Kapitel I: Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$ - eine Einführung

1.1 Kapitel (I.1): Definitionen

Charakter dieser Einführung:

- **Rückgriff auf Kenntnisse aus der Schule**
- **Weiterführung auf den $\mathbb{R}^n$, Ausblicke**
- **Beispiele für spätere Definitionen**
- **noch keine Systematik**

1.1.1 Ziele

In diesem Abschnitt wollen wir den $\mathbb{R}^n$ einmal als Punktmenge und einmal als Vektorraum definieren.

1.1.2 Vorbereitung: Mengenbegriff nach Cantor

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlverschiedenen Objekten (genannt “Elemente”) unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.
Notation für Mengen: Große Buchstaben, oft $M, N, \ldots$.
Lies “$a \in M$” als “a ist Element von M”.
Lies “$M \ni a$” als “M enthält a”.
Beispiele für Mengen:

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{a\}, \phi$$

Der Menge ϕ kommt eine Sonderrolle zu, es handelt sich um die leere Menge. Die leere Menge enthält offensichtlich keine Elemente.
Schreibweise:

$$\{x \in M | x \textbf{ hat Eigenschaft}\}$$

Hier nun ein Beispiel für die Schreibweise:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$$

1.1.3 Definition (I.1.a): Teilmenge

M **ist Teilmenge von** N **wenn für jedes** $m \in M$ **gilt:** $m \in N$**.**
Schreibweise: $M \subseteq N$**oder**$M \subset N$
Falls $M \neq N$ **ist wird auch folgende Schreibweise benutzt:** $M \subsetneqq N$

Der $\mathbb{R}^n$ als Punktmenge

1.1.4 Für $n = 1$: $\mathbb{R}^1$ - die Zahlengerade

Die üblichen Rechengesetze (Addition, Multiplikation, etc.) gelten. Zum Beispiel das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Diese Operationen sind allerdings noch nicht für die Punktmenge definiert. Diese Definitionen kommen erst später.

Wir können uns den $\mathbb{R}^1$ geometrisch als Zahlenstrahl veranschaulichen:

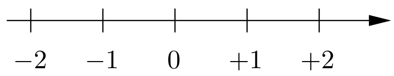

Abbildung I-1: Die geometrische Veranschaulichung des $\mathbb{R}^1$

1.1.5 Für $n = 2$: $\mathbb{R}^2$ - die Ebene

Wir können uns den $\mathbb{R}^2$ geometrisch als Ebene veranschaulichen:

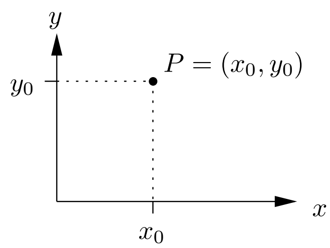

Abbildung I-2: Die geometrische Veranschaulichung des $\mathbb{R}^2$

Der $\mathbb{R}^2$ ist definiert als $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Dabei wird (x, y) als Paar bezeichnet.

1.1.6 Für $n = 3$: $\mathbb{R}^3$ - der Raum

Wir können uns den $\mathbb{R}^3$ geometrisch als Raum veranschaulichen:

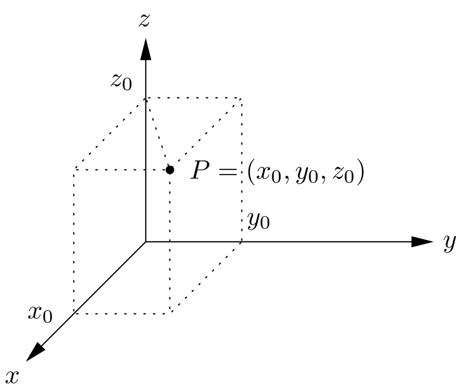

Abbildung I-3: Die geometrische Veranschaulichung des $\mathbb{R}^3$

Der $\mathbb{R}^3$ ist definiert als $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, (x, y, z) wird als Tripel bezeichnet.

1.1.7 Definition (I.1.b): $\mathbb{R}^n$

Der $\mathbb{R}^n$ ist definiert als:

$$\mathbb{R}^n \quad = \quad \{\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **wird als n-Tupel bezeichnet. (manchmal auch als geordnetes n-Tupel).**
Zwei n-Tupel sind gleich wenn gilt:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$$

Lies "$:\Leftrightarrow$" als "per Definitionem" oder "genau dann wenn".

1.1.8 Motivation für die Einführung des $\mathbb{R}^n$

- $n = 1, 2, 3$**: Gerade, Ebene und Raum (aus der Anschauung heraus).**
- $n = 4$**: Raum-Zeit-Kontinuum in der Physik.**
- n **beliebig: siehe Beispiele weiter unten**

1.1.9 Beispiele für die Nutzung des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$

1. Beispiel: Lager mit n Artikeln $A_1 \ldots A_n$. x_i sei die Maßeinheit des Artikels A_i auf Lager. Die möglichen Lagerzustände können nun folgendermaßen aussehen:

$$\Big\{\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{10} \,\Big|\, 0 \leq x_i \leq 150 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, 6 \text{ oder } 0 \leq x_i \leq 60 \text{ für } i = 7, 8, \ldots, 10\Big\}$$

2. Beispiel: Lineare Gleichungssysteme: Es sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 + x_8 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(*)$ gilt nun allgemein:

$$\mathbb{L} \quad = \quad \Big\{\,(x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \,\Big|\, (x_1, \ldots, x_8) \text{ erfüllt } (*)\Big\}$$

Es ist relativ einfach zu sehen, daß $\mathbb{L} \neq \phi$, da triviale Lösungen wie $x_1, \ldots, x_7 = 0$ und $x_8 = 1$ existieren.
Subtrahieren wir nun die beiden Gleichungen voneinander, so erhalten wir:

$$x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 + x_8 \quad = \quad 1$$

Lösen wir die Gleichung nach x_2 auf, so erhalten wir:

$$x_2 \quad = \quad -4x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_7 - x_8 + 1$$

Laut der zweiten Gleichung von $(*)$ gilt:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Setzen wir nun x_2 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= -\left(-4x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_7 - x_8 + 1\right) + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 + x_8 - 1 + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 + x_7 + x_8 - 1 \end{aligned}$$

Somit ist $(x_1, \dots, x_8)$ **Lösung von** $(*)$**. Es gilt:**

$$(**) \begin{cases} x_1 &= 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 + x_7 + x_8 - 1 \\ x_2 &= -4x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_7 - x_8 + 1 \end{cases}$$

Umgekehrt: Sind $x_3, \dots, x_8$ **beliebig gewählte reelle Zahlen und berechnet man** x_1 **und** x_2 **gemäß** $(**)$**, so ist** $(x_1, \dots, x_8)$ **eine Lösung von** $(*)$**.**
Beweis: Einsetzen und ausrechnen.
Also gilt für die Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \;=\; &\{(x_1 = 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 + x_7 + x_8 - 1, \\ &x_2 = -4x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_7 - x_8 + 1, \\ &x_3, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8\} \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft von $\mathbb{L}$**:**$\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^8$
Allgemeines Gleichungssystem aus m **Gleichungen und** n **Unbekannten:**

$$(***) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ **mit** $i = 1 \dots m$ **und** $j = 1 \dots n$**.**
Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ **gilt im allgemeinen:**

$$\mathbb{L} = \{\,(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1, \dots, x_n) \quad \textbf{erfüllt} \quad (***)\}$$

Zudem gilt allgemein: $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ als Vektorraum

Auf dem $\mathbb{R}^n$ **sind Addition und skalare Multiplikation definiert.**

1.1.10 Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^1$

Addition im $\mathbb{R}^1$**:**

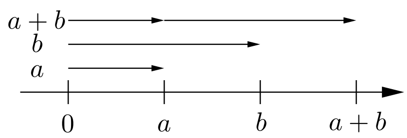

Abbildung I-4: Addition im $\mathbb{R}^1$

Multiplikation im $\mathbb{R}^1$**:**

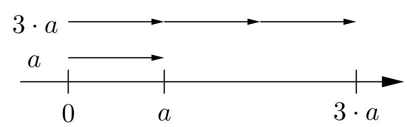

Abbildung I-5: Multiplikation im $\mathbb{R}^1$

Die Addition erfolgt mittels gerichteten Strecken. Die Multiplikation läßt sich auf die Addition von gerichteten Strecken zurückführen. Für die Addition und Multiplikation gelten die üblichen Rechengesetze.

