Kapitel III: Lineare Abbildungen und Matrizen

3.1 Kapitel (III.1): Grundbegriffe

3.1.1 Definition (III.1.a): Vektorraumhomomorphismus

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann heißt $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-linear (auch "Vektorraumhomomorphismus" oder "$\mathbb{K}$-lineare Transformation") wenn folgendes gilt:

(i) $\forall v, w \in \mathbf{V}$**:** $f(v + w) = f(v) + f(w)$

(ii) $\forall v \in \mathbf{V}$**,** $\forall \alpha \in \mathbb{K}$**:** $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$

Zusammengefaßt: $f(\alpha v + \beta w) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w)$

3.1.2 Beispiele für Vektorraumhomomorphismen

(a) $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W} : v \mapsto 0 = 0_{\mathbf{W}}$ **ist eine lineare Abbildung, denn**

$$f(v + w) = 0_{\mathbf{W}} \quad \textbf{und} \quad f(v) + f(w) = 0_{\mathbf{W}} + 0_{\mathbf{W}} = 0_{\mathbf{W}}$$

beziehungsweise

$$f(\alpha \cdot v) = 0_{\mathbf{W}} \quad \textbf{und} \quad \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot 0_{\mathbf{W}} = 0_{\mathbf{W}}$$

Diese linear Abbildung wird als "Nullabbildung" bezeichnet.

(b) $\mathbf{V} = \mathbb{K}$**,** $\mathbf{W}$ **beliebig,** $w \in \mathbf{W}$ **mit** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W} : \lambda \mapsto \lambda \cdot w$ **ist eine lineare Abbildung, denn**

$$f(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu) \cdot w = \lambda \cdot w + \mu \cdot w = f(\lambda) + f(\mu)$$

beziehungsweise

$$f(\alpha \cdot \lambda) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot w = \alpha \cdot (\lambda \cdot w) = \alpha \cdot f(\lambda)$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbf{V}$ **und** $\alpha \in \mathbb{K}$ **(Skalar)**

(c) Zur Erinnerung $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **(Skalarprodukt). Für** $n = 2$ **gilt:**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot y_i$$

Die Abbildung $\langle x, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **ist $\mathbb{R}$-linear, denn**

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

beziehungsweise

$$\langle x, \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$$

(schon zu Anfang der Vorlesung gezeigt in (**I**.3.1)**)**

(d) Matrizen liefern lineare Abbildungen. Sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ $=$ **Menge der** $m \times n$**-Matrizen:**

$$\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \ni A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

wobei $i = 1, \dots, m$ **und** $j = 1, \dots, n$**.**

a_{ij} **sind die Einträge der Matrize** A**, wobei der erste Index** i **die Zeile und der zweite Index** j **die Spalte bezeichnet.**

$A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **mit**

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_j a_{1j} \cdot x_j, \sum_j a_{2j} \cdot x_j, \dots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \dots, \sum_j a_{mj} \cdot x_j \right)$$

Nehmen wir nun Bezug auf Beispiel (c) so gilt:

$$A = (x_1, \ldots, x_n), \quad f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad f_A(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$$

Später: Jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von der Form $f_A, A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Behauptung: f_A ist $\mathbb{K}$-linear.
Beweis: Seien $x, x' \in \mathbb{K}^n$. Nun gilt:

(1) Für die Addition:

$$\begin{aligned}
f_A(x + x') &= f\left(x_1 + x_1', \ldots, x_j + x_j', \ldots, x_n + x_n'\right) \\
&= \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot \left(x_j + x_j'\right), \ldots\right) \\
&\overset{(*)}{=} \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j + a_{ij} \cdot x_j', \ldots\right) \\
&= \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \ldots\right) + \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j', \ldots\right) \\
&= f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + f\left(x_1', \ldots, x_j', \ldots, x_n'\right) \\
&= f_A(x) + f_A(x')
\end{aligned}$$

(2) Für die skalare Multiplikation:

$$\begin{aligned}
f_A(\alpha \cdot x) &= f_A(\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_j, \ldots, \alpha \cdot x_n) \\
&= \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot (\alpha \cdot x_j), \ldots\right) \\
&\overset{(*)}{=} \left(\ldots, \alpha \cdot \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \ldots\right) \\
&= \alpha \cdot \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \ldots\right) \\
&= \alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&= \alpha \cdot f_A(x)
\end{aligned}$$

Auch hier führen wir die Operationen bei $(*)$ auf $\mathbb{K}$ zurück.

3.1.3 Satz (III.1.1): Eigenschaften linearer Abbildungen

Es gilt:

(i) $f(0_{\mathbf{V}}) = 0_{\mathbf{W}}$

(ii) $f(u-v) = f(u) - f(v)$

Beweise:
Zu (i)**: Es gilt:**

$$f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$$

Subtrahieren wir nun $f(0)$ **so erhalten wir:**

$$f(0) = 0$$

(In dieser Art schon häufig angewendet)
Zu (ii)**: Es gilt:**

$$f(u-v) = f(u+(-v)) = f(u) + f(-v) \overset{?}{=} f(u) + (-f(v)) = f(u) - f(v)$$

Noch zu zeigen: $f(-v) = -f(v)$ **(Ein Homomorphismus respektiert die Inversenbildung)**
Wir können dies auf zwei Arten zeigen:
Mittels Definition (III.1.a.i**):** $f(u+v) := f(u) + f(v)$
Auf diesen Beweis bezogen gilt: $f(v) + f(-v) = f(v+(-v)) = f(v-v) = f(0) = 0$
Nun betrachten wir den ersten und den letzten Term und subtrahieren $f(v)$**:** $\Rightarrow$ $f(-v) = -f(v)$
Mittels Definition (III.1.a.ii**):** $f(\alpha \cdot v) := \alpha \cdot f(v)$
Auf diesen Beweis bezogen gilt: $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$

3.1.4 Satz (III.1.2): Linearität der Summe

Voraussetzung: f **sei linear**
Behauptung:

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot f(v_i)$$

Wir beweisen per Induktion (Skizze):

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i\right) &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot v_i\right) + \lambda_r \cdot v_r\right) \\
&\overset{(*)}{=} f\left(\sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot v_i\right) + f(\lambda_r \cdot v_r) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot f(v_i) + \lambda_r \cdot f(v_r) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot f(v_i)
\end{aligned}$$

Anmerkung: Bei $(*)$ **geht die Linearität, bei** $(**)$ **die Induktionsvoraussetzung ein, fehlt hier in der Skizze ebenso wie die Induktionsverankerung.**

3.1.5 Satz (III.1.3): Isomorphismen zwischen Matrizen und $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen

Zu jeder $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $f = f_A$. Mit anderen Worten:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

"$\simeq$" bedeutet "Isomorphismus"

Beweis: $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \to f_A$

Behauptung: Diese Abbildung ist eine Bijektion.

Um Bijektivität zu beweisen, zeigen wir, daß die Abbildung injektiv und surjektiv ist.

a) Injektivität:

Zu zeigen: $f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad A = B$

Dazu: j**-te Spalte von** $A = f_A(e_j)$ **(als Zeile geschrieben), denn**

$$f_A(e_j) = f_A(0,\ldots,0,1,0,\ldots 0) = \underbrace{(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})}_{j-\textbf{te Spalte}}$$

Aus $f_A(e_1), \ldots, f_A(e_n)$ **wird** A **rekonstruiert, aus** $f_B(e_1), \ldots, f_B(e_n)$ **wird** B **rekonstruiert.**

Daher: Wenn $f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad \forall j$**:** $f_A(e_j) = f_B(e_j) \quad \Rightarrow \quad A = B$

b) Surjektivität:

Gegeben: $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **ist** $\mathbb{K}$**-linear. Falls** $f = f_A$**, dann notwendigerweise:**

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

(Einheitsvektoren als Spalten geschrieben)

Sei $f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ **für** $j = 1, \ldots, n$**. Für die Matrize** A **gilt:**

$$A = (a_{ij}) \quad \textbf{für } i = 1q, \ldots .m \quad \textbf{und} \quad j = 1, \ldots, n$$

Nun gilt für f**:**

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot x_j\right) \\ &= f_A(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Das heißt: $f = f_A$**.**

3.1.6 Definition (III.1.b): Vektorraumhomomorphismus $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$

$\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seien $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir definieren $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$:={$\mathbb{K}$-lineare Abbildungen von V nach W}. Lies "$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$" als "Homomorphismus $\mathbb{K}$ von V nach W":

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \{f : \mathbf{V} \to \mathbf{W} : \mathbb{K} - \mathbf{linear}\}$$

$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Verknüpfungen: $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

(i) $f + g \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ **definiert durch** $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$
Schon gezeigt: $f + g$ **ist $\mathbb{K}$-linear.**

(ii) $\alpha \cdot f \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ **definiert durch** $(\alpha \cdot f)(v) := \alpha \cdot f(v)$
Schon gezeigt: $\alpha \cdot f$ **ist $\mathbb{K}$-linear.**

3.1.7 Satz (III.1.4): $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Für den Beweis ist zu zeigen:

(i) $f + g \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ **und** $\alpha \cdot f \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$

(ii) $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ **ist Abelsche Gruppe**

(iii) **die weiteren Vektorraumaxiome**

Beweise:

Zu (i): $f + g$ ist wieder linear: $(f + g)(v + w) \overset{?}{=} (f + g)(v) + (f + g)(w)$
Für die linke Seite gilt:

$$(f + g)(v + w) \overset{\textbf{Def.}}{=} f(v + w) + g(v + w) \overset{f, g\, \textbf{linear}}{=} f(v) + f(w) + g(v) + g(w)$$

Für die rechte Seite gilt:

$$(f + g)(v) + (f + g)(w) \overset{\textbf{Def.}}{=} f(v) + f(w) + g(v) + g(w)$$

Also ist die linke gleich der rechten Seite.
Kommutativität und Assoziativität sind erfüllt, weil V, W Vektorräume sind.

Noch zu zeigen: $(f + g)(\alpha \cdot v) \overset{?}{=} \alpha \cdot [(f + g)(v)]$
Für die linke Seite gilt:

$$(f + g)(\alpha \cdot v) \overset{\textbf{Def.}}{=} f(\alpha \cdot v) + g(\alpha \cdot v) \overset{f, g\, \textbf{linear}}{=} \alpha \cdot f(v) + \alpha \cdot g(v)$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\alpha \cdot [(f + g)(v)] \overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha \cdot [f(v) + g(v)] \overset{\textbf{Distr.}}{=} \alpha \cdot f(v) + \alpha \cdot g(v)$$

Also ist die linke gleich der rechten Seite.
$\Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ ist linear.

Zu (ii)**: Abelsche Gruppe - zu zeigen:** $(f+g)+h = f+(g+h)$
Zwei Abbildungen sind gleich, falls sie für alle Argumente dieselben Werte liefert. Wähle $v \in \mathbf{V}$ **beliebig.**
Für die linke Seite an der Stelle v **gilt:**

$$(f+g)(v)+h(v) = (f(v)+g(v))+h(v) = f(v)+g(v)+h(v)$$

Nun gilt für die rechte Seite an der Stelle v**:**

$$f(v)+(g+h)(v) = f(v)+(g(v)+h(v)) = f(v)+g(v)+h(v)$$

Also sind die rechte und die linke Seite gleich, daher $(\mathbf{W},+)$ **Gruppe.**
$0 : \mathbf{V} \to \mathbf{W}, \quad v \mapsto 0_{\mathbf{W}}$
Neutrales Element bezüglich der Addition:

$$(f+0)(v) = f(v)+0(v) = f(v)+0_{\mathbf{W}} = f(v)$$

Also: $f+0 = f = 0+f$
Inverses Elemente bezüglich der Addition: $(-f)(v) := -(f)(v)$**:**

$$(f+(-f))(v) = f(v)+(-f(v)) = f(v)-f(v) = 0$$

Zu (iii)**: weitere Vektorraumaxiome:**
Als Beispiel: $[\alpha\cdot(f+g)](v) = [\alpha\cdot f+\alpha\cdot g](v)$**. Es gilt:**

$$\begin{aligned}[\alpha\cdot(f+g)](v) &\overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha\cdot[(f+g)(v)] \overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha\cdot[f(v)+g(v)] \overset{\textbf{Distr.}}{=} \alpha\cdot f(v)+\alpha\cdot g(v)\\ &\overset{\textbf{Def.}}{=} (\alpha\cdot f)(v)+(\alpha\cdot g)(v) \overset{\textbf{Def.}}{=} (\alpha\cdot f+\alpha\cdot g)(v)\end{aligned}$$

Ergebnis: $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **ist wieder** $\mathbb{K}$**-Vektorraum**
Wir können nun auch $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **iterieren und erhalten wieder einen** $\mathbb{K}$**-Vektorraum:**

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{U},\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W}))$$

ist wieder $\mathbb{K}$**-Vektorraum.**

3.1.8 Anmerkungen zum Beweis von Satz (III.1.4)

Es gilt:

- (i)**:** $+,\cdot$ **Verknüpfungen auf** $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$
- (ii) **und** (iii)**: Vektorraumaxiome für die Verknüpfung**

Wir können auch andere Verknüpfungen betrachten. Wir können zum Beispiel definieren:

$$f' + g := f + g^2$$

Aber für $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{W} = \mathbb{R}$ **mit**

$$(f'+g)(v) = f(v)+(g(v))^2$$

handelt es sich nicht mehr um eine lineare Abbildung.

3.1.9 Beispiel: Der Dualraum $\mathbf{V}^*$

Der Dualraum $\mathbf{V}^*$ ist definiert durch $\mathbf{V}^* := \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$
Anmerkung:

> **$\mathbb{K}$ ist (auf natürlichste Weise) $\mathbb{K}$-Vektorraum: $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$.**
>
> $(a) = a$ **(Einstupel)**
>
> **Addition und skalare Multiplikation sind definiert wie üblich**

Sei V definiert durch $\mathbf{V} := \mathbb{K}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{K}\}$
Nun definieren wir die Projektionen π_1, π_2: $\pi_1(a,b) \to a, \quad \pi_2(a,b) \to b$
Bei den Projektionen handelt es sich um lineare Abbildungen , denn:

$$\pi_1(\alpha \cdot (a,b) + \beta \cdot (a',b')) \overset{!}{=} \alpha \cdot \pi_1(a,b) + \beta \cdot \pi_1(a',b')$$

Veranschaulichung der Projektion:

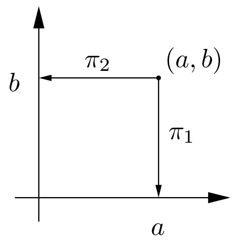

Abbildung III-1: $\pi_1(a,b) = a$ **und** $\pi_2(a,b) = b$

Nachweiß der Linearität:

$$\begin{aligned}
\textbf{linke Seite} &= \pi_1(\alpha \cdot (a,b) + \beta \cdot (a',b')) \\
&= \pi_1(\alpha \cdot a + \beta \cdot a', \alpha \cdot b + \beta \cdot b') \\
&= \alpha \cdot a + \beta \cdot a' \\
&= \alpha \cdot \pi_1(a,b) + \beta \cdot \pi_1(a',b') = \textbf{rechte Seite}
\end{aligned}$$

Weiter: Einige weitere lineare Abbildungen $\lambda : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$.
Sei dazu $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Jedes v hat eine eindeutige Darstellung in dieser Basis:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \quad \textbf{wobei} \quad x_i \in \mathbb{K}$$

Nun gilt: $\lambda_i(v) =: x_i$ (der i-te Koeffizient)
<u>Behauptung</u>: $\lambda_i \in \mathbf{V}^*$
<u>Beweis</u>: Für die Linearität zu zeigen:

(i) $\lambda_i(v + w) = \lambda_i(v) + \lambda_i(w)$

(ii) $\lambda_i(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \lambda_i(v)$

Seien v **und** w **gegeben als Linearkombination:** $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$

Nun gilt: $v + w = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot v_i$

Außerdem gilt: $\lambda_i (v + w) = x_i + y_i = \lambda_i (v) + \lambda_i (w)$**.**

Analog beweisen wir: $\lambda_i (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \lambda_i (v)$

Für die Einheitsbasis e_1, e_2 **gilt:** $(a, b) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = \pi_1 \cdot e_1 + \pi_2 \cdot e_2$**. Also:** $\pi_i = \lambda_i$**.**

Bisher: Basis $v_1, \ldots, v_n$ **liefert lineare Abbildungen** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$

Behauptung: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **ist Basis von** $\mathbf{V}^*$ **(**$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}_{\mathbb{K}} \mathbf{V}^* = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}} \mathbf{V}$**)**

Beweis: Zu zeigen: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Das heißt:**

(i) $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i = 0$ **(Nullabbildung)** $\Rightarrow$ **alle** $\alpha_i = 0$

Einige Eigenschaften der Abbildung λ_i**:**

$\lambda_i (v_i) = 1$**, denn** $v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$

