = \binom{r+b+1}{b+1}$$

benutzen.)

Aufgabe 44:

Jeder Packung Frühstücksflocken der Marke K wird eine von 12 Sammelkarten beigegeben (11 Freunde und ein Jogi). Jede der Sammelkarten kommt gleich oft vor. Wie viele Packungen muss man durchschnittlich kaufen, um alle 12 Sammelkarten mindestens einmal zu erhalten.
(Hinweis: Gehen Sie schrittweise vor. Bestimmen Sie jeweils die durchschnittliche Anzahl Packungen, die man kaufen muss, bis zum ersten mal eine Sammelkarte kommt, die man noch nicht hat, wenn man schon n Sammelkarten hat. Die Gesamtzahl der Karten ist so groß, dass Sie davon ausgehen können, dass die Karten, die Sie besitzen die Wahrscheinlichkeiten für die nächste Karte nicht beeinflussen.)

Aufgabe 45*:

Beweisen Sie, dass sich die Dichte der t_n-Verteilung darstellen lässt als

$$f(x) = \frac{(\Gamma(n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},$$

für $x \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Die Formel für die Dichte der χ^2_n-Verteilung dürfen Sie ohne Beweis verwenden.)