1.1.11 Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2$

Ein Vektor ist eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{PQ}$ für $P, Q \in \mathbb{R}^2$

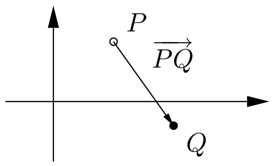

Abbildung I-6: Ein Vektor im $\mathbb{R}^2$

Wichtig: Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.
Fundamental: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} :\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ haben die gleiche Richtung und Länge.
Behauptung: Seien $P = (a_1, b_1), Q = (a_2, b_2), R = (c_1, d_1), S = (c_2, d_2) \in \mathbb{R}^2$ dann gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \quad \Leftrightarrow \quad (a_2 - a_1, b_2 - b_1) = (c_2 - c_1, d_2 - d_1)$$

Wir wollen nun obige Behauptung beweisen. Da es sich um eine Äquivalenz handelt beweisen wir erst von links nach rechts und dann von rechts nach links.
"$\Rightarrow$": Zuerst fertigen wir eine Skizze an:

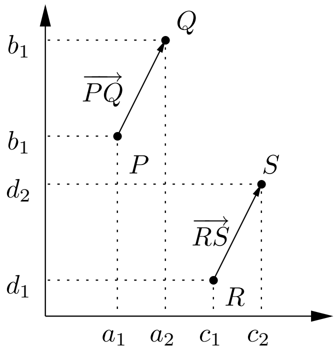

Abbildung I-7: Skizze der Vektoren

Nun ergänzen wir die Vektoren zu rechtwinkligen Dreiecken und benennen die neuen Eckpunkte:

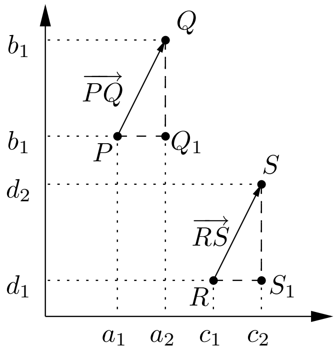

Abbildung I-8: Skizze nach Ergänzung der Vektoren zu Dreiecken

Durch Parallelverschiebung ergibt sich: $\triangle PQQ_1 \xrightarrow{PV} \triangle RSS_1$

Damit sind die Längen von $\overline{PQ}$ **und** $\overline{RS}$ **identisch.**

Zudem gilt: $\overline{PQ_1} = a_2 - a_1$ **und** $\overline{RS_1} = c_2 - c_1$

Setzen wir ein, so erhalten wir: $a_2 - a_1 = c_2 - c_1$**.**

Analog wird für $b_2 - b_1 = d_2 - d_1$ **verfahren.**

"$\Leftarrow$": $a_2 - a_1 = c_2 - c_1 \mathbf{und} b_2 - b_1 = d_2 - d_1$. **Betrachte wieder Dreiecke:** $\triangle PQQ_1$ **und** $\triangle RSS_1$**. Nach Voraussetzung gilt:** $\overline{PQ_1}$ **und** $\overline{RS_1}$ **sind gleich lang, sowie** $\overline{QQ_1}$ **und** $\overline{SS_1}$ **sind auch gleich lang. Zudem sind die von** $\overline{PQ_1}$ **und** $\overline{QQ_1}$ **beziehungsweise** $\overline{RS_1}$ **und** $\overline{SS_1}$ **eingeschlossenen Winkel gleich groß** (90^0)**. Also gilt nach Pythagoras:** $\overline{PQ}$ **hat die gleiche Länge wie** $\overline{RS}$**. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt:** $\overline{PQ}$ **und** $\overline{RS}$ **haben die gleiche Orientierung. Also:** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$**.** $\square$

Bisheriges Ergebnis: Die Vektoren in der Ebene lassen sich durch die Elemente des $\mathbb{R}^2$ **beschreiben. Wir schreiben** $x = (a, b)$**. In unserem Beispiel** $\overrightarrow{PQ} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$

1.1.12 Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ **sind gerichtete Strecken zwischen zwei Punkten. Zwei Vektoren sind gleich, falls deren Länge und Richtung identisch ist.**

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ **lassen sich durch Elemente des** $\mathbb{R}^2$ **beschreiben:**

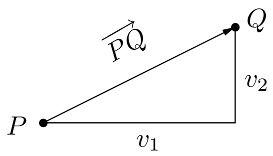

Abbildung I-9: Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Für $\overrightarrow{PQ}$ **gilt:** $\overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2)$

Interpretation von Vektoraddition und skalarer Multiplikation

Addition:

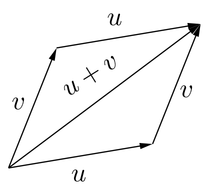

Abbildung I-10: Kommutativität der Vektoraddition

Vektoraddition mittels Addition der Komponenten:

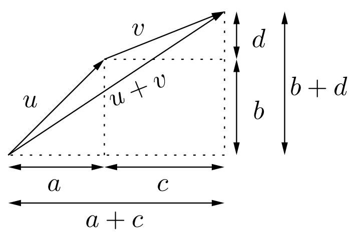

Abbildung I-11: komponentenweise Addition von Vektoren

Es sei $u = (a, b)$**,** $v = (c, d)$**. Es gilt:** $u + v = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
Skalare Multiplikation $\lambda \cdot u$ **mit** $\lambda \in \mathbb{R}$**.**
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

- $\lambda \geq 0$ **:** λu **hat dieselbe Orientierung wie** u **und hat die Länge ist** λ**·Länge von** u**.**
- $\lambda < 0$ **:** λu **hat die entgegengesetzte Orientierung von** u **und hat die Länge** $|\lambda|$ **·Länge** u**.**

Sei $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$**,** $\lambda \in \mathbb{R}$**.**
Behauptung: $\lambda \cdot u = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)$**.**
Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:
1.Fall: Strahlensätze oder Trigonometrie verwenden:

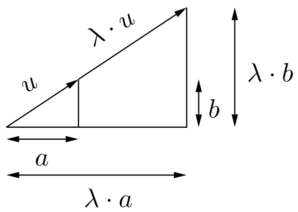

Abbildung I-12: Strahlensatz für $\lambda > 0$

2. Fall: Strahlensätze oder Trigonometrie verwenden:

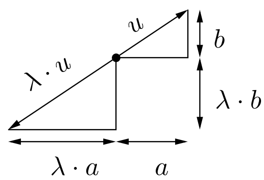

Abbildung I-13: Strahlensatz für $\lambda < 0$

1.1.13 Definition (I.1.c): Der n-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^n$

- **Der** n**-dimensionale Vektorraum über** $\mathbb{R}$ **ist der** $\mathbb{R}^n$ **versehen mit der Addition und der skalaren Multiplikation.**
- **Addition:** $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$**.**
- **Skalare Multiplikation:** $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ **.**
Betrachtet man den $\mathbb{R}^n$ **zusammen mit diesen Operatoren (= Verknüpfungen), so nennt man die Elemente des** $\mathbb{R}^n$ **auch Vektoren.**
Bemerkungen:

- $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}$
  - **als** n**-dimensionaler Punktraum in Verallgemeinerung von Zahlengrade, Ebene und Raum.**
  - **als Raum von Vektoren.**
- **Verwendung von "+" und "·" in der Definition nicht einheitlich.**

1.1.14 Rechenregeln für Addition und skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^n$

Es gilt:

- **Assoziativität der Addition:** $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ **gilt:**

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

- **Neutrales Element: Für den Nullvektor** $0 := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ **und für jedes** $v \in \mathbb{R}^n$ **gilt:**

$$0+v = v+0 = v$$

- **Inverses Element: Für alle** $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ **und sein Inverses** $-v = (-v_1, \ldots, -v_n) \in \mathbb{R}^n$ **gilt:**

$$v+(-v) = (-v)+v = 0$$

- **Kommutativität: Für alle** $v, w \in \mathbb{R}^n$ **gilt:**

$$v+w = w+v$$

- **DistributivitätFür alle** $v, w \in \mathbb{R}^n$ **und** λ, μ **gilt:**

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)\cdot v &= \lambda\cdot v+\mu\cdot v \\ \lambda\cdot(v+w) &= \lambda\cdot v+\lambda\cdot w \end{aligned}$$

- **Assoziativität der Multiplikation:**

$$\begin{aligned} \lambda\cdot(\mu\cdot v) &= (\lambda\cdot\mu)\cdot v \\ 1\cdot v &= v \end{aligned}$$

Beweise: hier kein Durchführung, dem interessierten Studenten überlassen.