$\lambda_i (v_j) = 0$**, denn** $v_j = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$ **für** $j \neq i$

Symbolische Notation: $\lambda_i (v_j) = \delta_{ij}$**. Wir als Kronecker Symbol bezeichnet:**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Gegeben: $\lambda : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$**. Es gilt:**$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda (v_i)$

$\lambda (v_i) \in \mathbb{K}$ **(es handelt sich um einen Skalar). Es gilt:** $x_i = \lambda_i (v)$**. Setzen wir ein, so erhalten wir:**

$$\lambda (v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v) \cdot \lambda (v_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda (v_i)}_{= \alpha_i \in \mathbb{K}} \cdot \lambda_i (v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda (v_i) \cdot \lambda_i \right) (v)$$

Also: $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda (v_i) \cdot \lambda_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **ist Erzeugendensystem.**

Behauptung: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **sind linear unabhängig.**

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i = 0$**. Setzen wir nun** v_{i_0} **ein, so erhalten wir:**

$$0 = 0 (v_{i_0}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underbrace{\lambda_i (v_{i_0})}_{(*)} = \alpha_{i_0}$$

Anmerkung: Bei $(*)$ **handelt es sich um ein Kroneckersymbol.**

Laut Übungsblatt gilt: $\mathbf{dim}\left(\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)\right)=\mathbf{dim}\left(\mathbf{V}\right)\cdot\mathbf{dim}\left(\mathbf{W}\right)$
Nun:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m\right)=\mathbf{M}_{m,n}\left(\mathbb{K}\right)=\left\{\left(\alpha_{ij}\right),\,\alpha_{ij}\in\mathbb{K}\right\}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\dots&\alpha_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\dots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

wobei $i=1,\dots,m$ und $j=1,\dots,n$.
Nun gilt:

$$\begin{aligned} f_A &\leftarrow\!\!\mapsto A\\ f_A\left(x_1,\dots,x_n\right) &= \left(y_1,\dots,y_n\right)\quad\textbf{wobei}\quad y_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j\end{aligned}$$

Wie kann man sich dies merken?

$$\begin{pmatrix} \\ \leftarrow\quad i-\textbf{te Zeile}\quad\rightarrow\\ \\ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\rightarrow y_i$$

Als Spaltenraum auch als Spaltenvektor geschrieben:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1\cdot v_1+\ldots+x_n\cdot v_n$$

wobei v_i der i-te Spaltenvektor von A ist.
Beweis:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot v_i}_{\textbf{nicht gut!}}=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot v_j}_{\textbf{besser!}}$$

da es sich um den j-ten Spaltenindex handelt. Nun gilt:

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot v_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{ij}\ \ 7\\ \vdots\\ \alpha_{mj}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix}\leftarrow\quad\alpha_{ij}\cdot x_j\quad\rightarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j\end{pmatrix}$$

Anmerkung: Es handelt es sich um jeweils die i-te Spalte.
Nach allgemeinen Überlegungen ist $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m\right)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wegen der Identifizierung mit $\mathbf{M}_{m,n}\left(\mathbb{K}\right)$ gibt es auf $\mathbf{M}_{m,n}\left(\mathbb{K}\right)$ eine $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur.
Wie sieht diese Identifizierung aus?
Addition und skalare Multiplikation:

$A+B$ **wird definiert durch** $f_{A+B}:=f_A+f_B$

$\alpha\cdot A$ **wird definiert durch** $f_{\alpha\cdot A}=\alpha\cdot f_A$

Dazu: $f \rightsquigarrow A =$ beschreibende Matrix. Nun gilt:

$$A = \begin{pmatrix} & \uparrow & \\ & f(e_j) & \\ & \underbrace{\downarrow}_{j-\textbf{te Spalte}} & \end{pmatrix}$$

falls $f = f_A$. Daraus: j-te Spalte von $A + B$: $(f_{A+B})(e_j) = f_A(e_j) + f_B(e_j)$ - sprich die j-te Spalte von A plus die j-te Spalte von B.
Additionsformel:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

wobei $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Hier nun ein Beispiel in $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} \\ \overline{7} & \overline{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{5} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{-1} \end{pmatrix}$$

Die skalare Multiplikation ist analog zu behandeln:

$$\lambda \cdot (\alpha_{ij}) = (\lambda \cdot \alpha_{ij})$$

wobei $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Hier nun ein Beispiel für $\mathbb{R}$:

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 60 & 40 \\ 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.10 Definition (III.1.c): Kern (f) und Bild (f)

$f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ sei $\mathbb{K}$-linear, dann definieren wir

$$\textbf{Kern}(f) := \{v \in \mathbf{V} | : f(v) = 0\}, \quad \textbf{Bild}(f) := \{w \in \mathbf{W} | \exists v \in \mathbf{V} : f(v) = w\}$$

3.1.11 Satz (III.1.5): Kern (f) und Bild (f) sind Untervektorräume

Kern (f) und Bild (f) sind Untervektorräume von V beziehungsweise W.
Um zu zeigen, daß U ein Untervektorraum ist muß gelten:

(i) $\mathbb{K} \cdot \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$

(ii) $\mathbf{U} + \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$

Beweis:
Zu (i)**: Stets für eine lineare Abbildung:** $f(0) = 0 \Rightarrow \{0\} \in \mathbf{Kern}(f)$
Seien $u, v \in \mathbf{Kern}(f)$**, dann gilt:**

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$$

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$**,** $v \in \mathbf{Kern}(f)$**, dann gilt:**

$$f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Zu (ii)**:** $0 \in \mathbf{Bild}(f)$**, da** $f(0) = 0$ **im Allgemeinen für lineare Abbildungen.**
Seien $w, w' \in \mathbf{Bild}(f)$**. Dann gilt:**

$$w = f(v)\,,\; w' = f(v') \Rightarrow w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v') \in \mathbf{Bild}(f)$$

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ **und** $w \in \mathbf{Bild}(f)$**. Dann gilt:**

$$w = f(v) \Rightarrow \alpha \cdot w = \alpha \cdot f(v) = f(\alpha \cdot v) \in \mathbf{Bild}(f)$$

3.1.12 Verknüpfung linearer Abbildungen

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}$ $\mathbb{K}$**-Vektorräume, wobei** h, g $\mathbb{K}$**-linearen Abbildungen sind:**

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbf{W} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{O} \end{tikzcd}$$

Abbildung III-2: Verknüpfung von f und g

Zur Erinnerung: $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

3.1.13 Sätzchen (III.1.6): Sind g, f $\mathbb{K}$-linear, so ist auch $g \circ f$ $\mathbb{K}$-linear.

Beweis:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) &\overset{\textbf{Def.}}{=} g(f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)) \\ &\overset{f\,\textbf{linear}}{=} g \cdot (\alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)) \\ &\overset{g\,\textbf{linear}}{=} \alpha \cdot g(f(u)) + \beta \cdot g(f(v)) \\ &\overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha \cdot ((g \circ f)(u)) + \beta \cdot ((g \circ f)(v)) \end{aligned}$$

3.1.14 Matrizenmultiplikation

Wir hatten:

$$\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

wobei $A \mapsto f_A$ mit

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot x_j \right)$$

Für A gilt in diesem Fall:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Schon gezeigt: Die Abbildung ist bijektiv, denn zu jedem $F \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ existiert genau eine Matrix A mit $F = f_A$ (Siehe (III.1.3))
Nun gilt für die Matrizenaddition: $A + B$ ist definiert durch:

$$f_{A+B} := f_A + f_B$$

dies entspricht der komponentenweise Addition.
Analog ist die skalare Multiplikation einer Matrix definiert:

$$f_{\lambda \cdot A} = \lambda \cdot f_A$$

3.1.15 Definition (III.1.d): Matrizenprodukt

Seien $A \in \mathbf{M}_{m,r}(\mathbb{K}),\ \ B \in \mathbf{M}_{r,n}(\mathbb{K})$. Dann heißt die durch

$$f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$$

eindeutig festgelegte Matrix $A \cdot B$ Matrizenprodukt von A und B:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m,r}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{r,n}(\mathbb{K}) &\to \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B \end{aligned}$$

Sei $A = (\alpha_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, r$ und $B = (\beta_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt:

$$C = A \cdot B = (\gamma_{ij})_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n}}$$

Wähle $j \in \{1, \ldots, n\}$ fest, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ wobei die 1 an der j-ten Stelle steht. Nun gilt:

$$(\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{mj}) = f_{A \cdot B}(e_j) = f_A \circ f_B(e_j) = f_A(\beta_{1j}, \ldots, \beta_{rj}) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{1k} \cdot \beta_{kj}, \ldots, \sum_{k=1}^{r} \alpha_{mk} \cdot \beta_{kj} \right)$$

Das heißt:

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}$$

Hier nun ein Rechenschema für die Matrizenmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\alpha_{i1} \quad\quad \alpha_{ir}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rj} & \cdots \beta_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \boxed{\gamma_{ij}} & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{nm} \end{pmatrix}$$

Abbildung III-3: Rechenschema für die Matrizenmultiplikation

Voraussetzung für eine Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ ist, daß die Spaltenzahl von A der Zeilenzahl von B entspricht.
Hier zwei Beispiele für die Matrizenmultiplikation:
a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ist nicht definiert, daß die Spaltenanzahl von A (3) ungleich der Zeilenzahl von B (2) ist.**
b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.1.16 Satz (III.1.7): Rechenregeln für Matrizen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, A' \in \mathbf{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ und $C \in \mathbf{M}_{r,m}(\mathbb{K})$. Es gilt:

- **(i)** $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ **ist $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.**
- **(ii)** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ **(Eine Art von "Assoziativität")**
- **(iii)** $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ **beziehungsweise** $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$ **(Eine Art von "Distributivität")**
- **(iv)** $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Beweise:
Zu (i): Die Axiome übertragen sich von $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ aus $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ vermöge $f_A \mapsto A$. Es gilt:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots \ddots \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \qquad -(\alpha_{ij}) = (-\alpha_{ij})$$

Der Beweis erfolgt in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 11.
Zu (ii): Es gilt:

$$f_{(A \cdot B) \cdot C} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A \cdot B} \circ f_C \overset{\textbf{Def.}}{=} (f_A \circ f_B) \circ f_C \overset{\textbf{Ass.}}{=} f_A \circ (f_B \circ f_C) \overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ (f_{B \cdot C}) \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A \cdot (B \cdot C)}$$

Da die Funktionen äquivalent sind gilt auch für die Matrizenmultiplikation

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Zu (iii): Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{A \cdot (B + B')} &\overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ f_{B+B'} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ (f_B + f_{B'}) \\ &\overset{f\ \textbf{linear}}{=} f_A \circ f_B + f_A \circ f_{B'} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A \cdot B} + f_{A \cdot B'} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A \cdot B + A \cdot B'} \end{aligned}$$

Da die Funktionen äquivalent sind gilt auch für die Matrizenmultiplikation

$$A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$$

Der zweite Teil des Beweises erfolgt analog.
Zu (iv): Es gilt

$$\begin{aligned} f_{(\lambda \cdot A) \cdot B} &\overset{\textbf{Def.}}{=} f_{\lambda \cdot A} \circ f_B \overset{f \textbf{ linear}}{=} (\lambda \cdot f_A) \circ f_B \\ &\overset{\textbf{Ass.}}{=} \lambda \cdot (f_A \circ f_B) \overset{\textbf{Def.}}{=} \lambda \cdot f_{A \cdot B} \overset{f \textbf{ linear}}{=} f_{\lambda \cdot (A \cdot B)} \end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} f_{(\lambda \cdot A) \cdot B} &\overset{\textbf{Def.}}{=} f_{\lambda \cdot A} \circ f_B \overset{f \textbf{ linear}}{=} (\lambda \cdot f_A) \circ f_B \overset{\textbf{Ass.}}{=} \lambda \cdot (f_A \circ f_B) \\ &\overset{\textbf{Ass.}}{=} f_A \circ (\lambda \cdot f_B) \overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ f_{\lambda \cdot B} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A \cdot (\lambda \cdot B)} \end{aligned}$$

Bemerkung: $(i) - (iv)$ sind auch direkt mit der Formel nachweisbar, dies ist aber sehr aufwendig.

Oft betrachten wir auch folgenden Spezialfall: $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ (quadratische Matrize) ist Ring bezüglich $+, \cdot$ mit "Eins" E_n:

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ist neutral bezüglich der Matrizenmultiplikation (Dies ist einfach nachzurechnen).

Für $n \geq 2$ ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ und besitzt Nullteiler. Hier ein Beispiel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lineare Abbildungen können als Matrizenmultiplikation gedeutet werden:

$$A = \underbrace{(\alpha_{ij})}_{\in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})} \leftrightarrow f_A(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \right)}_{=: (y_1, \dots, y_m)}$$

Dann gilt das folgende Lemma:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

wobei $(x_1, \dots, x_n)$ beziehungsweise $(y_1, \dots, y_m)$ in Form einer $(n \times 1)$ beziehungsweise $(m \times 1)$-Matrix behandelt wird.

Daher: Oft Spaltenvektoren anstatt von n-Tupel.

3.2 Kapitel (III.2): Dimensionsformel und Homomorphiesatz

3.2.1 Definition (III.2.a): Mono-, Epi-, Iso-, Endo- und Automorphismus

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linear. Nun definieren wir:

f **Monomorphismus (monomorph)** $:\Leftrightarrow f$ **injektiv**

f **Epimorphismus (epimorph)** $:\Leftrightarrow f$ **surjektiv**

f **Isomorphismus (isomorph)** $:\Leftrightarrow f$ **bijektiv**

f **Endomorphismus (endomorph)** $:\Leftrightarrow$ $\mathbf{V} = \mathbf{W}$

f **Automorphismus (automorph)** $:\Leftrightarrow$ f **isomorph und endomorph**

3.2.2 Satz (III.2.1)

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ und $\mathbb{K}$-linear.
Dann gilt: f ist Isomorphismus $\Rightarrow$ f^{-1} ist Isomorphismus.
Beweis: Es ist klar, daß f^{-1} existiert, da f bijektiv ist.
Nun ist noch zu zeigen: f^{-1} ist $\mathbb{K}$-linear.
Seien $v_1, v_2 \in \mathbf{V}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2\right)\right) &= \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = \lambda_1 \cdot f\left(f^{-1}\left(v_1\right)\right) + \lambda_2 \cdot f\left(f^{-1}\left(v_2\right)\right) \\ &\overset{\textbf{linear}}{=} f\left(\lambda_1 \cdot f^{-1}\left(v_1\right)\right) + f\left(\lambda_2 \cdot f^{-1}\left(v_2\right)\right) \end{aligned}$$

Es folgt, da f injektiv ist: $\Rightarrow$ $f^{-1}\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2\right) = \lambda_1 \cdot f^{-1}\left(v_1\right) + \lambda_2 \cdot f^{-1}\left(v_2\right)$
Bekannt: Kern von $f < \mathbf{V}$, Bild von $f < \mathbf{V}$. f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $f = \{0\}$ (Aufgabe auf Blatt 11).

3.2.3 Satz (III.2.2)

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbb{K}$ ein Körper. $\mathbf{V}$ habe die Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine geordnete Familie aus $\mathbf{W}$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ mit $F(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Weiterhin gilt:

(i) $F(\mathbf{V}) = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$

(ii) F **injektiv** $\Leftrightarrow$ $w_1, \ldots, w_n$ **sind linear unabhängig**

Beweis:
<u>Eindeutigkeit</u>: Seien $F, \widetilde{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-linear mit $F(v_i) = w_i = \widetilde{F}(v_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.
Sei $v \in \mathbf{V}$ beliebig, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$. Es folgt:

$$F(v) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot F(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \widetilde{F}(v_i) = \widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \widetilde{F}(v)$$

Also: $F = \widetilde{F}$.

