AR Dr. A. Neuenkirch
Dr. A. Schnurr

SoSe 2010
TU Dortmund

Stochastik I

Blatt 13

Abgabe: Donnerstag, 15.07.2010, bis 12 Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 61:

Ein Tierpark besitzt 12 Exemplare einer inzwischen selten gewordenen Tierart. In einem biologischen Forschungsinstitut wurde eine bisher unbekannte Krankheit an Tieren dieser Rasse entdeckt. Der Leiter des Tierparks möchte wissen, wieviele seiner Exemplare von dieser Krankheit befallen sind. Da die Tiere in einem großen Freigehege leben, ist ein Einfangen und Untersuchen aller Tiere zu aufwändig. Es wird daher an einem bestimmten Tag eine Fangaktion durchgeführt. Dabei werden vier Tiere gefangen, und es stellte sich bei deren Untersuchung heraus, dass genau eins von ihnen von der neu entdeckten Krankheit befallen war. Unter geeigneten Modellannahmen (Ziehen ohne Zurücklegen) berechne man den Maximum-Likelihood-Schätzwert für die unbekannte Anzahl θ der kranken Tiere im Freigehege.

Aufgabe 62:

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte ($\theta > 0$)

$$f_\theta(x) := 2\theta x e^{-\theta \cdot x^2} \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$$

beschrieben werden kann. Das für diese Sorte passende θ schätze man aufgrund der folgenden 15 Brenndauern [in 1000 Stunden] mittels der Maximum-Likelihood-Methode:

1.530	1.173	1.832	1.075	1.539
0.998	2.083	0.693	2.529	1.693
1.325	1.487	1.298	1.743	1.432

Aufgabe 63:

Von einen Zufallsexperiment ist bekannt, dass die Werte $\{0, 1, ..., n\}$ als Ausgänge vorkommen und dass es sich durch eine Zufallsvariable Y mit Zähldichte $(0 \leq \theta \leq 1)$

$$\mathbf{P}_\theta(X = k) = \begin{cases} \theta & , k = 0 \\ \frac{1-\theta}{n} & , k = 1, ..., n \end{cases}$$

modellieren lässt.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ für θ.

b) Ist der Schätzer aus a) erwartungstreu?

Aufgabe 64:

Beweisen Sie Proposition 1.3 in Kapitel IV.

Aufgabe 65*:

Eine Zufallsvariable X habe die sogenannte 'gestutzte' Poisson-Verteilung mit Parameter $\theta > 0$, d.h.

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} \frac{\theta^k}{k!} \cdot e^{-\theta} \qquad \text{für } k \geq 1.$$

Bestimmen Sie einen erwarungstreuen Schätzer für $\lambda(\theta) = 1 - e^{-\theta}$. Ist dieser Schätzer sinnvoll?