Wichtige Notationen: $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$**:** $v - w := v + (-w)$
Geometrisch sieht die Subtraktion folgendermaßen aus:

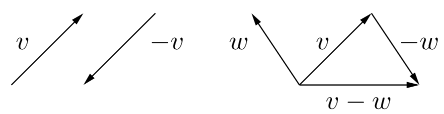

Abbildung I-14: Vektor und sein inverser Vektor. Subtraktion zweier Vektoren

1.2 Kapitel (I.2): Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^n$

1.2.1 geometrische Konstruktion einer Geraden

Die geometrische Konstruktion einer Geraden:

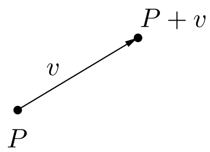

Abbildung I-15: geometrische Konstruktion einer Geraden

Analytisch: $P + (x_1, \ldots, x_n)$.
Idee für eine Gerade $v \neq 0$**:** $g_{P;v}$

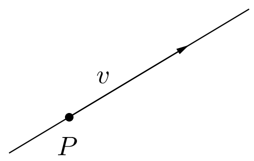

Abbildung I-16: Idee für eine Gerade

Die Schreibweise $g_{P;v}$ **beschreibt eine Gerade durch den Punkt** P **mit dem Richtungsvektor** v**.**
Liegt nun ein Punkt Q **auf der Geraden, so gilt:**

$$Q \in g_{P;v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot v$$

Für P **und** Q **soll gelten:**

$$\begin{aligned} P &= \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \\ Q &= (x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Nun gilt für $\overrightarrow{PQ}$**:**

$$\overrightarrow{PQ} = \left(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0\right)$$

Zudem gilt für den Richtungsvektor v **der Geraden:**

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

Damit ergibt sich für die Gerade $g_{P;v}$ **folgende Definition:**

$$\begin{aligned} g_{P;v} &= \left\{ \left(x_1^0 + \lambda \cdot x_1, \ldots, x_n^0 + \lambda \cdot x_n\right) \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ P + \lambda \cdot v \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= P + \mathbb{R}\, v \end{aligned}$$

1.2.2 Satz (I.2.1)

Durch je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$ geht genau eine Gerade.
Wir wollen nun diesen Satz beweisen. Wir werden folgendermaßen vorgehen:

- **zuerst weisen wir die Existenz nach.**
- **anschließend zeigen wir die Eindeutigkeit.**

<u>Existenz der Gerade</u>: Wie betrachten die Gerade $g_{P;\overrightarrow{PQ}}$. Es gilt:

- **$g_{P;\overrightarrow{PQ}} \ni P$ für $\lambda = 0$, da P der Ortsvektor der Geraden ist.**
- **$g_{P;\overrightarrow{PQ}} \ni Q$ für $\lambda = 1$, da $\overrightarrow{PQ}$ der Richtungsvektor der Geraden ist; und die Summe des Ortsvektor zu P und des Richtungsvektors $\overrightarrow{PQ}$ den Vektor zu Q ergibt.**

<u>Eindeutigkeit der Geraden</u>: Angenommen es gibt eine weitere Gerade $g_{R;v} \neq g_{P;\overrightarrow{PQ}}$ mit $P, Q \in g_{R;v}$. Also gibt es $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 \neq \mu_0$. Da $P, Q \in g_{R;v}$ sind muß für diese beiden Punkte gelten: $P = R + \lambda_0 \cdot v$, $Q = R + \mu_0 \cdot v$. Bilden wir nun die Differenz der beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} P - Q &= R + \lambda_0 \cdot v - [R + \mu_0 \cdot v] \\ P - Q &= R - R + \lambda_0 \cdot v - \mu_0 \cdot v \\ P - Q &= \lambda_0 \cdot v - \mu_0 \cdot v \\ P - Q &= (\lambda_0 - \mu_0) \cdot v \end{aligned}$$

Nun ist laut Voraussetzung $\lambda_0 \neq \mu_0$. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach v auflösen:

$$v = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} \cdot (P - Q)$$

Eine äquivalente Schreibweise für $P - Q$ ist nun $\overrightarrow{QP}$. Zudem gilt: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$. Wir setzen ein und erhalten für v:

$$v = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} \cdot \overrightarrow{QP} = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} \cdot \left(-\overrightarrow{PQ}\right) = \frac{1}{-(\lambda_0 - \mu_0)} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

v ist also von $\overrightarrow{PQ}$ linear abhängig. Also sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden gleich. Nun müssen wir noch nachweisen, daß die beiden Geraden mindestens einen Punkt gemeinsam haben (Damit haben die beiden Geraden natürlich alle Punkte gemeinsam und sind identisch).
Weiter gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$R + \lambda \cdot v = R + \lambda \cdot v + 0 = R + \lambda \cdot v + \underbrace{\lambda_0 \cdot v - \lambda_0 \cdot v}_{=0} = R + \lambda_0 \cdot v + (\lambda - \lambda_0) \cdot v$$

Nun gilt für P laut Voraussetzung: $R + \lambda_0 \cdot v = P$
Wir setzen ein und erhalten: $R + \lambda \cdot v = P + (\lambda - \lambda_0) \cdot v$
Nun setzen wir noch unser Ergebnis für v ein und es ergibt sich:

$$R + \lambda \cdot v = P + (\lambda - \lambda_0) \cdot \left[\frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \cdot \overrightarrow{PQ}\right] = P + \frac{\lambda - \lambda_0}{\mu_0 - \lambda_0} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Also: $g_{R;v} = g_{P;\overrightarrow{PQ}}$. Wir erhalten also einen Widerspruch zu den Voraussetzungen. Die beiden Geraden $g_{R;v}$ und $g_{P;\overrightarrow{PQ}}$ sind identisch.

1.2.3 Satz (I.2.2): Eindeutige Beschreibung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$: $ax + b = c$

Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist g Gerade genau dann wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt mit:

- $(a, b) \neq (0, 0)$
- $g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$

Genau dann wenn impliziert, daß wir beide Richtungen beweisen müssen.
<u>Beweis</u>: **"⇒"**
g **sei Gerade. Sei** $g = g_{P;v}$. **Wie finden wir nun** a, b, c? **Ansatz: Notwendige Bedingung ableiten. Alle Punkte von** g **sollen die Gleichung** $ax + by = c$ **erfüllen. Für** P **und** v **gilt:**$P = (p_1, p_2)$, $v = (v_1, v_2)$
Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ **gilt:** $ax + by = c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (p_1 + \lambda \cdot v_1) + b \cdot (p_2 + \lambda \cdot v_2) = c$
Wählen wir $\lambda = 0$ **so ergibt sich:**

$$a \cdot (p_1 + 0 \cdot v_1) + b \cdot (p_2 + 0 \cdot v_2) = c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \quad (*)$$

Wählen wir $\lambda = 1$ **so ergibt sich:**

$$a \cdot (p_1 + 1 \cdot v_1) + b \cdot (p_2 + 1 \cdot v_2) = c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot p_1 + a \cdot v_1 + b \cdot p_2 + b \cdot v_2 = c \quad (**)$$

Nun bilden wir die Differenz von $(**)$ **und** $(*)$**:**

$$a \cdot p_1 + a \cdot v_1 + b \cdot p_2 + b \cdot v_2 - [a \cdot p_1 + b \cdot p_2] = c - c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0$$