<u>Existenz</u>: Sei $v \in \mathbf{V}$ beliebig, dann existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

Setze $F(v) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i$. F ist linear (nachrechnen). Es ist $v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \cdot v_i$

(δ_{ij} ist das Kroneckersymbol). Es folgt: $F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \cdot w_i := w_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Aus der Definition von F im Existenzbeweis sieht man: $F(v) = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$.
Folgerung: $\{f : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V} : f \,\text{ist Isomorph}\} \simeq \{\text{geordnete Basen von}\, \mathbf{V}\}$
Dabei bezeichnet "$\simeq$", daß die Abbildung eine Bijektion ist. Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} & \Psi & \\ f & \mapsto & (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \\ & \Theta & \\ \varphi_{\mathfrak{A}} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

wobei $\varphi_{\mathfrak{A}}$ definiert ist durch $\varphi_{\mathfrak{A}}(e_i) := v_i$.
Hier nun ein oft angewandter Trick um Bijektivität zu zeigen:

$$\begin{array}{ccc} f \circ g = \mathbf{id} & \Rightarrow & f \text{ surjektiv und } g \text{ injektiv} \\ g \circ f = \mathbf{id} & \Rightarrow & g \text{ injektiv und } f \text{ surjektiv} \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Nun gilt:

$$\Psi \circ \Theta(\mathfrak{A}) = \Psi(\varphi_{\mathfrak{A}}) = (\varphi_{\mathfrak{A}}(e_1), \ldots, \varphi_{\mathfrak{A}}(e_n)) \overset{\textbf{Def.}}{=} (v_1, \ldots, v_n) = \mathfrak{A} \Rightarrow \Psi \circ \Theta = \mathbf{id}$$

Andererseits: Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V}$ Isomorphismus. Nun gilt:

$$[\Theta \circ \psi(f)](e_i) = \varphi_{\Psi(f)}(e_i) \overset{\textbf{Def.}}{=} (\Psi(f))_i = f(e_i)$$

für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz (III.2.2) folgt: $\Theta \circ \Psi(f) = f \quad \Rightarrow \quad \Theta \circ \Psi = \mathbf{id}$. Also handelt es sich bei Θ und Ψ um Isomorhismen.

3.2.4 Satz (III.2.3): Dimensionformel (Hauptsatz)

Dimensionsformel für lineare Algebra:

$$\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f)) + \mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f))$$

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{Kern}(f) = \{v \in \mathbf{V} : f(v) = 0\}$$

$$\mathbf{Bild}(f) = \{w \in \mathbf{V} : \exists v \in \mathbf{V} : w = f(v)\}$$

Vorbemerkung: $f : \mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$ (Isomorphismus) $\Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W})$.
Beweis: Seien $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V $\Rightarrow f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bilden eine Basis von W.

Beweis von Hauptsatz (III.2.3):
Für f gilt: Kern $(f) < \mathbf{V}$, wähle ein Komplement U zu Kern (f). Dann:

$$\begin{array}{ccccl} & & \mathbf{V} & = & \mathbf{Kern}\,(f) \oplus \mathbf{U} \xrightarrow{f} \mathbf{W} \\ \underbrace{u_1}_{\mathbf{Kern}\,(f)} & + & \underbrace{u_2}_{\mathbf{U}} & \mapsto & f\,(u_1 + u_2) = \underbrace{f\,(u_1)}_{=0} + f\,(u_2) = f\,(u_2) \end{array}$$

Anmerkung: "$\oplus$" ist die direkte Summe: $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}$ und $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{0\}$.
Daher: $f\,(\mathbf{V}) = f\,(\mathbf{U})$, nun betrachten wir $f|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to f\,(\mathbf{U}) = f\,(\mathbf{V})$.
Behauptung: $f|_{\mathbf{U}} \to f\,(\mathbf{V})$ ist ein Isomorphismus.
Um einen Isomorphismus zu zeigen müssen wir nachweisen:

- **$f|_{\mathbf{U}}$ ist linear (Klar, da f linear)**
- **$f|_{\mathbf{U}}$ ist surjektiv (Beweis siehe oben)**
- **$f|_{\mathbf{U}}$ ist injektiv**

Anmerkung: g linear, injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $(g) = \{0\}$
Es ist Kern $(f|_{\mathbf{U}}) = \{u \in \mathbf{U} : f\,(u) = 0\} = \mathbf{U} \cap \mathbf{Kern}\,(f) = \{0\}$, weil U Komplement von Kern (f) laut Voraussetzung.

Daraus folgt: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}) \overset{(*)}{=} \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f))$
Zu $(*)$ siehe Vorbemerkung.
Zur Erinnerung: $\underbrace{\mathbf{rg}\,(f)}_{\mathbf{Rang}} = \mathbf{dim}\,(f\,(\mathbf{V})) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f))$
Die Dimensionsformel für diesen Fall lautet:

$$\mathbf{rg}\,(f) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f))$$

3.2.5 Satz (III.2.4):

Seinen $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{W})$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ sei einen lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) **f ist isomorph**

(ii) **f injektiv**

(iii) **f surjektiv**

Beweise:
$(i) \Rightarrow (ii)$: **Klar (Siehe Definition Isomorphismus)**
$(ii) \Rightarrow (iii)$: f **injektiv** $\Rightarrow$ **Kern** $(f) = \{0\}$.

Nach Satz (**III**.2.3) **folgt:** $\mathbf{dim}\,(f\,(\mathbf{V})) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) \overset{(*)}{=} \mathbf{dim}\,(\mathbf{W})$ **Anmerkung:** $(*)$ **nach Voraussetzung. Also:** $f\,(\mathbf{V}) < \mathbf{W}$, $\mathbf{dim}\,(f\,(\mathbf{V})) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{W}) \Rightarrow f\,(\mathbf{V}) = \mathbf{W}$ **(Der letzte Schluß geht zurück auf die Basisergänzung)**
$(iii) \Rightarrow (i)$: **Nach Voraussetzung:** $f\,(\mathbf{V}) = \mathbf{W}$.

Nach der Dimensionsformel: $\mathbf{rg}\,(f) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{W}) \overset{(*)}{=} \mathbf{dim}\,(\mathbf{V})$
Anmerkung: $(*)$ **nach Voraussetzung.** $\Rightarrow \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) = 0 \Rightarrow \mathbf{Kern}\,(f) = \{0\} \Rightarrow f$ **ist injektiv** $\Rightarrow f$ **ist bijektiv.**
Der Schluß f **ist injektiv** $\Rightarrow f$ **ist bijektiv ist im Allgemeinen falsch. Der Schluß ist allerdings in zwei Fällen richtig:**

(i) f **linear,** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **wobei** $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$**-Vektorräume sind und** $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{W})$

(ii) Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ **endliche Mengen:** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **und** $|\mathbf{V}| = |\mathbf{W}|$ **(Kardinalität der Mengen ist gleich)**

3.2.6 Satz (III.2.5)

Für endlich dimensionierte Vektorräume $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ **sind folgende Aussagen äquivalent:**

(i) $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$ **(V und W sind isomorph)**

(ii) $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{W})$

Beweise:
$(i) \Rightarrow (ii)$: **Siehe Vorbemerkung**
$(ii) \Rightarrow (i)$: **Seien** $v_1, \ldots, v_n$ **eine Basis von V und** $w_1, \ldots, w_n$ **eine Basis von W. Nach Satz** (**III**.2.1) **existiert eine lineare Abbildung** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **mit** $f\,(v_i) = w_i$.
Zur Erinnerung: $f\left(\sum \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum \lambda_i \cdot f\,(v_i) = \sum \lambda_i \cdot w_i$.
$f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **ist linear,** $f\,(\mathbf{V}) = (f\,(v_1)\,, \ldots, f\,(v_n)) = (w_1, \ldots, w_n) = \mathbf{W}$. **Also:** f **ist surjektiv.**
Nach Satz (**III**.2.4) **folgt:** f **ist isomorph.**

3.2.7 Klassifikation in der Mathematik

Zur Struktur gehört immer ein Isomorphismus (strukturverträgliche Abbildung)
Klassifikation:

(i) Liste von paarweise nicht isomorphen Strukturen (zum Beispiel Gruppen oder $\mathbb{K}$**-Vektorräume)**

(ii) Beweis, daß jede Struktur (unter Betrachtung: zum Beispiel Gruppen oder $\mathbb{K}$**-Vektorräume) isomorph zu einer Struktur auf der Liste ist.**

Beispiel: Strukturen sind $\mathbb{K}$**-Vektorräume, wobei** $\mathbb{K}$ **fest ist. Isomorphismen sind** $\mathbb{K}$**-lineare Bijektionen. Die Liste besteht aus** $\left\{\{0\}\,, \mathbb{K}^1, \mathbb{K}^2, \ldots, \mathbb{K}^n, \ldots\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$
Beweis:

(i) ist klar

(ii) $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = n$, $\mathbf{V} \simeq \mathbb{K}^n$

3.2.8 Faktorräume

Situation: $\mathbf{U} < \mathbf{V}$. Wir konstruieren $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ (Faktorraum) - sprich "V modulo U" oder "V nach U"

Analogie: $n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$**: bezüglich der Addition Untergruppe. Konstruktion von** $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ **mittels der Äquivalenzrelation** $a \equiv b \bmod n \Leftrightarrow n\,|a - b \Leftrightarrow a - b \in n \cdot \mathbb{Z}$.

Es gilt: $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{[a] : a \in \mathbb{Z}\}$**, wobei** $[a] \doteqdot \overline{a}$ **als Äquivalenzklassen bezeichnet werden.**

Hier für Faktorräume: $a \underset{U}{\sim} b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbf{U}$ **(Die Äquivalenzrelation wird durch U induziert)**

3.2.9 Satz (III.2.6)

Behauptung: $\underset{U}{\sim}$ **ist eine Äquivalenzrelation**

Beweis:

Hier: $u \underset{U}{\sim} v \doteqdot u \sim v$

Wir müssen nun folgende Eigenschaften nachweise:

(i) **Reflexivität**

(ii) **Symmetrie**

(iii) **Transitivität**

Zu (i)**:** $u \sim u$**, denn** $u - u = 0 \in \mathbf{U}$ **(**0 **ist enthalten in jedem Unterraum - siehe Eigenschaften von Unterräumen)**

Zu (ii)**: Sei** $u \sim v$**. Zu zeigen:** $v \sim u$

$u \sim v \Rightarrow u - v \in \mathbf{U} \Rightarrow (-1) \cdot u - (-1) \cdot v \in \mathbf{U} \Rightarrow v - u \in \mathbf{U} \Rightarrow v \sim u$

Zu (iii)**: Sei** $u \sim v$ **und** $v \sim w$**. Zu zeigen:** $u \sim w$

$u \sim v,\ v \sim w \Rightarrow u - v, v - w \in \mathbf{U} \Rightarrow u - w = (u - v) + (v - w) \in \mathbf{U} \Rightarrow u - w \in \mathbf{U}$

3.2.10 Definition (III.2.b):

Wir definieren: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **={Äquivalenzklasse von** $\underset{U}{\sim}$**}**

Berechnung der Äquivalenzklasse:

$$\begin{aligned}
[v] &= \{w \in \mathbf{V} : w - v \in \mathbf{U}\} \\
&= \{w \in \mathbf{V} : \exists u \in \mathbf{U} : w - v = u\} \\
&= \{w \in \mathbf{V} : \exists u \in \mathbf{U} : w = v + u\} =: v + \mathbf{U}
\end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $\overline{k} = k + n \cdot \mathbb{Z}$**)**

3.2.11 Vektorraumstruktur von $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$

$$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \{v + \mathbf{U} : v \in \mathbf{V}\} = \{v + u | u \in \mathbf{U}\}$$

Axiome:

(i) $v + \mathbf{U} = v' + \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in \mathbf{U}$

(ii) $(v + \mathbf{U}) + (v' + \mathbf{U}) := (v + v') + \mathbf{U}$

(iii) $\alpha \cdot (v + \mathbf{U}) := \alpha \cdot v + \mathbf{U}$

(iv) $0_{\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}} := 0 + \mathbf{U}$

(v) $-(v + \mathbf{U}) = (-v) + \mathbf{U}$

Addition: Seien k_1, k_2 Äquivalenzklassen.
Wähle $k_1 = [v_1]$, $k_2 = [v_2]$ und setze $k_3 := [v_1 + v_2]$.
Skalare Multiplikation: Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und k_1 sei Äquivalenzklasse: $\alpha \cdot k_1 = k_2$.
Wähle $k_1 = [v_1]$ und setze $k_2 := [\alpha \cdot v_1]$.
Kurzfassung der Vektorraumaxiome: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \{v + \mathbf{U} : v \in \mathbf{V}\}$. Zu zeigen:

$$\begin{aligned} (v + \mathbf{U}) + (v' + \mathbf{U}') &= (v + v') + \mathbf{U} \\ \alpha \cdot (v + \mathbf{U}) &= \alpha \cdot v + \mathbf{U} \end{aligned}$$

Problem: Wohldefiniertheit der Verknüpfungen zeigen, daß heißt: Unabhängigkeit der Auswahl.
Hier als Beispiel die Addition, die skalare Multiplikation ist analog zu zeigen:
Sei $k_1 = [v_1] = [v_1']$, $k_2 = [v_2] = [v_2']$. Zu zeigen: $v_1 + v_2 \underset{U}{\sim} v_1' + v_2'$.
Es gilt: $(v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') \in \mathbf{U}$, weil $(v_i - v_i') \in \mathbf{U}$ nach Voraussetzung.

3.2.12 Satz (III.2.7)

(i) **$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$, $v \mapsto v + \mathbf{U}$ ist Epimorphismus mit Kern $(\pi) = \mathbf{U}$**

(ii) **Ist $\dim(\mathbf{V}) < \infty$, so auch $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} < \infty$ und es gilt: $\dim(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U})$**

Beweis etwas später.
Zuerst eine geometrische Veranschaulichung: Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{U} = \mathbb{R} \cdot (1, 1)$

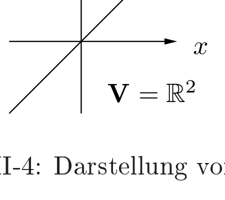

Abbildung III-4: Darstellung von **V** und **U**

Nun gilt:

$$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \left\{v + \mathbb{R} \cdot (1,1) : v \in \mathbb{R}^2\right\} = \{\textbf{Geraden parallel zu } \mathbf{y} = x\}$$

Sei $h = (0,c) + \mathbf{U}$ **und** $g = (0,b) + \mathbf{U}$**, dann gilt für** $g + h$**:**

$$g + h = ((0,c) + \mathbf{U}) + ((0,b) + \mathbf{U}) = [(0,c) + (0,b)] + \mathbf{U} = (0, b + c) + \mathbf{U}$$

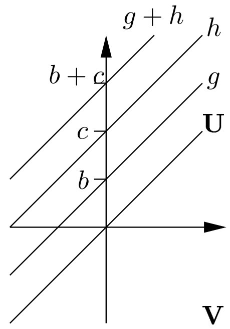

Abbildung III-5: g, h und $g + h$

Für die skalare Multiplikation gilt:

$$\alpha \cdot g = \alpha \cdot (0,b) + \mathbf{U} = (0, \alpha \cdot b) + \mathbf{U}$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}/_{\mathbf{U}} & \simeq & \mathbb{R}^1 \\ (0,b) + \mathbf{U} & \leftarrow\!\shortmid & b \end{array}$$

Die Abbildung ist linear (siehe oben: Addition und skalare Multiplikation)
Analog für $\mathbb{R}^3$**.** $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$**,** $\mathbf{U} = \mathbb{R}^3 \cdot (1,0,0) + \mathbb{R} \cdot (1,1,1)$

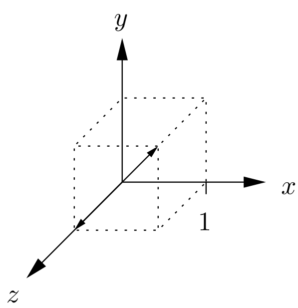

Abbildung III-6: Darstellung von **V** und **U**

In diesem Fall: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \{P + \mathbb{R} \cdot (1,0,0) + \mathbb{R} \cdot (1,1,1)\}$ **(Alle parallelen Ebenen). Es gilt:**

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}/_{\mathbf{U}} & \simeq & \mathbb{R}^1 \\ (0,0,z) + \mathbf{U} & \leftarrow\!\shortmid & z \end{array}$$

Beweis: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ ist abelsche Gruppe und Vektorraum:
Zu (i):

Assoziativität folgt aus der Assoziativität von V

Kommutativität folgt aus der Kommutativität von V

Das Nullelement: $[0] \in \mathbf{U}$

Das Inverse Element: $-(v + \mathbf{U}) = (-v) + \mathbf{U}$

Die Axiome nachrechnen, wobei alle Operationen auf V zurückgeführt werden

$\Rightarrow$ $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **ist $\mathbb{K}$-Vektorraum**
Beweis der Linearität:

π **ist surjektiv (siehe Definition von π)**

$$\pi(v + v') = (v + v') + \mathbf{U} \overset{\textbf{Def}}{=} (v + \mathbf{U}) + (v' + \mathbf{U}) = \pi(v) + \pi(v')$$

$$(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot v + \mathbf{U} \overset{\textbf{Def}}{=} \alpha \cdot (v + \mathbf{U}) = \alpha \cdot \pi(v)$$

Es gilt: $\textbf{Kern}(\pi) = \{v : v + \mathbf{U} = [0]\} \Leftrightarrow \{v : v \sim 0\} \overset{(*)}{=} \mathbf{U}$
Anmerkung zu $(*)$: Gleichheit folgt aus den Eigenschaften der Äquivalenzrelation.
Jeder Kern ist Untervektorraum einer linearen Abbildung.