Nun müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen:
<u>**1. Fall:**</u> $v_1 = 0, v_2 \neq 0$
Situation: Der Richtungsvektor v **der Geraden ist in diesem Fall:**

$$v \quad = \quad (0, v_2)$$

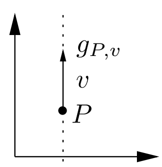

Abbildung I-17: Richtungsvektor $v = (0, v_2)$

Das heißt, für alle $Q = (x, y)$ **gilt:**

$$Q \in g \quad \Leftrightarrow \quad Q = (p_1 + \lambda \cdot 0, p_2 + \lambda \cdot v_2) = (p_1, p_2 + \lambda \cdot v_2) \quad \Leftrightarrow \quad x = p_1$$

Es ergibt sich eine Gleichung der Form $ax + by = c$ **mit** $a = 1$, $b = 0$, $c = p_1$.
Also: $1 \cdot x + 0 \cdot y = p_1 \quad \Leftrightarrow \quad x = p_1$
<u>**2. Fall:**</u> $v_1 \neq 0$
Zuerst noch einmal die aus den notwendigen Bedingungen abgeleiteten Gleichungen:

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \qquad a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0$$

Nun nehmen wir die zweite Gleichung und teilen durch v_1, **da** $v_1 \neq 0$ **laut Voraussetzung:**

$$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 = -b \cdot v_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

Jetzt setzen wir das Ergebnis in die erste Gleichung ein:

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \left[-b \cdot \frac{v_2}{v_1}\right] \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \quad \Leftrightarrow \quad -b \cdot p_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} + b \cdot p_2 = c$$

Anschließend wählen wir $b := v_1$. Es ergibt sich: $a = -v_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} = -v_2$
Nun nehmen wir die erste Gleichung der notwendigen Bedingungen und es ergibt sich für c:

$$c = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2$$

Bisher haben wir herausgefunden: $(x, y) \in g \quad \Rightarrow \quad ax + by = c$ **existiert.**
Umkehrung: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $ax + by = c$. Nun setzen wir a, b und c ein und es gilt:

$$-v_2 \cdot x + v_1 \cdot y \quad = \quad -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2$$

Nun lösen wir nach y auf und erhalten:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot y &= -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2 + v_2 \cdot x \\ y &= -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + \frac{v_1}{v_1} \cdot p_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x \\ y &= -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + p_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x \qquad (***) \end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, daß der Punkt P auf der Geraden g liegt:

$$(x, y) - (p_1, p_2) \quad = \quad (x - p_1, y - p_2)$$

Nun setzen wir y aus $(***)$ ein und es gilt:

$$\begin{aligned} (x - p_1, y - p_2) &= \left(x - p_1, -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + p_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x - p_2\right) \\ &= \left(x - p_1, -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x\right) = \left(x - p_1, \frac{v_2}{v_1} \cdot (-p_1 + x)\right) \\ &= \left(x - p_1, \frac{v_2}{v_1} \cdot (x - p_1)\right) = \left(v_1 \cdot \frac{x - p_1}{v_1}, v_2 \cdot \frac{x - p_1}{v_1}\right) \\ &= \frac{x - p_1}{v_1} \cdot (v_1, v_2) \end{aligned}$$

Damit ist die Differenz eines beliebigen Punktes auf der Geraden g und eines Punktes P ein vielfaches des Richtungsvektors v der Geraden. Also liegt P auf der Geraden g.
"$\Leftarrow$":
$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$ **mit** $(a, b) \neq (0, 0)$**. Nun ist zu zeigen: g ist eine Gerade.**
Nun sei $b \neq 0$ oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit). (Wählen wir $a \neq 0$ müssen wir das folgende Argument umdrehen). Nun lösen wir nach y auf:

$$a \cdot x + b \cdot y = c \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot y = c - a \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x \qquad (A)$$

Sei (x_0, y_0) Lösung der Gleichung, dann gilt: $(x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$
Nun müssen y und y_0 die Gleichung (A) erfüllen. Es gilt: $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x$, $y_0 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_0$
Wir setzen ein und erhalten:

$$\begin{aligned} (x - x_0, y - y_0) &= \left(x - x_0, \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x - \left[\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_0\right]\right) = \left(x - x_0, \frac{c}{b} - \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x - x_0)\right) \\ &= \left(\frac{x - x_0}{b} \cdot b, -a \cdot \left(\frac{x - x_0}{b}\right)\right) = \frac{x - x_0}{b} \cdot (b, -a) \end{aligned}$$

Also ist $(x, y) \in g_{(x_0, y_0);(b, -a)}$, also eine Gerade.
Umgekehrt liefert $g_{(x_0, y_0);(b, -a)}$ wie im ersten Fall eine Gleichung und zwar $ax + by = c$
Hierzu setzen wir folgende Werte ein: $x_0 = p_1$, $y_0 = p_2$, $b = v_1$ **und** $-a = v_2$

1.2.4 Zusammenfassung: $\mathbb{R}^n$ als Punktmenge und Vektorraum

Es existieren zwei Interpretationen für dasselbe Symbol $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n : \begin{cases} \textbf{Punktemenge} \\ \textbf{Vektorraum: Vektoren}, +, \lambda \cdot v \end{cases}$$

Wir werden Vektoren nicht als $\vec{v}$ bezeichnen. Stattdessen:

- **Vektoren als kleine lateinische Buchstaben.**
- **Skalare als kleine griechische Buchstaben.**
- **Punkte als große lateinische Buchstaben**

Obige Notation gilt in der Regel. Wie immer wird es Ausnahmen geben.

1.2.5 An- beziehungsweise Abtragen von Vektoren

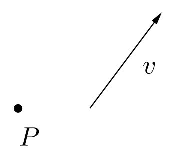

Abbildung I-18: Ein Punkt P und ein Vektor v

Um den Vektor v am Punkt P abzutragen verschieben wir ihn:

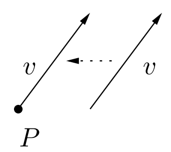

Abbildung I-19: Vektor v abgetragen am Punkt P

Formelmäßig:

$$\begin{aligned} P + v &= (p_1, \ldots, p_n) + (v_1, \ldots, v_n) \\ &= (p_1 + v_1, \ldots, p_n + v_n) \end{aligned}$$

P ist ein Punkt, v ist ein Vektor, $(p_1 + v_1, \ldots, p_n + v_n)$ ist wiederum ein Punkt.
Für den $\mathbb{R}^n$ ist auch folgende Schreibweise möglich:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese Variante wird auch als Spaltenraum bezeichnet. Der Spaltenraum hat dieselbe Bedeutung wie der Zeilenraum und ist nur eine schreibtechnische Variante.

1.2.6 Geraden im $\mathbb{R}^n$

Sei $v \neq 0$. Für die Gerade in der Parameterdastellung gilt:

$$g_{P;v} = \{P + \lambda \cdot v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} =: P + \mathbb{R}\, v$$

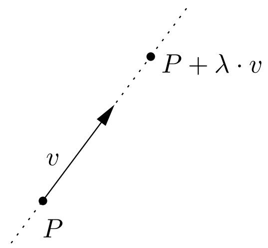

Abbildung I-20: Eine Gerade im $\mathbb{R}^n$

1.2.7 Satz (I.2.3): Durch $P, Q,\ P \neq Q$ geht genau eine Gerade.

<u>Beweis</u>: Analog zum Beweis von (I.2.5).

1.2.8 Satz (I.2.4)

$g \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Gerade genau dann, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$ gibt mit

$$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$$

Obige Geradengleichung wird als "Gleichungsform" bezeichnet.
<u>Beweis</u>: Analog zum Beweis von (I.2.6).

1.2.9 Anmerkung zur Notation von Mengen

$A \subseteq B$: Jedes $a \in A$ ist auch in B enthalten $\Rightarrow$ A ist eine Teilmenge von B.
$A \subset B$ hat zwei Bedeutungen: Teilmenge beziehungsweise echte Teilmenge: $A \subseteq B, A \neq B$
Aufgrund dieser Doppelbedeutung werden wir die Notation $A \subset B$ nicht verwenden.
Für eine echte Teilmenge schreiben wir: $A \subsetneq B$.