$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **ist $\mathbb{K}$-Vektorraum.**
"$v + \mathbf{U}$" wird als "Neben-" oder "Restklasse von v modulo U" bezeichnet.
Zur Erinnerung: für $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$: $k + n \cdot \mathbb{Z}$: Restklasse von k modulo $n\mathbb{Z}$.
$\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}, v \mapsto v + \mathbf{U} = [v]$. **$\pi$ ist der harmonische Epimorphismus,** $\textbf{Kern}(\pi) = \mathbf{U}$.
Zu (ii): $\textbf{dim}(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}) = \textbf{dim}(\mathbf{V}) - \textbf{dim}(\mathbf{U})$
$\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}'$ **(mittels Basisergänzung).** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}' \xrightarrow{\pi} \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **wobei π surjektiv ist.**
$\pi(u + u') = \underbrace{\pi(u)}_{(*)} + \pi(u') = \pi(u')$. **Anmerkung zu $(*)$:** $\pi(u) = 0$, **da** $\textbf{Kern}(\pi) = \mathbf{U}$.
Folgerung: $\pi|_{\mathbf{U}'} : \mathbf{U}' \to \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **ist surjektiv.**
Behauptung: $\pi|_{\mathbf{U}'}$ **ist injektiv.**
Beweis: $\textbf{Kern}(\pi|_{\mathbf{U}'}) = \mathbf{U}' \cap \textbf{Kern}(\pi) = \mathbf{U}' \cap \mathbf{U} = \{0\}$
1) Somit: π ist Isomorphismus $\mathbf{U}' \simeq \mathbf{V}/_{\mathbf{U}} \Rightarrow \textbf{dim}(\mathbf{U}') = \textbf{dim}(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}})$, **da** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}' \Rightarrow \textbf{dim}(\mathbf{U}') = \textbf{dim}(\mathbf{V}) - \textbf{dim}(\mathbf{U})$. **Es folgt:** $\textbf{dim}(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}) = \textbf{dim}(\mathbf{V}) - \textbf{dim}(\mathbf{U})$.
2) Alle Komplemente zu U sind isomorph zu $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$

3.2.13 Satz(III.2.8): Homomorphiesatz

Gegeben $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seinen $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ ist $\mathbb{K}$-linear, dann gilt:

$$\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)} \simeq \mathbf{Bild}\,(f)$$

Beweis: Wie erhält man eine Abbildung von $\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)} \to \mathbf{Bild}\,(f)$?

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbf{Kern}(f) \arrow[u] & \mathbf{Bild}(f) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Idee für die Konstruktion von f. Es ist

$$\begin{aligned}
f\,(v) = f\,(w) \quad &\Leftrightarrow \quad f\,(v-w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - w \in \mathbf{Kern}\,(f) \quad \Leftrightarrow \quad v \underset{\mathbf{Kern}(f)}{\sim} w \\
&\Leftrightarrow \quad [v] = [w] \quad \Leftrightarrow \quad v + \mathbf{Kern}\,(f) = w + \mathbf{Kern}\,(f)
\end{aligned}$$

Idee:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbf{W} \\
& \mathbf{V}/_{\mathbf{Kern(f)}} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-7: kommutatives Dreieck

Anmerkung zum kommutativen Dreieck: der Weg spielt keine Rolle: $\overline{f} \circ \pi = f$
Behauptung: $\overline{f}$ ist $\mathbb{K}$-linear:
Für die Addition gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{f}\,((v + \mathbf{Kern}\,(f)) + (v' + \mathbf{Kern}\,(f))) &= \overline{f}\,((v + v') + \mathbf{Kern}\,(f)) = \overline{f}\,(v + v') \\
&= \overline{f}\,(v) + \overline{f}\,(v') = \overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) + \overline{f}\,(v' + \mathbf{Kern}\,(f))
\end{aligned}$$

Für die skalare Multiplikation gilt:

$$\overline{f}\,(\alpha \cdot (v + \mathbf{Kern}\,(f))) = \overline{f}\,(\alpha \cdot v + \mathbf{Kern}\,(f)) = \overline{f}\,(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \overline{f}\,(v) = \alpha \cdot \overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f))$$

Was ist nun Kern $\left(\overline{f}\right)$ beziehungsweise Bild $\left(\overline{f}\right)$?
Kern $\left(\overline{f}\right)$:

$$\mathbf{Kern}\left(\overline{f}\right) = \left\{\overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) : \overline{f}\,(v) = 0 = f\,(v)\right\} = \left\{\overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) : v \in \mathbf{Kern}\,(f)\right\} = 0$$

liegt in $\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)}$. Also ist $\overline{f}$ injektiv.
Bild $\left(\overline{f}\right)$: $\mathbf{Bild}\left(\overline{f}\right) = \left\{\overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) : v \in \mathbf{V}\right\} = \{f\,(v) : v \in \mathbf{V}\} = \mathbf{Bild}\,(f)$
Fazit: $\overline{f} : \mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)} \simeq \mathbf{Bild}\,(f)$
Anwendung: Dimensionsformel für lineare Abbildungen.
Warum:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f)) = \mathbf{dim}\left(\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)}\right) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) \\
\Rightarrow \quad &\mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V})
\end{aligned}$$

3.3 Kapitel (III.3): Rang von Matrizen und linearer Abbildungen

3.3.1 Theorie der Rangbestimmung

Zur Erinnerung: $\mathbf{rg}(f) := \mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f)) = \mathbf{dim}(f(\mathbf{V}))$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **linear.**
Für $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ **gilt:** $\mathbf{rg}(A) := \mathbf{rg}(f_A)$.
In der letzten Vorlesung haben wir bereits gezeigt:

$$\mathbf{Bild}(f_A) = \langle \textbf{Spaltenvektoren von } A \rangle$$

Aus

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{rg}(A) := \mathbf{rg}(f_A) \\ \mathbf{Bild}(f_A) = \langle \textbf{Spaltenvektoren von } A\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = \#\ \textbf{linear unab. Spaltenv.}$$

Grund:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad A \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

Grundlagen der praktischen Berechnung:

$$\mathbf{U} \xrightarrow{h} \mathbf{V} \xrightarrow{f} \mathbf{W} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$$

Sind h, g **Isomorphismen, so gilt:** $\mathbf{rg}(g \circ f \circ h) = \mathbf{rg}(f)$
Für den speziellen Fall der Matrizen gilt:

$$\mathbb{K}^n \overset{f_B}{\tilde{\to}} \mathbb{K}^n \overset{f_A}{\tilde{\to}} \mathbb{K}^m \overset{f_C}{\tilde{\to}} \mathbb{K}^m, \quad f_C \circ f_A \circ f_B = f_{C \cdot A \cdot B}$$

Abänderung von A **durch die Matrizen** C, B**, die die Eigenschaften haben, daß** f_B, f_C **Isomorphismen sind.**

3.3.2 Definition (III.3.a): Allgemeine Lineare Gruppe $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

$\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ **ist die allgemeine lineare Gruppe von** $n \times n$**-Matrizen über** $\mathbb{K}$ **(Aus dem Englischen von "general linear group").**
Definition:

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \textbf{ ist Isomorhismus}\}$$

Zur Erinnerung: $\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W})$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f **ist ein Isomorphismus**

(ii) f **ist injektiv**

(iii) f **ist surjektiv**

Speziell für $\mathbf{V} = \mathbf{W}$: $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **ist ein Endomorphismus**
(Ein Endomorphismus ist Isomorphismus, wenn f **injektiv oder surjektiv (Grund ist die Dimensionsformel))**

<u>Anwendung:</u> Gegeben sei eine quadratische Matrix A:

$$A : \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

f_A isomorph $\Leftrightarrow$ f_A surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f_A)) = n$
(In anderer Terminologie: f_A isomorph $\Leftrightarrow$ $\mathbf{rg}(A) = n$)
Damit $A \in GL(n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathbf{rg}(A) = n$ ($\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren sind linear unabhängig)
Weiter:

$$\begin{aligned}
f_A \ \textbf{Isomorhismus} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : f_A \circ g = \mathbf{id} = g \circ f_A \ (\textbf{Umkehrabbildung}) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \circ f_B = \mathbf{id} = f_B \circ f_A \\
& \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \circ f_B = f_E = f_B \circ f_A \\
& \overset{(\#)}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_{A \cdot B} = f_E = f_{B \cdot A} \\
& \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : A \cdot B = E = B \cdot A
\end{aligned}$$

<u>Anmerkungen:</u>

Zu $(*)$: Welche Matrix beschreibt die Identität?
Allgemein gilt:

$$\mathbf{id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto x$$

Für die Matrizenmultiplikation:

$$\mathbf{id} = f_{\mathbf{E}} \qquad \textbf{mit} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{E}$ wird als $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Alle Positionen auf der Hauptdiagonalen sind 1, alle anderen 0. Es gilt:

$$\mathbf{E} \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j = x$$

Zu $(\#)$: Es gilt: $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$ (siehe (III.1.6))

Zu $(+)$: $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Damit (Zusammenfassung):

$$\begin{aligned}
\mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) &= \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \, \textbf{isomorph}\} \\
&= \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : \mathbf{rg}(A) = n\} \\
&= \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : A \cdot B = E = B \cdot A\}
\end{aligned}$$

Weil $A \cdot B = E = B \cdot A$ gilt: $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) = \{\textbf{invertierbare}\, n \times n - \textbf{Matrizen}\}$
<u>Eine Anmerkung zur Terminologie:</u>

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **regulär** $\quad :\Leftrightarrow \quad A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **irregulär** $\quad :\Leftrightarrow \quad A \notin \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}(A) < n \Leftrightarrow A$ **ist nicht invertierbar**

3.3.3 Satz (III.3.3): $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation

Beweis:

1. $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist abgeschlossen bezüglich der Matrizenmultiplikation

Seien $A, A' \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) \Rightarrow f_{A\cdot A'} = f_A \circ f_{A'} =$ Komposition linearer Isomorphismen

Wir wissen: Komposition linearer Isomorphismen ist wieder ein linearer Isomorphismus $\Rightarrow A \cdot A' \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$.

2. Assoziativität: Erfüllt, da das Matrizenprodukt assoziativ ist.

Zur Erinnerung: wir haben zwei Möglichkeiten des Beweises betrachtet:

(i) rein rechnerisch: viel Spaß mit den Koeffizienten

(ii) Komposition von Abbildungen:

$$(f_A \circ f_B) \circ f_C = f_A \circ (f_B \circ f_C) \quad \Leftrightarrow \quad f_{(A\cdot B)\cdot C} = f_{A\cdot(B\cdot C)}$$

3. Existenz des Einselement: E ist Einselement (schon oben gezeigt)

4. Existenz des inversen Elements: Sei $A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, dann $\exists B \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ mit

$$A \cdot B = E = B \cdot A \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = B$$

(auch schon oben gezeigt)

Beispiele für $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$:

Sei $n = 1$, dann gilt für die allgemeine lineare Gruppe:

$$\mathbf{GL}(1,\mathbb{K}) = \{(a) : a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \cong \mathbb{K}^*$$

Anmerkung: $\mathbb{K}^*$ ist die multiplikative Gruppe des Körpers.

Sei $n = 2$, dann gilt für die allgemeine lineare Gruppe:

$$\mathbf{GL}(2,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{K} \quad \textbf{mit} \quad \textbf{det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b \neq 0 \right\}$$

Für die inverse Matrix A^{-1} gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\textbf{det}A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun zeigen, daß $A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$ ($\textbf{det}A = a \cdot d - c \cdot b \doteqdot \Delta$)

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\cdot a - b\cdot c}{\Delta} & \frac{d\cdot b - b\cdot d}{\Delta} \\ \frac{-c\cdot a + a\cdot c}{\Delta} & \frac{-c\cdot b + a\cdot d}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ebenso gilt:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a\cdot d - b\cdot c}{\Delta} & \frac{-a\cdot b + b\cdot a}{\Delta} \\ \frac{c\cdot d - c\cdot d}{\Delta} & \frac{-c\cdot b + a\cdot d}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$.
Hier nun ein Beispiel. Sei $A, B \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{K})$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3.3.4 3 ausgezeichnete Matrizenfamilien in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, Umformungsmatrizen

Die ausgezeichneten Matrizenfamilien werden auch als Umformungsmatrizen bezeichnet.
Anmerkung: Alle leeren Positionen sind mit Nullen zu füllen.

I.) Sei $\mathbf{M}_i(\alpha)$ gegeben mit

$$\mathbf{M}_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ i-\textbf{te Spalte} \end{array}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Die Spaltenvektoren von links nach rechts abgelesen sind

$$e_1, e_2, \ldots, \alpha \cdot e_i, \ldots, e_n$$

Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig für $\alpha \neq 0$ (Voraussetzung) $\Rightarrow \mathbf{M}_i(\alpha)$ ist invertierbar.

II.) Sei $\mathbf{V}_{ij}$ gegeben mit:

$$\mathbf{V}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$
$$i-\textbf{te Spalte} \qquad j-\textbf{te Spalte}$$

wobei $i \neq j$ (ansonsten $\mathbf{V}_{ij} = E$ - also sinnlos)

Die Spaltenvektoren von links nach rechts abgelesen sind

$$e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_n$$

Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\Rightarrow$ $\mathbf{V}_{ij}$ ist invertierbar.

III.) Sei $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ gegeben mit

$$\mathbf{A}_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0}\\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ i-\textbf{te Spalte} & j-\textbf{te Spalte}\end{array} \end{array}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $i \neq j$.
Ansonsten: Für $\alpha = 0$: $\mathbf{A}_{ij}(0) = E$, für $i = j$: $\mathbf{A}_{ii}(\alpha) = \mathbf{A}_i(\alpha)$
Die Spaltenvektoren von links nach rechts abgelesen sind

$$e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_{j-1}, \alpha \cdot e_i + e_j, e_{j+1}, \ldots, e_n$$

Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\Rightarrow$ $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ ist invertierbar.

Seinen $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ und $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{K})$ aus einer der drei Familien.
Sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{T})$ weil

$$\underset{\substack{\in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n}}{S} \cdot \underset{\substack{\in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m}}{A} \cdot \underset{\substack{\in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m}}{T}$$

Wir wollen nun die Auswirkungen der einzelnen Umformungsmatrizen betrachten. Hierzu rechnen wir zuerst ein Beispiel und betrachten dann den allgemeinen Fall.
Sei $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{K})$ für die Beispiele.

3.3.5 Multiplikation mit $\mathbf{M}_i(\alpha)$

I.) Sei $i = 2$ für $\mathbf{M}_i(\alpha)$. Damit sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Multiplikation von links:

$$\mathbf{M}_2(\alpha) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also die zweite Zeile von A mit α.

Für die Multiplikation von rechts erhalten wir:

$$A \cdot \mathbf{M}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha \cdot a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also die zweite Spalte von A mit α.

II.) Allgemein gilt:
Multiplikation mit $\mathbf{M}_i(\alpha)$ von links:

$$\mathbf{M}_i(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & \alpha \cdot v_i & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also die i-te Zeile von A mit α.
Multiplikation mit $\mathbf{M}_i(\alpha)$ von rechts:

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \dots & w_{i-1} & w_i & w_{i+1} & \dots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}_i(\alpha) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \dots & w_{i-1} & \alpha \cdot w_i & w_{i+1} & \dots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die i-te Spalte von A mit α.

3.3.6 Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$

I.) Sei $i = 1$ und $j = 3$ für $\mathbf{V}_{ij}$. Damit sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Multiplikation mit $\mathbf{V}_{13}$ von links:

$$\mathbf{V}_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die erste und dritte Zeile.
Für die Multiplikation mit $\mathbf{V}_{13}$ von rechts erhalten wir:

$$A \cdot \mathbf{V}_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{23} & a_{31} \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die erste und dritte Spalte.

II.) Allgemein gilt:
Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$ von links:

$$\mathbf{V}_{ij}\cdot\begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{j-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{j+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die i-te und j-te Zeile.
Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$ von rechts:Satz (2.8) **HomomorphiesatzUutSatz** (2.8) **Homomorphiesatzut**

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_{i-1} & w_i & w_{i+1} & \cdots & w_{j-1} & w_j & w_{j+1} & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}\cdot\mathbf{V}_{ij}$$
$$= \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_{i-1} & w_j & w_{i+1} & \cdots & w_{j-1} & w_i & w_{j+1} & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die i-te Spalte und die j-te Spalte.

3.3.7 Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$

I.) Sei $i = 1$ und $j = 3$ für $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$. Damit sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{13}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von links:

$$\mathbf{A}_{13}(\alpha)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\alpha\cdot a_{31} & a_{12}+\alpha\cdot a_{32} & a_{13}+\alpha\cdot a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile.
Für die Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von rechts erhalten wir:

$$A\cdot\mathbf{A}_{13}(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha\cdot a_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha\cdot a_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha\cdot a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache ersten Spalte zur dritten Spalte.