1.2.10 Ebenen im $\mathbb{R}^n$

Intuitiv: Eine Ebene benötigt zwei unabhängige Richtungsvektoren:

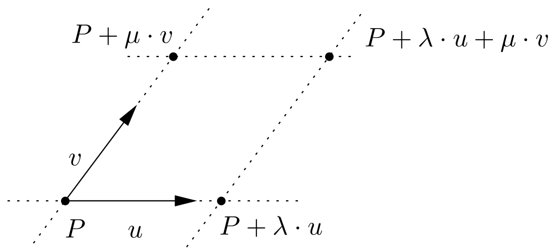

Abbildung I-21: Eine Ebene im $\mathbb{R}^n$

1.2.11 Definition (I.2.a): Ebene

Gegeben $P \in \mathbb{R}^n$, linear unabhängige Vektoren u, v. Dann heißt

$$E_{P;u,v} = \{P + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} = P + \mathbb{R}\,u + \mathbb{R}\,v$$

die Ebene welche durch u und v aufgespannt wird.

1.2.12 Definition (I.2.b): Die triviale Darstellung der Null

Die triviale Darstellung der Null lautet: $0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_k = 0$

1.2.13 Definiton (I.2.c): Begriff der linearen und nicht linearen Abhängigkeit

Begriff der linearen Abhängigkeit: $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn aus einer Relation $\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, k$ stets folgt: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
<u>1. Definition:</u> Gegeben $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. **u, v sind linear unabhängig (lin. unabh.) $:\Leftrightarrow$ $u \neq 0, v \neq 0$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ gilt $v \neq \lambda \cdot u$.**
2. **Bessere Definition: u, v sind linear unabhängig $:\Leftrightarrow$ aus $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$ folgt stets $\alpha = \beta = 0$.**

Nun wollen wir die Äquivalenz dieser beiden Definitionen beweisen. Da wird die Äquivalenz zeigen wollen gehen wir folgendermaßen vor:

- **Aus 1. Definition $\Rightarrow$ 2. Definition. Aus 2. Definition $\Rightarrow$ 1. Definition.**
- **$\Rightarrow$ (1. Definition $\Leftrightarrow$ 2. Definition).**

"1. Definition $\Rightarrow$ 2. Definition":
Zu zeigen: sind Vektoren nach der 1. Definition linear unabhängig, so sind sie auch nach der 2. Definition linear unabhängig:
Seien u, v linear unabhängig gemäß 1. Definition, sei $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$. Zu zeigen: $\alpha = \beta = 0$.
Wir führen nun einen Beweis durch Widerspruch: Annahme: nicht $\alpha = \beta = 0$, also $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$.
Sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$. Daraus folgt:

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot u = -\beta \cdot v0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot v$$

Falls $\beta = 0$ folgt: $u = 0 \Rightarrow$ Widerspruch zur 1. Definition.
Falls $\beta \neq 0$ folgt: $u = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot v \Rightarrow$ Widerspruch zur 1. Definition.
Also bleibt der Fall $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Dann folgt: $\beta \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$
Situation: $v = 0$. $\Rightarrow$ Widerspruch zur 1. Definition.
"2. Definition $\Rightarrow$ 1. Definition": Selbst oder nie.
<u>2. Definition:</u> Gegeben: $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$. $u_1, \ldots, u_k$ heißen linear unabhängig, wenn aus (einer Relation) $\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$ stets folgt: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

3. Definition: $u_1, \ldots, u_k$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nicht alle $\alpha_i = 0$ mit

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$$

(0 ist nicht-trivial darstellbar als *L*inear*K*ombination von $u_1, \ldots, u_k$).
$(*)$
$\Leftrightarrow$ **es gibt i mit u_i ist LK (Linearkombination) der Vektoren $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k$.**
Beweis von $(*)$. Beweis der Äquivalenzaussage durch $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$.
"$\Rightarrow$":
Nach Voraussetzung: $\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$ und ein $\alpha_i \neq 0$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} + \alpha_i \cdot u_i + \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \ldots + \alpha_k \cdot u_k \\
a_i \cdot u_i &= -\alpha_1 \cdot u_1 - \ldots - \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} - \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} - \ldots - \alpha_k \cdot u_k \\
u_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot u_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot u_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot u_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \cdot u_k
\end{aligned}$$

u_i ist also eine LK der Vektoren $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_k$. $\Rightarrow$ Behauptung.
"$\Leftarrow$":
Nach Voraussetzung gibt es u_i, so daß u_i LK von $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_k$. Also:

$$u_i = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \ldots \alpha_k \cdot u_k$$

Addition von $(-u_i)$ auf beiden Seiten ergibt:

$$0 = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} + (-u_1) + \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \ldots \alpha_k \cdot u_k$$

Der Koeffizient $\alpha_i = -1 \neq 0$. Das heißt: Null ist nicht trivial dargestellt. $\Rightarrow$ Behauptung.

1.2.14 Beispiel: lineare Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Vektoren

Gegeben seien $u_1 = (1, 2)\,, u_2 = (2, 4)\,, u_3 = (1, 5)$.
Fragen:

1. **Sind u_1, u_3 linear unabhängig?**
2. **Sind u_1, u_2 linear abhängig?**

zu 1) Sei $\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_3 = (0, 0)$. Also: $(\alpha, 2\alpha) + (\beta, 5\beta) = (0, 0)$. Das heißt:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 0 \\
2\alpha + 5\beta &= 0
\end{aligned}$$

Man hat die Lösungen dieses Gleichungssystems zu untersuchen. Die erste Gleichung liefert: $\alpha = -\beta$. Einsetzen der Lösung der ersten Gleichung in die zweite Gleichung liefert: $-2\beta + 5\beta = 0 \Rightarrow 3\beta = 0$. Also folgt aus dem Gleichungssystem: $\alpha = 0, \beta = 0$. Das Gleichungssystem hat also nur die triviale Lösung. Damit sind u_1, u_3 linear unabhängig.
zu 2) Es gilt: $\alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (2, 4) = (0, 0)$. Dies ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\alpha + 2\beta &= 0 \\
2\alpha + 4\beta &= 0
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nicht triviale Lösungen. Beispiel $\alpha = -2, \beta = 1$.
Nun wollen wir noch einmal Ebenen genauer betrachten:

$$E = E_{P;u,v} = P + \mathbb{R}\,u + \mathbb{R}\,v$$

Jetzt wollen wir wie in Satz (I.2.3) und (I.2.4) für die Gerade analoge Aussagen für die Ebene beweisen.

1.2.15 Satz (I.2.5)

Durch drei nicht kollineare Punkte gibt es genau eine Ebene.

1.2.16 Satz (I.2.6)

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ **ist Ebene genau dann, wenn es** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **gibt mit**

(i) $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

(ii) $E = \{ (x, y, z) | \, ax + by + cz = d \}$

1.2.17 Satz $(\mathbf{I}.2.6)'$

$g \subseteq \mathbb{R}^3$ **ist Gerade genau dann, wenn es** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **und** $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ **gibt mit:**

(i) $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ **und** $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$**.**

(ii) $g = \{ (x, y, z) | \, ax + by + cz = d, a'x + b'y + c'z = d \}$

Wir werden Satz (I.2.6′) nicht beweisen. Eine Gerade im Raum wir durch zwei sich schneidende Ebenen definiert, die nicht parallel oder identisch sein dürfen.