II.) Allgemein gilt:
Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von links:

$$\mathbf{A}_{ij}(\alpha)\cdot\begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_i+\alpha\cdot v_j & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.
Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von rechts:

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_i & \cdots & w_j & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}\cdot\mathbf{A}_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_i & \cdots & w_j+\alpha\cdot w_i & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache der i-ten Spalte zur j-ten Spalte.

3.3.8 Elementare Umformungen von Matrizen

(1) Es gibt Zeilenumformungen und Spaltenumformungen

(2) Es gibt 3 Matrizenfamilie:

- **(I) Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einem Skalar $\alpha \neq 0$**
- **(II) Vertauschung einer Zeile (oder Spalte)**
- **(III) Addition des α-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (Addition des α-fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte)**

Fazit: elementare Umformungen erhalten der Rang (Rang = Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren).
Es gilt:

- **(i) Multiplikationen der Umformungsmatrizen von links modifizieren die Zeile.**
- **(ii) Multiplikationen der Umformungsmatrizen von rechts modifizieren die Spalte.**

a) Hier nun ein Beispiel zur Bestimmung des Rang einer Matrix:
Gegeben sei A mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

3. Zeile $-$ 2 $\times$ 1. Zeile. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir a_{12} (2. Spalte $-$ 3 mal 1. Spalte), a_{13} (3. Spalte $-$ 4 mal 1. Spalte) und a_{14} (4. Spalte $-$ 1. Spalte) eliminieren. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir für a_{22} (2. Zeile mal $\frac{1}{3}$) und a_{32} (2. Zeile mal $-\frac{1}{2}$) Einsen erzeugen. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog wie oben eliminieren wir a_{32} (3. Zeile - 2. Zeile). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben eliminieren wir a_{24} (4. Spalte - 2 mal 2. Spalte). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Nun multiplizieren wir die 3. Spalte mit $\frac{1}{5}$. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluß eliminieren wir a_{34} (4. Spalte $+$ 2 mal 3. Spalte). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung: rg $(A) = 3$.

b.) Wir wollen nun ein Beispiel nur mit Zeilenumformungen (Multiplikation von links) rechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_{12}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{I}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{II}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun sind wir schon fast am Ziel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{III}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{IV}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Für die einzelnen Operationen gilt:

(I) $\mathbf{A}_{2,1}(-2)$, $\mathbf{A}_{3,1}(-4)$, $\mathbf{A}_{4,1}(-6)$

(II) $\mathbf{M}_2\left(-\frac{1}{12}\right)$, $\mathbf{M}_3\left(-\frac{1}{20}\right)$, $\mathbf{M}_4\left(-\frac{1}{36}\right)$

(III) $\mathbf{A}_{3,2}(-1)$, $\mathbf{A}_{4,2}(-1)$

(IV) $\mathbf{A}_{1,2}(-6)$

Wir erhalten eine Matrix in der Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung III-8: Beispielmatrize in Zeilenstufenform

3.3.9 Satz (III.3.4)

Jede Matrix läßt sich durch Zeilenumformungen auf die Zeilenstufenform bringen.
Doch zuerst eine Matrix in der Zeilenstufenform, da die Matrix aus dem Beispiel nicht unbedingt typisch für diese Form der Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die freien Plätze sind alle von Nullen belegt, Sterne stehen für beliebige Werte. Man sieht leicht, daß die einzelnen Zeilenvektoren linear unabhängig sind.
Beweisskizze für Satz (III.3.4): Induktionsbeweis nach Zeilenzahl.
Sei A gegeben mit:

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & B & \\ & & \end{pmatrix}$$

wobei B aus den Zeilenvektoren $v_2, \dots, v_m$ besteht. Nun wollen wir B durch Zeilenumformungen manipulieren. Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Nun unterscheiden wir zwei weitere Unterfälle von Fall 1:
Fall 1.1:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Wir substrahieren ein vielfaches der zweiten Zeile von der Ersten.

Fall 1.2: Division durch $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die 1. Zeile mit $\frac{1}{a}$.

Wir erhalten eine Eins.

2. Fall:

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * & * & \dots \\ 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ & & & & 1 & * & \dots \\ & & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & * & * & \dots \\ 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ & & & & 1 & * & \dots \\ & & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ 0 & * & \dots & * & * & * & \dots \\ & & & & 1 & * & \dots \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Zuerst subtrahieren wir ein vielfaches der zweiten Zeile von der ersten Zeile und tauschen anschließend die beiden Zeilen.

Nun unterscheiden wir zwei Unterfälle:

Fall 2.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Zuerst subtrahieren wir von der zweiten Zeile das a-fache der dritten Zeile, so daß wir eine Null erhalten. Anschließend tauchen wir die zweite und dritte Zeile

Fall 2.2: Nun sei $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & a & * & * \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & * \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & * \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Zuerst dividieren wir die zweite Zeile durch a um anschließend die zweite Zeile von der ersten zu subtrahieren, so daß wir eine Null über der Eins erhalten. Damit sind die beiden ersten Zeilenvektoren linear unabhängig.

Allgemein wollen wir die Matrix A so lange mit Zeilenoperartionen umformen bis wir A in der Zeilenstufenform vorliegen haben. Die Anzahl der Spalten in der Spaltenzeilenform ist gleich dem Rang der Matrix A:

$$\mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{rg} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wenden wir nun Spaltenumformungen auf die Zeilenstufenform an, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Links oben haben wir eine $r \times r$-Matrizen deren Diagonale mit Einsen besetzt ist und ansonsten nur Nullen enthält (eine $r \times r$-Einheitsmatrize). Rechts davon sind unbekannte Koeffizienten, darunter ist ein rechteckiger Bereich, der nur Nullen enthält.

Wenden wir nun weitere Spaltenoperationen an, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{E}_r & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 \quad \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 \quad \cdots & & & 0 \end{array}\right)$$

Am Ende erhalten wir eine Matrix die neben einer $r \times r$-Einheitsmatrize in der oberen linken Ecke nur Nullen enthält. Da diese r Gleichungen linear unabhängig sind folgt, daß der Rang der Matrix r ist.

3.3.10 Satz (**III**.3.5)

(i) Jede Matrix A läßt sich durch Spalten- und Zeilenumformungen auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{E}_r & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 \quad \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 \quad \cdots & & & 0 \end{array}\right)$$

bringen. Es gilt: rg $(A) = r$.

(ii) Zu $A_{m,n}(\mathbb{K})$ **existiert** $U \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{K})$ **und** $V \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ **mit**

$$U \cdot A \cdot V = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{E}_r & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 \quad \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 \quad \cdots & & & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{wobei} \quad r = \mathbf{rg}\,(A)$$

Zwischenbemerkung zum Assoziativgesetz:
Haben wir eine Matrix A und wollen diese in die obige Gestalt bringen, so bieten sich zwei Möglichkeiten an:

(1) Zuerst die Zeilenumformungen und dann die Spaltenumformungen

(2) Zuerst die Spaltenumformungen und dann die Zeilenumformungen

Wir erhalten identische Ergebnisse: $(U \cdot A) \cdot V = U \cdot (A \cdot V)$

3.3.11 Definition (**III**.3.b):

(1) Spaltenrang einer Matrix A: Maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren = rg (A).

(2) Zeilenrang einer Matrix A: Maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren = rg (A).

3.3.12 Satz (III.3.6)

Zeilenrang und Spaltenrang einer beliebigen Matrix sind gleich.
An und für sich ist dies erstaunlich, da zum Beispiel für eine Matrix $A \in \mathbf{M}_{3,720}(\mathbb{K})$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,720} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,720} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,720} \end{pmatrix}$$

Wir haben 720 Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^3$ und 3 Zeilenvektoren aus $\mathbb{R}^{720}$. Trotzdem ist der Spalten- und Zeilenrang von A gleich.

Beweis:
Der Zeilenrang bleibt bei Zeilenumformungen erhalten. Wir betrachten die einzelnen Familien:

(I) **Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$: $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m \to v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_m$. Zu zeigen:**

$$\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_m \rangle$$

(II) **Vertauschung zweier Zeilen: klar, da eine Vertauschung von Zeilen den Rang einer Matrix nicht ändert.**

(III) **Addition des α-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile: $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m \to v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha \cdot v_i + v_j, \ldots, v_m$. Zu zeigen:**

$$\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha \cdot v_i + v_j, \ldots, v_m \rangle$$

Nun gilt: Zeilenrang von A = Zeilenrang der Zeilenstufenform = Anzahl der Stufen (nach (III.3.b)).
Konsequenz: Basen von Unterräumen des $\mathbb{K}^n$. Sei $\mathbf{U} = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Also:

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} \overset{(*)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_k & \rightarrow \\ \leftarrow & 0 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & 0 & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Bei $(*)$ formen wir A in die Zeilenstufenform um.
Behauptung: $w_1, \ldots, w_k$ sind Basis von U
Beweis: Zeilenumformungen erhalten den Rang:

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathbf{U} = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$$

(wir können die Zeilenvektoren die nur Nullen enthalten weglassen)
Die Zeilenvektoren $w_1, \ldots, w_k$ der Zeilenstufenform sind linear unabhängig $\Rightarrow w_1, \ldots, w_k$ sind eine Basis von U.
Für unser Beispiel vom Anfang dieser Vorlesung gilt:

$$\mathbf{U} = \langle (0,2,0), (0,1,6), (0,4,4), (0,6,0) \rangle < \mathbb{R}^3$$

Aus den Umformungen und Satz (III.3.6) folgt allerdings:

$$\mathbf{U} = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$$

3.3.13 Beschreibung einer linearen Abbildung $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ durch Matrizen

Es gilt: dim $(\mathbf{V}) = n \Rightarrow \mathbf{V} \tilde{\to} \mathbb{K}^n$ (schon gezeigt) Wie beschreibt man einen Isomorphismus $\mathbb{K}^n \tilde{\to} \mathbf{V}$? Antwort: Durch die Basis von V. Es gilt:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n \tilde{\to} \mathbf{V} \quad &\Rightarrow \quad \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \textbf{ ist Basis von } \mathbf{V} \\ \varphi_{\mathfrak{A}} : \mathbb{K}^n \tilde{\to} \mathbf{V}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i \cdot v_i \quad &\Leftarrow \quad \mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \textbf{ sei Basis von } \mathbf{V} \end{aligned}$$

Sei dim $(\mathbf{V}) = n$, dim $(\mathbf{W}) = m$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ ist linear, wähle Basis $\mathfrak{A}$ von V, Basis $\mathfrak{B}$ von W:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung III-9: Skizze für Beschreibung linearen Matrizen

Es gilt: $\varphi_{\mathfrak{B}} \circ g = f \circ \varphi_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow g = (\varphi_{\mathfrak{B}})^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathfrak{A}}$

Es gilt: $g = f_A$, $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. A ist eindeutig nach Wahl der Basen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ der Abbildung f zugeordnet.

Definition: $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$ ist die beschreibende Matrix für f bezüglich $\mathfrak{A}$ von V und $\mathfrak{B}$ von W.

3.3.14 Satz (III.3.7):

Sei $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$, dann gilt: rg (f) = rg (A), dim (Kern (f)) $= n -$ rg (A) (folgt nach Dimensionsformel)

Beweis:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi = \varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "g = f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}} = \Psi"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung III-10: Skizze für den Beweis Satz (**III**.3.7)

Behauptung: Ψ induziert einen Isomorphismus Bild (f_A) = Bild (f).

($\Rightarrow$ rg (A) = dim (Bild (f_A)) = dim (Bild (f)) = rg (f))

Beweis:

(i) $\Psi\left(\mathbf{Bild}\left(f_A\right)\right) \subseteq \mathbf{Bild}\left(f\right)$. **Sei** $w \in \mathbf{Bild}\left(f_A\right)$, **das heißt:** $w = f_A\left(v\right)$, $v \in \mathbb{K}^n$. **Damit gilt:**

$$\Psi\left(w\right) = \Psi\left(f_A\left(v\right)\right) = \left(\Psi \circ f_A\right)\left(v\right) \overset{(*)}{=} \left(f \circ \varphi\right)\left(v\right) = f\left(\varphi\left(v\right)\right) \in \mathbf{Bild}\left(f\right)$$

Anmerkung: Die Gleichheit von $(*)$ **folgt aus der Kommutativität des Diagramms (der Weg spielt keine Rolle)**

(ii) **Damit** $\Psi : \mathbf{Bild}\left(f_A\right) \to \mathbf{Bild}\left(f\right)$, Ψ **ist injektiv, weil** Ψ **die Einschränkung eines Isomorphismus ist.**

(iii) Ψ **ist surjektiv: Sei** $w \in \mathbf{Bild}\left(f\right)$. **Zu zeigen:**

(1) $v \in \mathbf{Bild}\left(f_{\mathbf{A}}\right)$

(2) $\Psi\left(v\right) = w$

Nach Definition: $w = f\left(v_0\right), v_0 \in \mathbf{V}$, **da** φ **Isomorphismus gibt es** $v_1 \in \mathbb{K}^n$ **mit** $v_0 = \varphi\left(v_1\right)$.
Insgesamt:

$$w = f\left(\varphi\left(v_1\right)\right) = \left(f \circ \varphi\right)\left(v_1\right) = \Psi\left(f_A\left(v_1\right)\right)$$

Setze $v = f_A\left(v_1\right)$

3.3.15 Einträge in die beschreibende Matrix für f

Es gilt: $A = \left(\alpha_{ij}\right)$ **mit** $i = 1, \ldots, m$ **und** $j = 1, \ldots, n$. **Nun gilt:**

$$A \rightsquigarrow f_A, \quad A = \left(\ldots, f_A\left(e_j\right), \ldots\right)$$

wobei $f_A\left(e_j\right)$ **in der** j**-ten Spalte steht.**
Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = f_A\left(e_j\right), \quad \varphi_{\mathfrak{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum x_i \cdot v_i$$

Bilden wir nun einen Einheitsvektor ab, so erhalten wir:

$$\varphi_{\mathfrak{A}}\left(e_j\right) = \varphi_{\mathfrak{A}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = v_j$$

Also: $e_j \to v_j$.
Wollen wir nun eine Matrix ausrechnen, so gilt:

$$f\left(v_j\right) = f\left(\varphi_{\mathfrak{A}}\left(e_j\right)\right) = f \circ \varphi_{\mathfrak{A}}\left(e_j\right) = \varphi_{\mathfrak{B}}\left(f_A\left(e_j\right)\right) = \varphi_{\mathfrak{B}}\begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i$$

Also:

$$f\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i, \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\left(f\right) = \left(\alpha_{ij}\right)$$

$A = \left(\alpha_{ij}\right)$ **mit** $i = 1, \ldots, m$ **und** $j = 1, \ldots, n$.
In Worten: "$f\left(v_j\right)$ **liefert die** j**-te Spalte von** $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\left(f\right)$**"**

3.3.16 Berechnung von Darstellungsmatrizen

Sei $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V mit dim (V) $= n$ und $\mathfrak{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W mit dim (W) $= m$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung III-11: Berechnung der Darstellungsmatrize $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$

Es gibt für f_A zwei äquivalente Darstellungsmöglichkeiten: $f_A \Leftrightarrow A \mapsto A \cdot x$.
Nun gilt für $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i, \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) = (\alpha_{ij})$$

mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Wir haben schon gezeigt: $\mathbf{dim}(f(\mathbf{V})) = \mathbf{rg}(f) = \mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)\right)$. Dann gilt für $\mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f))$:

$$\mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f)) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}(f(\mathbf{V})) = n - \mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)\right)$$

Nun seien zwei Abbildungen f und g von V nach W gegeben:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & \mathbf{W} \end{tikzcd}$$

Abbildung III-12: Abbildungen f und g von **V** nach **W**

Sei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}$ eine Basis von W. Was ist nun

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f+g) \quad \textbf{beziehungsweise} \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f \cdot g)$$

Wir wissen:

$$(f+g)(v_j) = \underbrace{f(v_j)}_{\alpha_{ij}} + \underbrace{g(v_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \cdot w_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \cdot w_i$$

Also gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f+g) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) + \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(g)$$

Analog können wir zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f \cdot g) &= \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(g) \\ \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\lambda \cdot g) &= \lambda \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \end{aligned}$$

Anmerkung: Dies gilt nur für $(n \times n)$-Matrizen.

3.3.17 Satz (III.3.9)

Bei fester Basiswahl $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathfrak{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ ist die Abbildung $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \rightarrow \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $f \mapsto \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$ ein Isomorphismus. Insbesonders:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{dim}(\mathbf{W})$$

Beweis: Zu zeigen sind

Linearität

Injektivität

Surjektivität

<u>**Linearität**</u>**: Siehe (III.3.16)**
<u>**Injektivität**</u>**: Aus $\mathrm{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$ folgt, daß $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bekannt sind. $\Rightarrow$ f ist bekannt, denn**

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i)$$

<u>**Surjektivität**</u>**: Gegeben sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Finde die Abbildung f mit**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, dotted, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-13: Skizze zum Beweis der Surjektivität

Setze $f = \varphi_{\mathfrak{B}} \circ f_A \circ (\varphi_{\mathfrak{A}})^{-1}$ $\Rightarrow$ $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$
Eine andere Formulierung: Lineare Abbildungen zwischen V und W sind auch durch Matrizen gegeben. Aber: die beschreibenden Matrizen hängen von der gewählten Basis ab.

3.3.18 Satz (**III**.3.10)

Gegeben ist die folgende Situation:

$$\mathbf{V} \xrightarrow{f} \mathbf{W} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$$

wobei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V, $\mathfrak{B}$ eine Basis von W und $\mathfrak{C}$ eine Basis von Z ist. Es gilt:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{C}}(g \circ f) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(g) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(f)$$

Für den Beweis bieten sich zwei Möglichkeiten an:

(1) Rechnung (zu viele Indizes und sehr viel Schreibarbeit)

(2) über Definition der Matrizenmultiplikation

Zuerst zur Orientierung das Schema

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[r, "g"] & \mathbf{Z} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \arrow[r, "f_B"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^r \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{C}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-14: Schema Ausgangssituation für den Beweis von Satz (**III**.3.10)

Behauptung: $(g \circ f) \circ \varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{C}} \circ (f_B \circ f_A)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "g \circ f"] & \mathbf{Z} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_B \circ f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-15: Schema Behauptung für den Beweis von Satz (**III**.3.10)

Beweis:

$$\begin{array}{lclclcl}
(g \circ f) \circ \varphi_{\mathfrak{A}} & \overset{A}{=} & g \circ (f \circ \varphi_{\mathfrak{A}}) & \overset{(*)}{=} & g \circ (\varphi_{\mathfrak{B}} \circ f_A) & & \\
& \overset{A}{=} & (g \circ \varphi_{\mathfrak{B}}) \circ f_A & \overset{(\#)}{=} & (\varphi_{\mathfrak{C}} \circ f_B) \circ f_A & \overset{A}{=} & \varphi_{\mathfrak{C}} \circ (f_B \circ f_A)
\end{array}$$

Anmerkungen:

zu A: folgt aus Assoziativität von Komposition von Abbildungen.

zu $(*)$: Betrachte die linke Hälfte der Ausgangssituation.

zu $(\#)$: Betrachte die rechte Hälfte der Ausgangssituation.

Nun können wir Satz (III.3.10) auf einen Basiswechsel anwenden:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}' & \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{B}' \\
\mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{id}_{\mathbf{V}}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{id}_W \circ f \circ \mathbf{id}_V"'] & \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[r, "\mathbf{id}_{\mathbf{W}}"] & \mathbf{W}
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-16: Schema für Basiswechsel

Satz (III.3.10) liefert:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{B}'}(f) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ f \circ \mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) \circ \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{B}}(f) \circ \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}})$$

Nun wollen wir die Natur der Matrizen

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) \quad \textbf{und} \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}})$$

betrachten.
Behauptung:

(1) Diese Matrizen sind regulär.

(2) Diese Matrizen sind Übergangsmatrizen von einer Basis zu einer anderen Basis.

Betrachtung von $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}})$: Sei $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Zielbasis und sei $\mathfrak{A}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ Ausgangsbasis. Nun gilt:

$$v'_j = \mathbf{id}_{\mathbf{V}}\left(v'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$$

Damit gilt für die Übergangsmatrize von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = (t_{ij})$$

Für den Rang von (t_{ij}) gilt:

$$\mathbf{rg}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{v})\right) = \mathbf{rg}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{dim}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) = n$$

Also: $(t_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{rg}(t_{ij}) = n \Rightarrow (t_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$
Behauptung:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}})\right)^{-1}$$

Beweis:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ \mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{E}_m$$

Analog:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ \mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{E}_m$$

Es folgt die Behauptung.

3.3.19 Satz (III.3.11): Transformationsformel

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linear, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ seien Basen von $\mathbf{V}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ seien Basen von $\mathbf{W}$ mit Übergangsmatrizen $\mathbf{S}$ ($\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{K})$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{S}) = n$) und $\mathbf{T}$ ($\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$, $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}\,(m, \mathbb{K})$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{T}) = m$). Dann gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(f) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot \mathbf{S}$$

Zum Einprägen folgendes Hilfsmittel:

$$\underbrace{\mathbf{T}^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)}_{m \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{S}}_{n \times n}$$

Nur auf diese Art und Weise können wir die Matrizen multiplizieren.

3.3.20 Elementare Umformungen und Inversenbildung von Matrizen

Zuerst ein Beispiel: gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht leicht: $\mathbf{rg}\, A = 3 \Rightarrow A^{-1}$ existiert.
Das Schema:

$$\begin{array}{l} (\,A\,|\mathbf{E}_n) \\ \;\big\downarrow \quad \big\downarrow \; \textbf{simultane Zeilenumformungen} \\ (\mathbf{E}_n|A^{-1}) \end{array}$$

Abbildung III-17: Schema für die Inversenbildung von Matrizen

Für unser Beispiel:

$$(\,A|\,\mathbf{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Ergebnis:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Nun machen wir noch eine Probe: Es muß gelten: $A \cdot A^{-1} = \mathbf{E} = A^{-1} \cdot A$. Wir beschränken uns hier auf $A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Wir wollen nun eine theoretische Begründung für diesen Algorithmus der Umformungen einer regulären Matrix in eine Einheitsmatrize liefern:

(1) Wir formen A mittels Zeilenumformungen in die Zeilenstufenform um:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Stufen $= \mathbf{rg}\,(A)$, wobei $A \in \mathbf{M}_{n,n}\,(\mathbb{K})$. Also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_n$$

(2) Umformungen sind Multiplikationen mit Umformungsmatrizen wobei

Zeilenumformungen Multiplikationen mit Umformungsmatrizen von links sind.

Spaltenumformungen Multiplikationen mit Umformungsmatrizen von rechts sind.

Anmerkung: Zur Bildung der Inversen Matrix benutzen wir nur Zeilenumformungen. Ergebnis:

$$\left(A' \mid U \right) \xrightarrow{\mathbf{Z}_t \cdots \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1} \left(A \mid \mathbf{E}_n \right)$$

Abbildung III-18: Ergebnis der Matrizeninversion

Matrizentheoretische Begründung:

$\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t-1}, \dots, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_1$ bedeutet die Multiplikation mit $\mathbf{S}_t, \mathbf{S}_{t-1}, \dots, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_1$ von links. Wir wissen:

$$(\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1) \cdot A = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{E} = A^{-1}$$

Auf der anderen Seite:

$$B = (\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{E} = A^{-1}$$

Bemerkungen:

1. Eingabe von beliebigen Matrizen $A \in \mathbf{M}_n\,(\mathbb{K})$: Ist A singulär, so merken wir dies spätestens bei diesem Algorithmus dadurch daß er nicht weiter geführt werden kann. Der Grund: $\mathbf{rg}\,(A) \lneqq n$, also liefert die Zeilenstufenform mindestens eine Spalte die nur aus Nullen besteht:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & \vdots & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 0 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2. Anwendung von Zeilen- und Spaltenumformungen: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \mathbf{E}_n$ **vermittels** $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_2, \ldots$ **(**$\mathbf{Z}_n$ **bezeichnet eine Zeilenumformung und** $\mathbf{S}_n$ **bezeichnet eine Spaltenumformung). Zur Erinnerung: Zeilenoperationen sind Multiplikationen von links, Spaltenoperationen sind Multiplikationen von rechts. Matrizentheoretisch betrachtet:**

$$\underbrace{\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1}_{\doteqdot U} \cdot A \cdot \underbrace{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \mathbf{S}_t}_{\doteqdot V}$$

Also: A**:** $U \cdot A \cdot V = \mathbf{E}$**. Für die Inverse ergibt sich damit:**

$$\begin{aligned} U \cdot A \cdot V = \mathbf{E} \quad &\Rightarrow \quad A = U^{-1} \cdot E \cdot V^{-1} = U^{-1} \cdot V^{-1} \\ &\Rightarrow \quad A^{-1} = \left(U^{-1} \cdot V^{-1}\right)^{-1} = \left(V^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(U^{-1}\right)^{-1} = V \cdot U \end{aligned}$$

Aus Übungsaufgabe bekannt: Bei invertieren eines Produktes zweier Matrizen dreht sich die Reihenfolge der Terme um.
Nun wollen wir U **und** V **betrachten:**

$$U = \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{E}$$

Also ist U **das Ergebnis der sukzessiven Zeilenumformungen angewandt auf E.**

$$V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \mathbf{S}_t$$

Also ist V **das Ergebnis der sukzessiven Spaltenumformungen angewandt auf E.**

Wir können also ein Schema analog zu dem Schema für Zeilenumformungen entwickeln:

$$\begin{array}{c|c|c} & \textbf{Spalten} & \textbf{Zeilen} \\ (\ A & \mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\mathbf{E}_n & U & V\ ) \end{array}$$

Abbildung III-19: Schema für Zeilen- und Spaltenumformungen

Hier nun ein Beispiel für $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$**:**

$$\begin{array}{ccc} A & U & V \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Nun gilt:

$$A^{-1} = V \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. Sei $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{E} = A \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1$

3.3.21 Satz (III.3.12)

Jede Matrize in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist das Produkt von Umformungsmatrizen (Elementarmatrizen). Man sagt: "$\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ wird von Elementarmatrizen erzeugt"

(Zur Erinnerung: $S_n =$ Gruppe der Permutation von n Ziffern (Bijektive Abbildung von $1,\ldots,n$ auf sich selbst)

Übergangsmatrize: gegeben sei V mit Basis $\mathfrak{A}$ und einer neuen Basis $\mathfrak{A}'$. Zwangsläufig gilt:

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$$

Nun wird $\mathbf{T} = (t_{ij}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$ als Übergangsmatrize bezeichnet mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_j'$$

Nun ist nicht einheitlich definiert was die Übergangsmatrize ist:

$$v = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot y_j \right) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

Für die Koordinatentransformation gilt also: $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot y_j$ **für** $i = 1,\ldots,n$**.**

Damit gilt für den Transformationsvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Für neue Basis: T (Basiswechsel)

Für neue Koordinate: $\mathbf{T}^{-1}$ (Koordinatenwechsel) wobei

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$$

3.4 Kapitel (III.4): Lineare Gleichungssysteme

Gegeben: $a_{ij} \in \mathbb{K}$ **und** $b_i \in \mathbb{K}$.
Gesucht: Lösungen in $\mathbb{K}$ **für**

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Wir können dieses Gleichungssystem auch in seine Bestandteile zerlegen:

die Koeffizientenmatrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

den Lösungsvektor x**:** $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

die Lösungsspalte b**:** $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Also können wir das Gleichungssystem auch folgendermaßen schreiben: $A \cdot x = b$**.**
Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man das Gleichungssystem als eine lineare Abbildung auffaßt:

$$f_A(x) = b \quad \textbf{mit} \quad f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}(A, b)$ **gilt:**

$$\mathbb{L}(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = b\} = f_A^{-1}(\{b\})$$

3.4.1 Satz (III.4.1)

$A \cdot x = b$ **lösbar** $\Leftrightarrow \mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A|\, b)$
Anmerkung: $(A|\, b)$ **wird als erweiterte Koeffizientenmatrix bezeichnet:**

$$(A|\, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$$

Beweis: Zuerst zur Erinnerung. Es gilt

$$\mathbf{rg}\, A = \mathbf{rg} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \mathbf{dim} \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathbf{dim}\, f_A(\mathbb{K}^n)$$

und

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

"$\Rightarrow$" Es gilt:

$$\left.\begin{array}{c} A\cdot x = b \\ A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad b = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n$$

Nun folgt unmittelbar:

$$\mathbf{rg}\,(A|\,b) = \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n, b\rangle) = \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) = \mathbf{rg}\,(A)$$

"$\Leftarrow$" Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) = \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n, b\rangle) \quad &\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle v_1, \ldots, v_n, b\rangle \\ &\Rightarrow \quad b = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n \end{aligned}$$

Das heißt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = b$$

Anmerkung: $(*)$ folgt nach Basisauswahl.

Folgerung: Wir können einen Algorithmus zur Entscheidung über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen entwickeln.

Berechnung des Ranges $\mathbf{rg}\,(A)$ und $\mathbf{rg}\,(A|\,b)$ mittels elementarer Umformungen.

Struktur von $(A|\,b)$ - Voraussetzung: Eine spezielle Lösung x_0 ist bekannt mit $A\cdot x_0 = b$

3.4.2 Satz (III.4.2)

Es gilt:

(1) $\mathbb{L}\,(A, b) = x_0 + \mathbb{L}\,(A, 0)$

(2) $\mathbb{L}\,(A, 0) \subseteq \mathbb{K}^n$

(3) $\mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A, 0)) = n - \mathbf{rg}\,(A)$

Umformulierungen:

(1) $A \cdot x = b$ **wird als inhomogenes Gleichungssystem bezeichnet.**

(2) $A \cdot x = 0$ **wird als (zugehöriges) homogenes Gleichungssystem bezeichnet.**

(3) $\mathbb{L}\,(A, 0)$ **wird als spezielle Lösung des homogenen Gleichungssystems bezeichnet.**

(4) $\mathbb{L}\,(A, b)$ **wird als allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems bezeichnet.**

Beweis:

$\mathbb{L}\,(A, b) = \{x : f_A\,(x) = b\} \ni x_0$**,** $x \in \mathbb{L}\,(A, b) \quad \Rightarrow \quad f_A\,(x) = f_A\,(x_0) \quad \Rightarrow \quad f_A\,(x - x_0) = 0$

$\Rightarrow \quad x - x_0 \in \mathbf{Kern}\,(f_A)$**.** $\mathbf{Kern}\,(f_A) = \mathbb{L}\,(A, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}\,(A, 0) \subseteq \mathbb{K}^n$.

$x - x_0 \in \mathbb{L}\,(A, 0) \quad \Rightarrow \quad x \in x_0 + \mathbb{L}\,(A, 0)$**. Sei** $x = x_0 + u$**,** $u \in \mathbb{L}\,(A, 0)$

$\Rightarrow \quad A \cdot x = A \cdot (x_0 + u) = A \cdot x_0 + \underbrace{A \cdot u}_{=0} = A \cdot x_0 = b$**,** $x_0 + \mathbb{L}\,(A, 0) \subseteq \mathbb{L}\,(A, b)$**.**

Aus der Dimensionsformel folgt:

$$\mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A, 0)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f_A)) = \mathbf{dim}\,(\mathbb{K}^n) - \mathbf{dim}\,(f_A\,(\mathbb{K}^n)) = n - \mathbf{rg}\,(A)$$

3.4.3 Gauß-Jordansches Eliminationsverfahren

Prinzip: Zeilenumformungen anwenden auf (A, b), eventuell wenige Spaltenumformungen auf A alleine anwenden. Es gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) = \{x : A \cdot x = b\}$$

Behauptung:
1. Zeilenumformungen auf (A, b) ändern die Lösungsmenge nicht.
Beweis: $(A, b) \to \mathbf{Z} \cdot (A, b) = (\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b)$
$x \in \mathbb{L}(A, b) \quad \Rightarrow \quad A \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z} \cdot A \cdot x = \mathbf{Z} \cdot b \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{L}(\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b)$
$\mathbf{Z}^{-1} \cdot (\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b) = (A, b) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}(\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b) \subseteq \mathbb{L}(A, b)$
2. Spaltenumformungen auf A haben überschaubaren Einfluß auf $\mathbb{L}(A, b)$:

$$\mathbb{L}(A \cdot U, b) = U^{-1} \cdot \mathbb{L}(A, b)$$

Beweis: $(A \cdot U) \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad A \cdot (U \cdot x) = b$**.** $U \cdot x \in \mathbb{L}(A, b) \quad \Rightarrow \quad x \in U^{-1} \cdot \mathbb{L}(A, b)$**.**
Sei $A \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad (A \cdot U) \cdot \left(U^{-1} \cdot x\right) = b \quad \Rightarrow \quad U^{-1} \cdot x \in \mathbb{L}(A \cdot U, b)$
Praktische Anwendung:

(i) $A \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r = A \cdot U^{-1}$**. Also** $U = E \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r$
Damit ergibt sich folgendes Schema (wobei $A' = A \cdot U$):

$$\begin{array}{c|c} (\ A & \mathbf{E}_n) \\ \downarrow & \downarrow \ \textbf{simultane Zeilenumformungen} \\ (\ A' & U\ ) \end{array}$$

Abbildung III-20: Schema für das Gauß-Jordansches Eliminationsverfahren

(ii) Bestimme $\mathbb{L}(A \cdot U, b)$

(iii) $U \cdot \mathbb{L}(A \cdot U, b) = \mathbb{L}(A, b)$

In der Praxis werden höchstens Spaltenvertauschungen angwandt, da es ansonsten zu viel Aufwand ist den Lösungsraum zu berechnen.