1.2.18 Theorie zur linearen Unabhängigkeit von Basen

Vorbereitung: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$**. Die Determinante einer** 2×2**-Matrix ist definiert als:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad = \quad a \cdot d - b \cdot c$$

Behauptung:

(i) $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ **sind linear unabhängig** $\quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$

(ii) $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ **sind linear unabhängig** $\quad \Leftrightarrow \quad \exists i, j$ **mit** $i \neq j$**:**

$$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = a_i \cdot b_j - a_j \cdot b_i \neq 0$$

Beweis zu (i)**:**
"$\Leftarrow$"
Sei $\alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (c, d) = (0, 0)$ **Nun können wir folgendes Gleichungssystem aufstellen:**

$$\begin{array}{rrcl} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & 0 \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & 0 \end{array}$$

Nun multiplizieren wir I **mit** b **und** II **mit** a **und erhalten:**

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & 0 & | \cdot b \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & 0 & | \cdot a \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc & = & 0 & \\ \wedge & \alpha \cdot ab + \beta \cdot ad & = & 0 & \end{array}$$

Nun bilden wir die Differenz der beiden Gleichung:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc - (\alpha \cdot ab + \beta \cdot ad) & = & 0 - 0 \\ \Leftrightarrow & \beta \cdot (bc - ad) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (-1) \cdot \beta \cdot (bc - ad) & = & (-1) \cdot 0 \\ \Leftrightarrow & \beta \cdot (ad - bc) & = & 0 \end{array}$$

Laut Voraussetzung ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$.

Für α **gehen wir nun analog vor:**

Nun multiplizieren wir I **mit** d **und** II **mit** c **und erhalten:**

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & 0 & |\cdot d \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & 0 & |\cdot c \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ad + \beta \cdot cd & = & 0 & \\ \wedge & \alpha \cdot bc + \beta \cdot cd & = & 0 & \end{array}$$

Nun bilden wir die Differenz der beiden Gleichung:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \alpha \cdot ad + \beta \cdot cd - (\alpha \cdot bc + \beta \cdot cd) & = & 0 - 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot (ad - bc) & = & 0 \end{array}$$

Laut Voraussetzung ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Das Gleichungssystem hat nur eine triviale Lösung.

“$\Rightarrow$” (mittels Widerspruchbeweis)

Angenommen $a \cdot d - b \cdot c = 0$. **Hieraus ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen zu zeigen.**

Nach der Voraussetzung gilt: $(a, b) \neq (0, 0), (c, d) \neq (0, 0)$. **Nun nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:**

- **Fall** $a \neq 0$. **Nun gilt für** d**:**

  $$a \cdot d - b \cdot c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{b}{a} \cdot c$$

  Nun setzen wir das d **in den Vektor** (c, d) **ein und erhalten:**

  $$(c, d) = \left(c, \frac{b}{a} \cdot c\right) = c \cdot \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a} \cdot (a, b)$$

  Also sind die Vektoren linear abhängig. Widerspruch zur Voraussetzung.

- **Fall** $b \neq 0$. **Dito (Nach** c **auflösen).**

Beweis zu (ii)**:**

“$\Leftarrow$”

Gegeben sei $\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) + \beta \cdot (b_1, \ldots, b_n) = 0$. **Nun betrachten wir die** i**-te und** j**-te Position der Vektoren:**

$$\begin{array}{rcl} \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i & = & 0 \\ \alpha \cdot a_j + \beta \cdot b_j & = & 0 \end{array}$$

Wir erhalten: $\alpha \cdot (a_i, a_j) + \beta \cdot (b_i, b_j) = 0$

Nach (i) **gilt:** $\alpha = \beta = 0$.

“$\Rightarrow$”

selbst, oder in den Übungen und Tutorien.

1.2.19 Beispiele für lineare Unabhängigkeit

Sei $i = 2, j = 10$. Also $\begin{vmatrix} a_2 & a_{10} \\ b_2 & b_{10} \end{vmatrix} \neq 0$

Insgesamt gibt es $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ **verschiedene** 2×2 **Determinanten.**

Beispiel: $\alpha_1 \cdot (1,2,3) + \alpha_2 \cdot (0,6,7) + \alpha_3 \cdot (6,1,4) = 0 = (0,0,0)$

Bemerkung: Aus dem Kontext heraus wird klar, daß mit der "0" ein Vektor gemeint ist.

Wir erhalten ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 6 \cdot \alpha_3 &= 0 \\ 2 \cdot \alpha_1 + 6 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 &= 0 \\ 3 \cdot \alpha_1 + 7 \cdot \alpha_2 + 4 \cdot \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Man hat nun das Gleichungssystem zu untersuchen; für lineare Unabhängigkeit ist zu zeigen, daß das Gleichungssystem nur eine triviale Lösung hat.

1.2.20 Definition (I.2.d): Basen im $\mathbb{R}^n$

Basen: u, v **Basen im** $\mathbb{R}^2 :\Leftrightarrow$

(i) u, v **sind linear unabhängig**

(ii) jedes $w \in \mathbb{R}^2$ **ist LK von** u, v, **das heißt es existieren** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **mit** $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$.

Beispiel: Seien $u = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ **und** $v = \mathbf{e}_2 = (0,1)$.

Für einen beliebigen Vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **gilt:** $(a,b) = a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}_2$.

Behauptung: Aus (i) **folgt** (ii).

Gegeben: linear unabhängige Vektoren u, v **mit** $u = (a,b)$, $v = (c,d)$. **Zudem sei ein Vektor** w **gegeben mit** $w = (r,s)$.

Zu finden sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **mit** $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$ **gegeben.**

Das heißt: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a + \beta \cdot c &= r \\ \alpha \cdot b + \beta \cdot d &= s \end{aligned}$$

ist nach α, β **auflösbar unter der Voraussetzung, daß** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. **Zuerst formen wir das Gleichungssystem um:**

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c &=& r & |\cdot d \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d &=& s & |\cdot c \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ad + \beta \cdot cd &=& rd & \\ \wedge & \alpha \cdot bc + \beta \cdot cd &=& sc & \end{array}$$

Nun subtrahieren wir die Gleichungen voneinander und erhalten:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \alpha \cdot ad + \beta \cdot cd - (\alpha \cdot bc + \beta \cdot cd) &=& rd - sc \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot (ad - bc) &=& rd - sc \end{array}$$

Nun schreiben wir die Terme als Determinanten um:

$$\alpha \cdot (ad - bc) = rd - sc \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ c & d \end{vmatrix}$$

Für α ergibt sich:$\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} r & s \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$**, wobei laut Voraussetzung** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$**.**

Wir verfahren analog für β:

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & r & |\cdot b \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & s & |\cdot a \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc & = & br & \\ \wedge & \alpha \cdot ab + \beta \cdot ad & = & as & \end{array}$$

Nun subtrahieren wir die Gleichungen voneinander und erhalten:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc - (\alpha \cdot ab + \beta \cdot ad) & = & br - as \\ \Leftrightarrow & \beta \cdot (bc - ad) & = & br - as \\ \Leftrightarrow & \beta \cdot (ad - bc) & = & as - br \end{array}$$

Nun schreiben wir die Terme als Determinanten um:

$$\Leftrightarrow \quad \beta \cdot (ad - bc) = as - br \quad \Leftrightarrow \quad \beta \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix}$$

Für β ergibt sich: $\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$**, wobei laut Voraussetzung** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$**.**

Bisher: Gibt es eine Lösung α, β von $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$, so sind α, β eindeutig.
Durch nachrechnen ergibt sich, daß die angegebenen α, β die Lösung sind.
u, v, w **Basen im** $\mathbb{R}^3 :\Leftrightarrow$

(i) u, v, w **sind linear unabhängig**

(ii) jedes $z \in \mathbb{R}^3$ **ist LK von** u, v, w**, das heißt es existieren** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ **mit**

$$z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$$

Beispiel: Seien $u = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $v = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ **und** $w = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$
Für einen beliebigen Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ **gilt:** $(a, b, c) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3$**.**
Behauptung: Aus (i) folgt (ii) (Ohne Beweis $\Rightarrow$ später in allgemeiner Form).
Zusatz: $z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$, α, β, γ **sind eindeutig.**

1.2.21 Basisergänzung im $\mathbb{R}^3$

Seien u, v linear unabhängig, dann gibt es $w \in \mathbb{R}^3$, so daß u, v, w eine Basis bilden.
Beweis: Zur Verdeutlichung eine Illustration:

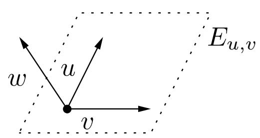

Abbildung I-22: u, v, w bilden eine Basis

Für w muß gelten: $w \notin E_{0;u,v}$.
Später werden wir noch systematisch an die Basisergänzung herangehen - dieses Beispiel ist nur ein Vorgeschmackt.