3.4.4 Beispiel für Gauß-Jordansches Eliminationsverfahren

Gegeben sei folgendes inhomogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & w & + & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3w & & & = & 2 \\ & & y & + & w & - & z & = & 4 \end{array}$$

Nun schreiben wir das inhomogene Gleichungssystem für die Rechnung als (A,b)-Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{21}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right)$$

Aus der Matrix stellen wir nun wieder das Gleichungssystem auf:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\cdot x & + & 0\cdot y & + & 0\cdot w & + & 5\cdot z & = & -3 \\ 0\cdot x & + & 1\cdot y & + & 0\cdot w & + & \frac{2}{5}\cdot z & = & \frac{21}{15} \\ 0\cdot x & + & 0\cdot y & + & 1\cdot w & - & \frac{7}{5}\cdot z & = & \frac{13}{5} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} x & + & 5\cdot z & = & -3 \\ y & + & \frac{2}{5}\cdot z & = & \frac{21}{15} \\ w & - & \frac{7}{5}\cdot z & = & \frac{13}{5} \end{array}$$

Also gilt für $\mathbb{L}(A,b)$:

$$\mathbb{L}(A,b) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} -3-5z \\ \frac{21}{15} - \frac{2}{5}z \\ \frac{13}{5} + \frac{7}{5}z \\ z \end{pmatrix} \right| z \in \mathbb{K} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{21}{15} \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_0} + \mathbb{K} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbb{L}(A,0)}$$

Zu guter letzt könnten wir noch eine Probe durchführen.

3.4.5 Elementare Umformungen und Gleichungssysteme

Allgemeine Form: Gegeben ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Durch Zeilenumformungen erhalten wir aus der Koeffizientenmatrix $(A|\,b)$ eine normierte Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & b_1^* \\
 & & & & & & & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & 1 & * & \ldots & * & b_r^* \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & b_{r+1}^* \\
 & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & & & & & & & & & & & 0 & b_m^*
\end{array}\right)$$

Wobei die linke Matrix als A^* (Spaltenpermutationen) und die rechte Spalte als b^* bezeichnet wird. Wir haben bereits gezeigt:

$$\mathbb{L}\,(A, b) = \mathbb{L}\,(A^*, b^*)$$

da wir nur Zeilenumformungen und keine Spaltenumformungen verwandt haben um auf die Zeilenstufenform zu kommen.

Bemerkungen:

1: Nicht alle $b_{r+1}^*, \ldots, b_m^* = 0 \Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Beweis: Sei etwa $b_{r+1}^* \neq 0$, dann muß gelten:

$$\underbrace{0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n}_{=0} \;=\; \underbrace{b_{r+1}^*}_{\neq 0}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch.

2. Seien alle $b_{r+1}^*, \ldots, b_m^* = 0$. Nun benutzen wir Spaltenvertauschungen um die Zeilenstufenform umzusortieren:

$$(\,A^*|\,b^*) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c}
1 & & 0 & & b_1^* \\
 & \ddots & & C & \vdots \\
0 & & 1 & & b_r^* \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c}
\mathbf{E}_r & C & \begin{array}{c} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c} 0 \; \cdots \\ \vdots \\ 0 \; \cdots \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \; 0 \\ \vdots \\ \cdots \; 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}
\end{array}\right)$$

Dazu allgemein:

$$\begin{aligned}
A \cdot x &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \\
A^* \cdot x^* &= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_{i_1} & v_{i_2} & \cdots & v_{i_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot x^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \cdot v_{i_k}
\end{aligned}$$

$x_k^* = x_{i_k}$, **x^* entstanden aus x durch dieselben Permutationen.**

Wir erhalten also folgende neue Situation:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_r & C & \begin{matrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & C \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(*)}$$

und

$$(*) = \left(\begin{array}{c} E_r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \end{pmatrix}}_{\doteqdot\, b_0^*}$$

Damit gilt für den Lösungsraum:

$$\mathbb{L}\,(A^*|\,b^*) = \left\{ \left(\begin{array}{c} -C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b_0^* \\ \hline \leftarrow \quad x_{r+1} \quad \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \quad x_n \quad \rightarrow \end{array}\right) \middle|\, x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Kennen wir eine spezielle Lösung $\big((b_1^*, \ldots, b_r^*, 0, \ldots, 0)\big)$, so gilt:

$$\mathbb{L}\,(A^*|\,b^*) = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -C \cdot (y) \\ \\ y \end{pmatrix} \middle|\, y \in \mathbb{K}^{n-r} \right\}$$

Insbesondere:

$$\begin{aligned} b_{r+1}^* = \ldots = b_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \textbf{Gleichungssystem lösbar} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{rg}\,(A|\,b) \end{aligned}$$

$\mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A,0)) = \mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A^*,0)) = n - \underbrace{\mathbf{rg}\,(A)}_{=r} = n - r$

Der Algorithmus liefert eine Basis von $\mathbb{L}\,(A,0)$.

3.5 Kapitel (III.5): Determinanten

Wiederholung: det: $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, **det** $\underbrace{(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n)}_{n-\textbf{mal}} \to \mathbb{K}$

Die Determinante ist eine Funktion der Spaltenvektoren: det $(A) =$ **det** $(v_1, \ldots, v_n)$.
Axiome:

(i) det $(v_1, \ldots, v_n) = 0$, **falls es** $i \neq j$ **gibt mit** $v_i = v_j$. **Bedingt: Die Determinante ist alternierend:**

$$\begin{aligned} & \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ = \quad & -\mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

(ii) Die Determinante ist linear:

$$\mathbf{det}\,(v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i + \beta \cdot v_i', \ldots, v_n) = \alpha \cdot \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \beta \cdot \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$

Bedingt: Die Determinante ist eine multilineare Abbildung mit Werten in $\mathbb{K}$**: Multilinearform.**

(iii) det $(\mathbf{E}_n) =$ **det** $(e_1, \ldots, e_n) = 1$. **Bedeutung: Normierung**

Aus $(i) - (iii)$**: Die Determinante ist eine normierte alternierende Multilinearform.**
Hauptsatz: Es gibt genau <u>eine</u> normierte alternierende Multilinearform, nämlich die Determinante als Funktion der Spaltenvektoren.
Schon gezeigt: die Determinante einer $(n \times n)$**-Matrix muß die folgenden Eigenschaften haben:**
Situation: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$

$$\mathbf{det}\,(A) = |A| := \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}\,(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{sgn}\,(\sigma) = (-1)^{\#\textbf{Inversionen}}$$

Eine Inversion liegt vor, falls $i < j$ **und** $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Anmerkung zu sgn $(\mathbf{S}_n) \to \{1, -1\}$ **Homomorphismus, wobei**

(i) sgn $(\sigma \cdot \tau) =$ **sgn** $(\sigma) \cdot$ **sgn** (τ)

(ii) sgn $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_r) = (-1)^{r-1}$, **sgn** $(i\, j) = -1$

(iii) $\sigma = (i_1\, j_1) \cdot (i_1\, j_2) \cdot \ldots \cdot (i_1\, j_r) = (-1)^r$

Wichtig sind die Eigenschaften der Determinante: Die Determinante wird als Funktion der Spaltenvektoren aufgefaßt:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n-\textbf{mal}}$$

Bisher haben wir folgende Schlüsse gezogen:

(i) **Cramersche Regel**

(ii) A **singulär** $\Rightarrow$ **det** $A = 0$

(iii) **Verhalten gegenüber Spaltenumformungen**

(iv) A **regulär** $\Rightarrow$ **det** $A \neq 0$

(v) $A \cdot x = b$ **wobei** A **regulär hat genau eine Lösung:** $x = A^{-1} \cdot b$

(vi) **und nach der Cramerschen Regel gilt:** $x_i = \dfrac{\mathbf{det}\,(B_i)}{\mathbf{det}\,(A)}$

(vii) **wobei** B_i **die Matrix** A **ist in der wir den** i**-ten Spaltenvektor durch** b **ersetzt haben:**

$$B_i = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_{i-1} & b & v_{i+1} & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

3.5.1 Satz (III.5.1)

Anmerkung: Aus (ii) **und** (iv) **folgt:** A **singulär** $\Leftrightarrow$ **det** $(A) = 0$ **beziehungsweise** A **regulär** $\Leftrightarrow$ **det** $(A) \neq 0$**.**

Beweis: Die Determinante wird bei additiven Spaltenumformungen (iii) **nicht geändert. Sei** $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **und regulär.**

1. Schritt: Wir möchten A **so umformen, daß** $a_{11} \neq 0$ **ist:**

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \neq 0 & * \cdots\cdots * \\ \hline * & * \cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & * \cdots\cdots * \end{array}\right)$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

a) $a_{11} \neq 0$**: wird sind fertig.**

b) $a_{11} = 0$**:**

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & ? \cdots\cdots ? \\ \hline * & * \cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & * \cdots\cdots * \end{array}\right)$$

Weil A **regulär ist folgt rg** $(A) = n \quad \Rightarrow \quad \exists a_{1i} \neq 0$ **wobei** $i \in 2, \ldots, n$**. Also gilt:**

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & ? \;\neq 0\; ? \\ \hline * & * \cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & * \cdots\cdots * \end{array}\right)$$

Nun addieren wir die i-te Spalte zur ersten Spalte und erhalten:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} \neq 0 & ? & \neq 0 & ? \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

2. Schritt: In diesem Schritt wollen wir $a_{12} - a_{1n}$ eliminieren. Bisher für A:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & ? & \neq 0 & ? \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Nun addieren wird das $\left(-\dfrac{a_{1i}}{a_{11}}\right)$ fache der ersten Spalte zur i-ten Spalte:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

3. Schritt: Nun wollen wir A so modifizieren, daß wir A von der folgenden Form erhalten:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & a'_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

Situation:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} a'_{11} & * & \cdots & * \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

Wären $a_{21} = a_{22} = \ldots = a_{2n} = 0$ so währe rg $A \leq n-1$. Daher $\exists j \geq 2$ mit $a_{2j} \neq 0$. Also gilt für A:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline ? & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

Analog zu oben können wir a_{22} so modifizieren, daß $a'_{22} \neq 0$ ist und $a_{2i} = 0$ für

$i = 3, \ldots, n$:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ ? & a'_{22}\ 0 \cdots\cdots 0 \\ * \cdots\cdots\cdots\cdots & * \\ \vdots & \vdots \\ * \cdots\cdots\cdots\cdots & * \end{pmatrix}$$

Wir setzen das Verfahren analog fort und erhalten schließlich:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a'_{22} & & \\ & & a'_{33} & \\ \mathbf{?} & & & \ddots\ a'_{nn} \end{pmatrix} = A'$$

wobei $a'_{ii} \neq 0$ für $1, \ldots, n$. Wir wissen, da wir nur Spaltenumformungen benutzt haben, daß $\det A = \det A'$. Aufgrund der Linearität folgt:

$$\mathbf{det}\,(A) = \mathbf{det}\,(A') = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{?} & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Spaltenumformungen liefern:

$$A' \to a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \cdot \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} a'_{11} & \ddots & 0 \\ 0 & & a'_{nn} \end{pmatrix} = A''$$

Ergebnis: A kann durch Spaltenumformungen so umgeformt werden, daß wir A'' erhalten. Die Determinante ist leicht abzulesen:

$$\mathbf{det}\, A = \mathbf{det}\, A'' = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a'_{ii}$$

3.5.2 Satz (III.5.2): Es gibt nur eine Determinante

Beweis: Angenommen det, det$'$ erfüllen die Eigenschaften $(i) - (iii)$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

a) A sei singulär $\Rightarrow$ $\mathbf{det}\,(A) = \mathbf{det}'\,(A) = 0$.

b) A sei regulär $\Rightarrow$ Wir können A durch Spaltenumformungen so umformen, daß wir eine Matrix A^* erhalten:

$$A \to \begin{pmatrix} a^*_{11} & \ddots & 0 \\ 0 & & a^*_{nn} \end{pmatrix} = A^*$$

Wegen der Eigenschaft (iii) folgt: $\mathbf{det}\,(A) = \mathbf{det}'\,(A) = a^*_{11} \cdot a^*_{22} \cdot \ldots \cdot a^*_{nn}$.

3.5.3 Satz (III.5.3) Multiplikationssatz für Determinanten

Der Multiplikationssatz für Determinanten lautet: det $(A \cdot B) =$ **det** $(A) \cdot$ **det** (B)

Beweis:

a) Ist A **singulär** $\Rightarrow A \cdot B$ **ist singulär.**

Schema des Beweises: $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{K}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{K}^n$

Ist f_B **nicht surjektiv** $\quad\Rightarrow\quad f_A \circ f_B$ **nicht surjektiv, Bild** $(f_A \circ f_b) \subseteq$ **Bild** (f_A)

Es gilt:

$$f_{A\cdot B} = f_A \circ f_B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{rg}\,(A \cdot B) = \mathbf{rg}\,(f_{A\cdot B})$$

Ist rg $(A) \lneqq n \Rightarrow \mathbb{K}^n$ **wird höchstens auf den** $\mathbb{K}^{n-1}$ **abgebildet** $\Rightarrow$ **Die Eigenschaften von** f_B **sind irrelevant.**

Es folgt unmittelbar: det $(A \cdot B) = 0,\quad$ **det** $(A) \cdot$ **det** $(B) = 0.$

b) A **regulär** $\Rightarrow$ **det** $(A) \neq 0$**. Sei** A **fest und** $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$**. Es folgt:**

$$\mathbf{det}'\,(B) = \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot B)}{\mathbf{det}\,(A)}$$

Zu zeigen: det$'$ (B) **erfüllt die Eigenschaften** $(i) - (iii)$

$\Rightarrow$ **det**$'$ $(B) =$ **det** $(B) \Rightarrow$ **det** $(A) \cdot$ **det** $(B) =$ **det** $(A \cdot B)$

Dazu:

$$B = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \dots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Setzen wir nun in die Determinante ein, so folgt:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{det}' \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{det} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \dots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}{\mathbf{det}\,(A)}$$

Nun wollen wir die Eigenschaften $(i) - (iii)$ **für det**$'$ (B) **nachweisen:**

(i)**: Ist** $v_i = v_j$ **mit** $i \neq j \Rightarrow A \cdot v_i = A \cdot v_j \Rightarrow$ **det** $(A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_n) = 0 \Rightarrow$ **det**$'$ $(v_1, \dots, v_n) = 0$**.**

(ii)**: Es gilt:**

$$\mathbf{det}'\,(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot \mathbf{E})}{\mathbf{det}\,(A)} = \frac{\mathbf{det}\,(A)}{\mathbf{det}\,(A)} = 1$$

Also ist auch Eigenschaft (ii) **erfüllt.**

(iii)**: Es gilt:**

$$\begin{aligned} & \mathbf{det}'\,(v_1, \dots, \alpha \cdot v_k + \beta \cdot v_k', \dots, v_n) \\ = \; & \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \dots, A \cdot (\alpha \cdot v_k + \beta \cdot v_k'), \dots, A \cdot v_n)}{\mathbf{det}\,(A)} \\ = \; & \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \dots, \alpha \cdot A \cdot v_k + \beta \cdot A \cdot v_k', \dots, A \cdot v_n)}{\mathbf{det}\,(A)} \\ = \; & \frac{\alpha \cdot \mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_k, \dots, A \cdot v_n) + \beta \cdot \mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_k', \dots, A \cdot v_n)}{\mathbf{det}\,(A)} \\ = \; & \alpha \cdot \mathbf{det}'\,(v_1, \dots, v_k \dots, v_n) + \beta \cdot \mathbf{det}'\,(v_1, \dots, v_k' \dots, v_n) \end{aligned}$$

Damit erfüllt det$'$ **alle Eigenschaften der Matrizenfunktion** $\Rightarrow$ **Multiplikationssatz.**

3.5.4 Eigenschaften von Determinanten gegenüber Zeilenumformungen

Gegeben sei A mit

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow w_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow w_n \rightarrow \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir drei verschiedene Fälle:

a) skalare Multiplikation:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \alpha \cdot w_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

b) Vertauschung zweier Zeilen:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{j-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{j+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix} = -\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{j-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{j+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

c) Das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addiert:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_i + \alpha \cdot w_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix} = \mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Das Verhalten der Determinante bei Zeilenumformungen ist analog zu den Spaltenumformungen.