1.2.22 Beweis von Satz (I.2.5)

Zur Erinnerung: Durch 3 nicht kollineare Punkte P, Q, R geht genau eine Ebene E mit:

$$E = E_{P;\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}}$$

Beweis:

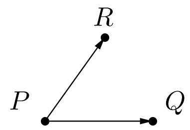

Abbildung I-23: P, Q, R sind nicht kollinear

P, Q, R sind nicht kollinear $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ sind linear unabhängig. Damit ist $E_{P;\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}}$ eine Ebene, die die Punkte P, Q, R enthält.

Die Eindeutigkeit der Ebene zeigt man ungefähr so wie bei der Gerade (Aufgabe auf Übungsblatt 3, Aufgabe 2).

1.2.23 Beweis von Satz (I.2.6)

Zur Erinnerung: Die Ebene ist in Gleichungsform gegeben durch:

$$ax + by + cz = d \quad \textbf{mit} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Beweis: Zuerst überführen wir die Gleichung in die Parameterdarstellung.

Da $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ laut Voraussetzung sei OE (*O*hne *E*inschränkung) $a \neq 0$. Lösen wir die Ebenengleichung nach x auf, so erhalten wir:

$$ax + by + cz = d \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z$$

Nun Setzen wir x für den Punkt $P = (x, y, z)$ ein. Es gilt:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \left(\frac{d}{a} - \frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z, y, z\right) \\ &= \left(\frac{d}{a}, 0, 0\right) + y \cdot \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right) + z \cdot \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right) \\ &= \left(\frac{d}{a}, 0, 0\right) + \frac{y}{a} \cdot (-b, a, 0) + \frac{z}{a} \cdot (-c, 0, a)\end{aligned}$$

y und z sind beliebig. Daher erfüllt P die Gleichung:

$$P \in E_{(\frac{d}{a},0,0);(-b,a,0),(-c,0,a)}$$

Notation: das Semikolon hinter dem Stützvektor trennt diesen von den Richtungsvektoren.

1.2.24 Wandlung der Parameterdarstellung einer Ebene in eine Gleichung

Es gibt mehrere Möglichkeiten:

- **Determinantengleichungen (später)**
- **Kreuzprodukt, Hesse Normalform ((I.3.2))**
- **unter Verwendung von Satz (I.2.6)**

Gegeben sei $E = E_{P;u,v}$ und seien u, v linear unabhängig.
Ergänze u, v zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$. Das heißt für jeden Vektor z:

$$z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$$

Ist $Q \in E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$, dann $Q \in E \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_Q = 0$.
Sei $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$. Nun gilt für $\overrightarrow{PQ}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= Q - P \\
&= (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \\
&= (q_1 - p_1) \cdot e_1 + (q_2 - p_2) \cdot e_2 + (q_3 - p_3) \cdot e_3
\end{aligned}$$

Nun setzen wir für die Basen e_1, e_2, e_3 folgendes ein:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \alpha_1 \cdot u + \beta_1 \cdot v + \gamma_1 \cdot w \\
e_2 &= \alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot v + \gamma_2 \cdot w \\
e_3 &= \alpha_3 \cdot u + \beta_3 \cdot v + \gamma_3 \cdot w
\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= (q_1 - p_1) \cdot e_1 + (q_2 - p_2) \cdot e_2 + (q_3 - p_3) \cdot e_3 \\
&= (q_1 - p_1) \cdot (\alpha_1 \cdot u + \beta_1 \cdot v + \gamma_1 \cdot w) + (q_2 - p_2) \cdot (\alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot v + \gamma_2 \cdot w) \\
&\quad + (q_3 - p_3) \cdot (\alpha_3 \cdot u + \beta_3 \cdot v + \gamma_3 \cdot w)
\end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir aus und erhalten:

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \underbrace{[(q_1 - p_1) \cdot \gamma_1 + (q_2 - p_2) \cdot \gamma_2 + (q_3 - p_3) \cdot \gamma_3]}_{\gamma_Q} \cdot w$$

$Q \in E \Leftrightarrow \gamma_Q = 0$.
Unbekannt sind q_1, q_2, q_3. Es gilt:

$$q_1 \cdot \gamma_1 + q_2 \cdot \gamma_2 + q_3 \cdot \gamma_3 = p_1 \cdot \gamma_1 + p_2 \cdot \gamma_2 + p_3 \cdot \gamma_3$$

1.2.25 Definition (I.2.e): k-dimensionaler affinen Unterraum

Wir definieren einen k-dimensionaler affinen Unterraum als

$$P + \mathbb{R}u_1 + \ldots + \mathbb{R}u_k \quad \textbf{wobei} \quad u_1, \ldots, u_k \ \textbf{linear unabhängig sind}$$

Die beiden einfachsten Fälle sind uns schon unter anderen Namen bekannt:

- **1-dimensional: Gerade: $P + \mathbb{R}\,u$, $u \neq 0$ ($\Leftrightarrow u$ linear unabhängig).**
- **2-dimensional: Ebene: $P + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, u, v linear unabhängig.**

1.3 Kapitel (I.3): Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Definition (I.3.a): Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$**:** $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ **dabei** $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

1.3.2 Definition (I.3.b): Norm eines Vektors

Die Norm eines Vektors x **definieren wir mit Hilfe des Skalarproduktes:** $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **Eigenschaften der Norm:**

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(ii) $\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$ **und** $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$

(iii) $\langle \alpha \cdot x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$ **und** $\langle x, \alpha \cdot y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$

(iv) Ungleichung von Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x, y\rangle| \quad \leq \quad \|x\| \cdot \|y\|$$

Zusatz: Gleichheit gilt in der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung (CSU**) falls die Vektoren linear abhängig sind.**

(v) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

(vi) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(vii) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Die Beweise für (i)**-**(iii) **erfolgten auf dem Übungsblatt 1.**
Zu (iv)**: Beweis der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung. Behauptung**

$$|\langle (x, y), (x', y')\rangle| = |x \cdot x' + y \cdot y'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Zuerst wollen wir einfach mal ein paar Werte ausprobieren:
Wähle $x = (2, 7)$, $y = (1, -4)$. **Einsetzen liefert:**

$$|\langle (2, 7), (1, -4)\rangle| = |2 - 28| = 26 \leq \sqrt{53} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{2^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^1 + (-4)^2}$$

In diesem Fall ist die Ungleichung erfüllt.
Hier nun der allgemeine Beweis:
Wir nehmen zuerst eine Fallunterscheidung vor:
1. Fall $y = 0$ **(**0 **ist Vektor!):**

$$|\langle x, 0\rangle| \leq \|x\| \cdot \|0\| \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 0 \leq \|x\| \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 0$$

2. Fall $y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|y\| \neq 0$
Nun berechnen wir folgendes Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle &\overset{(ii)}{=} \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\ &\overset{(iii)}{=} \langle x, x\rangle + 2\lambda \cdot \langle x, y\rangle + \lambda^2 \cdot \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

λ ist beliebig. Wir erhalten eine Gleichung, die große Ähnlichkeit zu einer quadratischen Gleichung aufweist. Wir nehmen nun eine quadratische Ergänzung vor:

$$\begin{aligned}
& \langle x,x\rangle + 2\lambda\cdot\langle x,y\rangle + \lambda^2\cdot\langle y,y\rangle \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right] + \langle x,x\rangle \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2 - \left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2\right] + \langle x,x\rangle \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2\right] + \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\cdot\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2 \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right]^2 + \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right]^2 + \frac{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}
\end{aligned}$$

Nun wählen wir λ mit $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Wir setzen ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
& 0 && \le \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle y,y\rangle\cdot \underbrace{\left[-\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right]^2}_{=0} + \frac{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 && \le \frac{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 && \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \langle x,y\rangle^2 && \le \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |\langle x,y\rangle| && \le \|x\|\cdot\|y\|
\end{aligned}$$

Anmerkung: Eine Norm ist immer positiv. Daher können wir den Betrag weglassen.

Noch zu zeigen: "Gleichheit" $\Leftrightarrow x,y$ sind linear abhängig.

"$\Leftarrow$" (Leicht)

Wähle $x = 0$. Einsetzen liefert:

$$|\langle 0,y\rangle| \le \|0\|\cdot\|y\| \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n} 0\cdot y_i \le 0\cdot\|y\| \quad\Leftrightarrow\quad 0 \le 0$$

Wähle $x \neq 0$. Dann folgt aufgrund der linearen Abhängigkeit: $y = \alpha\cdot x$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
& |\langle x,y\rangle| && \le && \|x\|\cdot\|y\| \\
\Leftrightarrow \quad & |\langle x,\alpha\cdot x\rangle| && \le && \|x\|\cdot\|\alpha\cdot x\| \\
\Leftrightarrow \quad & |\alpha\cdot\langle x,x\rangle| && \le && \|x\|\cdot|\alpha|\cdot\|x\| \\
\Leftrightarrow \quad & |\alpha|\cdot|\langle x,x\rangle| && \le && |\alpha|\cdot\|x\|\cdot\|x\| \\
\Leftrightarrow \quad & |\alpha|\cdot\|x\|^2 && \le && |\alpha|\cdot\|x\|^2
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$"

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1. Fall $y = 0 \quad\Rightarrow\quad x,y$ sind linear abhängig nach Definition der linearen Abhängigkeit.

2. Fall $y \neq 0$. Zudem wird Gleichheit angenommen. Nach $(*)$ folgt (Wurzel ziehen!):

$$\|x + \lambda y\| \quad = \quad \|y\| \cdot \left[\lambda + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right]$$

Anmerkung: $\dfrac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} = \dfrac{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}$

Ist nun die Gleichheit von $\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = \langle x, y\rangle^2 \Leftrightarrow \|x\| \cdot \|y\| = |\langle x, y\rangle|$ angenommen, so gilt:

$$\frac{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} \quad = \quad 0$$

λ ist beliebig.Wir setzen $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ und erhalten:

$$\|x + \lambda y\| = \|y\| \cdot \left[\lambda + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right] = \|y\| \cdot \underbrace{\left[-\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right]}_{=0} = 0$$

Wir haben (v), (vi), da diese direkt aus den Definitionen folgen.
Zu (vii) folgt aus der CSU. Idee:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2 \cdot \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

Ergebnis der obigen Umformung in die CSU einsetzen.

Praktische Bedeutung des Skalarproduktes und der Norm

1.3.3 Abstand von $P, Q \in \mathbb{R}^n$

Hier am Beispiel für $n = 2$:

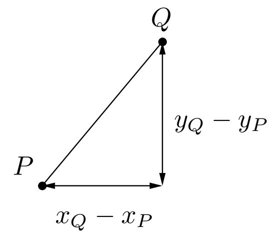

Abbildung I-24: Abstand zweier Punkte im $\mathbb{R}^2$

In diesem Fall gilt für den Abstand von P und Q (nach Pythagoras):

$$\mathbf{d}(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

1.3.4 Winkel zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$: $\measuredangle(u, v)$

Es gilt: $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\measuredangle(u, v)$

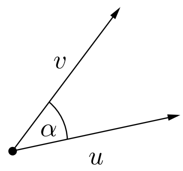

Abbildung I-25: Winkel zwischen u und v

(gilt laut Schule)
Nun Ausdehnung auf den $\mathbb{R}^n$: Nach CSU gilt:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Nun definieren wir:

$$\cos(\measuredangle(u, v)) := \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \textbf{wobei} \quad \measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$$

1.3.5 Satz (I.3.1): Der Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

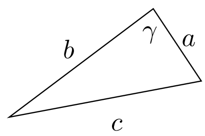

Abbildung I-26: Der Cosinussatz im $\mathbb{R}^2$

Beweis für den $\mathbb{R}^n$:

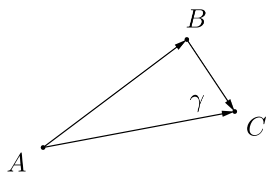

Abbildung I-27: Der Cosinussatz im $\mathbb{R}^n$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\
\Rightarrow \quad c^2 &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 \\
&= \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle^2 = \left\langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \right\rangle^2 \\
&= \underbrace{\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \right\rangle}_{= a^2} + 2 \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB} \right\rangle}_{= b^2} \\
&= a^2 + b^2 + 2 \cdot ab \cdot \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)
\end{aligned}$$

Betrachtung des Winkels:

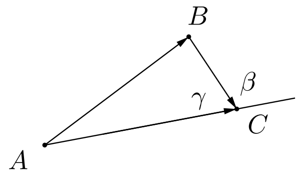

Abbildung I-28: $\beta = \measuredangle (AC, CB)$

Es gilt $(\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha))$**:**

$$\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) \quad = \quad -\cos\gamma$$

Wir setzen ein und erhalten:

$$c^2 \quad = \quad a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos\gamma$$

1.3.6 Orthogonalität von Vektoren

Seien $u, v \neq 0$. **Nun gilt:** $\langle u, v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \perp v$.
Grundaufgabe: Zu gegebenen $u, v, \ldots$ **finde** x **mit** $u \perp x, v \perp x, \ldots$

1.3.7 Definition (I.3.c): Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$

Das Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ **definiert. Gegeben seien** $x = (a_1, a_2, a_3)$, $y = (b_1, b_2, b_3)$.
Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist definiert als:

$$x \times y \quad = \quad \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Wir gehen bei den Determinanten zyklisch vor. Beachte die zweite Position.

1.3.8 Satz (I.3.2):

Seien x, y linear unabhängig. Dann gilt:

(i) $v \perp x, y \quad \Leftrightarrow \quad v = \alpha \cdot (x \times y)$ **für ein** $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin(\measuredangle(x, y))$

Die geometrische Bedeutung von (ii): Die Fläche des Parallelogramms, das durch x und y aufgespannt wird:

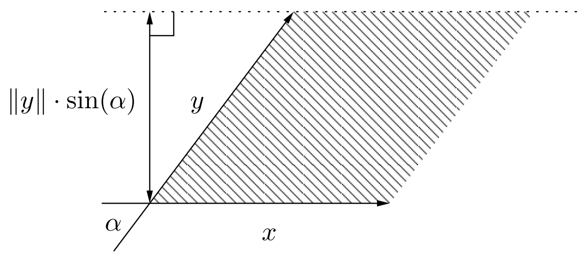

Abbildung I-29: $\|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \measuredangle(x, y)$

1.3.9 Hessesche Normalenform der Ebene

Betrachtung der Ebene gegeben in Parameterdarstellung:

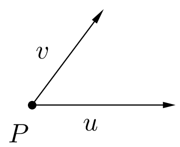

Abbildung I-30: Parameterform der Ebene: $E = P + \mathbb{R} \cdot u + \mathbb{R} \cdot v$

Idee: Wir ersetzen u und v durch einen auf ihnen senkrecht stehenden Vektor:

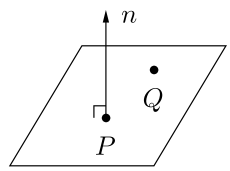

Abbildung I-31: Hessesche Normalform der Ebene: $E : \langle x, n \rangle = d$

Der Normalenvektor der Ebene n_E steht senkrecht auf u, v: $n \perp u, v$. Das heißt:

$$\langle n, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha \cdot \langle n, u \rangle + \beta \cdot \langle n, v \rangle = 0$$

Eine Möglichkeit n_E zu berechnen ist $n = u \times v$.
Nun betrachten wir einen Punkt $Q = (x, y, z)$. Für P gilt: $P(a, b, c)$. Nun gilt:

$$Q \in E \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \perp n \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle n, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

Man erhält die Hessesche Normalform der Ebene:

$$\langle n, P \rangle = \langle n, Q \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle n, (a, b, c) \rangle = \langle n, (x, y, z) \rangle$$