Die Beweise folgen direkt aus dem Multiplikationssatz mit Hilfe der Umformungsmatrizen:

a) Multiplikation mit $\mathrm{M}_i(\alpha)$ von links:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(\mathbf{M}_i(\alpha) \cdot A) &= \mathbf{det}\left(\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots\ \alpha\ \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot A\right) \\ &= \mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots\ \alpha\ \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{det}(A) = \alpha \cdot \mathbf{det}(A) \end{aligned}$$

b) Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$ von links

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(\mathbf{V}_{ij}\cdot A) &= \mathbf{det}\left(\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\cdot A\right) \\
&= \mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{det}\,(A) \\
&= (-1)\cdot\mathbf{det}\,(A) = -\mathbf{det}\,(A)
\end{aligned}$$

Nun gilt: $\mathbf{det}\,(\mathbf{V}_{ij}) = -\mathbf{det}\,(\mathbf{E}_n)$, da $\mathbf{V}_{ij}$ durch Vertauschung von i-ter und j-ter Zeile in $\mathbf{E}_n$ transformiert wird.

c) Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}\,(\alpha)$ von links:

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(\mathbf{A}_{ij}\,(\alpha)\cdot A) &= \mathbf{det}\left(\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \alpha & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\cdot A\right) \\
&= \mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \alpha & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{det}\,(A) \\
&= 1\cdot\mathbf{det}\,(A) = \mathbf{det}\,(A)
\end{aligned}$$

3.5.5 Kochrezept: Praktische Berechnung der Determinante

(i) Durch Umformungen wird A in eine Gestalt transformiert, so daß man die Determinante ablesen kann.

(ii) Buchhaltung der Veränderung der Determinante beim Prozeß (i).

(iii) Endgestalt der Matrix:

viele Nullen: obere oder untere Dreiecksgestalt

Eine Spalte oder Zeile besteht nur aus Nullen $\Rightarrow$ det $(A) = 0$

3.5.6 Beispiel für die Determinantenberechnung

Gegeben sei A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Nun gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.5.7 Satz (III.5.4) Multiplikationssatz für Blockdeterminanten

Behauptung:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array} \right) = \det \left(\boxed{\boldsymbol{A}} \right) \cdot \det \left(\boxed{\boldsymbol{B}} \right)$$

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

<u>Fall a)</u> A singulär oder B singulär $\Rightarrow$ rechte Seite $= 0$.

Zu zeigen: $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array} \right)$ **ist singulär, daß heißt rg** $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array} \right) < n$

Angenommen A ist singulär. Durch Zeilenumformungen, die die Determinante nicht ändern, kann A in folgende Gestalt transformiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline * \cdots\cdots * \\ \vdots \qquad \vdots \\ * \cdots\cdots * \end{pmatrix}}_{\doteqdot \boldsymbol{C}}$$

Wenden wir nun diese Zeilenumformungen auf die gesamte Matrix an, so erhalten wir eine Matrix der Form:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array} \right)}_{\#}$$

Das heißt: rg $(\#) < n \Rightarrow$ **det** $(\#) = 0$. **Analog verfahren wir für den Fall, daß** B **singulär ist.**

<u>**Fall b)**</u> A **und** B **sind regulär** $\Rightarrow$ **durch Zeilenumformungen kann man die Matrizen**

$$\left(\boxed{\boldsymbol{A}}\right), \left(\boxed{\boldsymbol{B}}\right), \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array}\right)$$

auf die folgende Gestalttransformieren:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \beta_s \end{pmatrix}, \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_r \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline * & \begin{matrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \beta_s \end{matrix} \end{array}\right)}_{(\#\#)}$$

bringen. Nun gilt: det $(A) = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r$, **det** $(B) = \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_s$. **Durch weitere Transformationen, die die Determinante nicht verändern erhalten wir für** $(\#\#)$**:**

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_r \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \beta_s \end{matrix} \end{array}\right)}_{\binom{\#\#}{\#}}$$

$\Rightarrow$ **det** $\binom{\#\#}{\#} =$ **det** $(A) \cdot$ **det** (B).

3.5.8 Definition (III.5.a): Transponierte Matrix A^T

${}^tA = A^T = (a_{ji})_{ij}$, **wobei** $A = (a_{ij})_{ij}$. **Die transpornierte Matrix entsteht durch Spiegelung der Matrix an der HauptdiagonalenIII:**

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Die Zeilen von A **werden die Spalten von** A^T.

Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V} & \overset{f}{\rightarrow} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}^* & \overset{f^*}{\leftarrow} & \mathbf{W}^* = \mathbf{Hom}(\mathbf{W}, \mathbf{K}) \\ \lambda \circ f & \leftarrow\!\shortmid & \lambda \end{array}$$

Sei $\mathfrak{A}$: $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $\mathfrak{B} : w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W.
Die dualen Basen: $\mathfrak{A}^*$: $v_1^*, \ldots, v_n^*$ von $\mathbf{V}^*$ und $\mathfrak{B}^* : w_1^*, \ldots, w_m^*$ von $\mathbf{W}^*$, mit

$$w_i^* : \mathbf{W} \to \mathbb{K}, w_i^* (w_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Anmerkung: δ_{ij} ist das Kroneckersymbol.
Dann: $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} (f) = A$, $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}^*}^{\mathfrak{B}^*} (f^*) = A^T$ und $\mathbf{dim} (\mathbf{Bild} (f)) = \mathbf{dim} (\mathbf{Bild} (f^*))$
(In dieser Vorlesung schreiben wir die Ausgangsbasis oben.)
Beweis: Sei $A^T = (\tilde{a}_{ij})$. Nun gilt für die Determinante:

$$\mathbf{det}\left(A^T\right) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Nun setze $j := \sigma(i)$, dann ist $i = \sigma^{-1}(j)$. Die Kommutativität der Multiplikation liefert:

$$\mathbf{det}\left(A^T\right) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

Noch zu zeigen: $\mathbf{sgn}(\sigma) = \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right)$.
Wir werden für die Behauptung zwei verschiedene Beweise führen:
I. $\sigma = (i_1\, j_1) \cdot (i_2\, j_2) \cdot \ldots \cdot (i_r\, j_r)$
$\Rightarrow \quad \sigma^{-1} = (i_1\, j_1)^{-1} \cdot (i_2\, j_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (i_r\, j_r)^{-1} = (i_1\, j_1) \cdot (i_2\, j_2) \cdot \ldots \cdot (i_r\, j_r)$
II. $\mathbf{id} = \sigma \cdot \sigma^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \mathbf{sgn}(\mathbf{id}) = \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sgn}(\sigma) = \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right)$
Daher:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}\left(A^T\right) &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\tau) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\tau(j)} \\ &= \mathbf{det}(A) \end{aligned}$$

Folgerung: Die Determinante, als Funktion der Zeilenvektoren ist ebenfalls charakterisiert durch die Axiome $(i) - (iii)$ einer normierten alternierenden Multilinearform.

3.5.9 Satz (III.5.5): Laplacescher Entwicklungssatz

Gegeben sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. $A_{ij} \in \mathbf{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ entsteht aus A durch streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Hier ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Es entstehen n^2 neue Matrizen.

Eine Matrix kann sowohl nach der i-ten Zeile als auch nach der j-ten Spalte entwickelt werden:

(1) Entwicklung nach der i-ten Zeile entwickelt: $\mathbf{det}\,(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \mathbf{det}\,(A_{ij})$

(2) Entwicklung nach der j-ten Spalte entwickelt: $\mathbf{det}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \mathbf{det}\,(A_{ij})$

Als Beispiel wollen wir nun A nach der 2-ten Zeile entwickeln:

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(A) &= (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \mathbf{det}\,(A_{21}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \mathbf{det}\,(A_{22}) + (-1)^{2+3} \cdot a_{23} \cdot \mathbf{det}\,(A_{23}) \\
&= -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -4 \cdot (18 - 24) + 5 \cdot (9 - 21) - 6 \cdot (8 - 14) \\
&= 24 - 60 + 36 = 0
\end{aligned}$$

A ist also singulär. Bei genauerem Hinsehen wird ersichtlich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir werden hier nur den Beweis für die Entwicklung nach der i-ten Spalte führen. Sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Die Determinante von A ist nun eine Funktion der Zeilenvektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(A) &= \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \mathbf{det}\left(v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j, v_{i+1}, \ldots, v_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{det} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun formen wir weiter um:

$$\mathbf{det}\,(A) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \mathbf{det} \begin{pmatrix} a_{1,j} & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(\#)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j-2} \cdot \mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,j} & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \mathbf{det}\,(A_{ij})$$

Anmerkung:

> **Zu $(*)$: Paarweises Vertauschen der Spalten, so daß die j-te Spalte in die erste Spalte übergeht ($j-1$ Schritte).**
>
> **Zu $(\#)$: Paarweises Vertauschen der Zeilen, so daß dieb i-te Zeile in die erste Zeile übergeht ($i-1$ Schritte).**

Die Laplace-Entwicklung ermöglicht eine rekursive Berechnung von Determinanten - Sie ist eher von theoretischer Bedeutung, da aus Gründen der Performance nicht praktikabel. Ermöglicht auch eine rekursive Definition von Determinanten beliebiger Größe.

3.5.10 Ergänzung zur Leibnizschen Determinantenformel S_n

Für S_n gilt: $S_n : \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ **Bijektion**

3.5.11 Definition (III.5.b): Inversion

Gilt für (i, j) mit $i < j$, daß $\sigma(i) > \sigma(j)$ so spricht man von einer Inversion.
Beispiel für Inversion: Sei σ gegeben mit:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgende Paare sind Inversionen: $(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$.

3.5.12 Definition (III.5.c): sgn $(\sigma) := (-1)^{\#\,\text{Inversionen}}$

Für jede Inversion oder Transposition $\tau \in \mathbf{S}_n$ **gilt sgn** $(\tau) = -1$.
Also gilt:

(i) sgn $(\sigma) = 1 \quad \Leftrightarrow$ **Anzahl der Inversionen ist gerade:** σ **ist eine gerade Permutation**

(ii) sgn $(\sigma) = -1 \quad \Leftrightarrow$ **Anzahl der Inversionen ist ungerade:** σ **ist eine ungerade Permutation**

Auf diese Art und Weise brauchen wir $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ **Vergleiche. Dies ist für große** σ **nicht mehr praktisch.**

3.5.13 Lemma (III.5.6):

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$ **Für jedes** $\sigma \in \mathbf{S}_n$ **gilt: sgn** $(\sigma) = \prod\limits_{i<j} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$

<u>**Beweis**</u>**: Sei** m **die Anzahl der Fehlstände von** σ**. Dann gilt:**

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i)) &= \left(\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}(\sigma(j)-\sigma(i))\right)\cdot(-1)^m\cdot\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}|\sigma(j)-\sigma(i)| \\
&= (-1)^m \textstyle\prod_{i<j}(j-i)\,(-1)^m \displaystyle\prod_{i<j}|\sigma(j)-\sigma(i)| \\
&= (-1)^m \prod_{i<j}(j-i)
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung hat man sich zu überzeugen, daß die beiden Produkte bis auf die Reihenfolge die gleichen Faktoren enthalten.

3.5.14 (III.5.7): Sätze über das Signum

Es gilt:

(i) sgn $(\sigma \circ \tau) =$ **sgn** $(\sigma)\cdot$**sgn** (τ), **sgn :** $\mathbf{S}_n \to (\{1, \ldots, n\}, \cdot)$ **ist Epimorphismus von Gruppen.**

(ii) sgn $(i_1, \ldots, i_r) = (-1)^{r-1}$

(iii) sgn $\left(\sigma^{-1}\right) =$ **sgn** (σ)

<u>**Beweis**</u>**:**
Zu (i)**:**

$$\mathbf{sgn}\,(\tau\circ\sigma) = \prod_{i<j}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{j-i} = \prod_{i<j}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

Da das zweite Produkt gleich sgn (σ) **ist (folgt direkt aus obigen Lemma (III.5.6)), genügt es zu zeigen, daß das erste Produkt gleich sgn** (τ) **ist.**

$$\prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$
$$= \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i>j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$
$$= \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$

Da σ bijektiv ist, enthält dieses letzte Produkt, bis auf Reihenfolge, die gleichen Faktoren wie $\prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - \sigma} = \mathbf{sgn}(\tau)$.

Zu (ii): Jedes $\sigma \in \mathbf{S}_n$ läßt sich als Produkt von Transpositionen darstellen (direkte Folgerung aus (i)): $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$, d.h. $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

$\sigma = (i_1 \cdots i_k)$ ist ein Zyklus der Länge k, d.h. σ läßt sich auch in folgender Form als ein Produkt von $k-1$ Inversionen darstellen: $\sigma = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{k-1} i_k)$. Also ist $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$

Zu (iii): siehe Definition (III.5.a)

Aus (i) und (ii) erhalten wir zwei Varianten für die praktische Berechnung des Signums:

(I) $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)(i_{r+1}, \ldots, i_s)(i_{s+1}, \ldots, i_z) \ldots = z_1 \cdot \ldots \cdot z_k$ **wobei z_i ein Zyklus der Länge r_i ist. Nun gilt für $\mathbf{sgn}(\sigma)$:**

$$\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^{r_1 - 1 + \ldots + r_k - 1}$$

(II) $\sigma = \prod$ **Transpositionen:**

$$\sigma = \prod_{k=1}^{r} (i_k, j_k), \quad \mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^r$$

Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Zerlegung in Zyklen: $(1\,6)(2\,5\,3\,7\,4)(8\,10\,9)$. **Also $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{5-1} \cdot (-1)^{3-1} = -1$.**
Nun Zerlegung wir σ in Transposition: $(1\,6)(2\,4)(2\,7)(2\,3)(2\,5)(8\,9)(8\,10)$.
Also: $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^7 = -1$.

3.5.15 Permanente - Ungelöstes Problem der Komplexitätstheorie

Sei $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Nun ist $\mathbf{Perm}(A)$ (die Permanente) definiert als

$$\mathbf{Perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$\mathbf{Perm}(A)$ ist ähnlich der Leibnizschen Determinantenformel.
Problem: schnelle Berechnung, denn die Formel ist exponential Komplex. D.h die Rechenschritte wachsen mit $n! \approx n^n = e^{n \cdot \log(n)} \geq 2^n$.

3.5.16 Definition (III.5.d): Adjungierte Matrix $\mathbf{ad}(A)$

Die adjungierte Matrix $\mathbf{ad}(A)$ ist gegeben durch $\mathbf{ad}(A) := \left((-1)^{i+j} \cdot \mathbf{det}(A_{ij})\right)_{ij}$
Die Vorzeichen liefern ein Schachbrettmuster:

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.5.17 Satz (III.5.8)

Sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Nun gilt:

$$(\mathbf{ad}(A))^T \cdot A = \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{E}_n$$

Beweis:

$$(\mathbf{ad}(A))^T \cdot A = \left((-1)^{i+j} \cdot \mathbf{det}(A_{ij})\right)_{ij}^T \cdot (a_{ij}) = (b_{ij})$$

Also gilt für jedes einzelne b_{ij}:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot \mathbf{det}(A_{ik}) \cdot a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{kj} \cdot \mathbf{det}(A_{ik}) \end{aligned}$$

Obige Umformung verstehen wir als Entwicklung nach der i-ten Spalte der Determinante.
In A wird die i-te Spalte gestrichen und durch die j-te Spalte ersetzt. Nun treten zwei verschiedene Fälle auf:

(I) Für $i = j$: $b_{ij} = \mathbf{det}(A)$

(II) Für $i \neq j$: $b_{ij} = 0$, da wir eine Matrix erhalten, deren i-te und j-te Spalte identich sind.

Daher:

$$(\mathbf{ad}(A))^T \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbf{det}(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{det}(A) \end{pmatrix} = \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{E}_n$$

Inversenbildung einer Matrix: A invertierbar $\Leftrightarrow \mathbf{det}(A) \neq 0$. Deshalb folgt für invertierbare Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}(A)} \cdot (\mathbf{ad}(A))^T$$

Beispiel:
Sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

und sei $\mathbf{det}(A) = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0$. Für die adjungierte Matrix $\mathbf{ad}(A)$, beziehungsweise die transponierte adjungierte Matrix $(\mathbf{ad}(A))^T$ folgt:

$$\mathbf{ad}(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{det}(A_{11}) & -\mathbf{det}(A_{12}) \\ -\mathbf{det}(A_{21}) & \mathbf{det}(A_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{ad}(A))^T = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die inverse Matrix A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma & -\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta \\ \gamma \cdot \delta - \gamma \cdot \delta & \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun kennen wir zwei Möglichkeiten zur Inversenberechnung:

(I) Formel

(II) Zeilenumformungen von $(A|\, E)$ nach $\left(E|\, A^{-1}\right)$

In späteren Vorlesungen werden noch mehr Möglichkeiten entwickelt.
Folgerung:

$$\mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) = (\mathbf{det}(A))^{n-1}$$

falls $\mathbf{det}(A) \neq 0$:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{ad}(A))^T \cdot A &=& \ \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{E}_n \\ \Rightarrow\ & (\mathbf{ad}(A))^T &=& \ \mathbf{det}(A) \cdot A^{-1} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{det}\left((\mathbf{ad}(A))^T\right) &=& \ \mathbf{det}\left(\mathbf{det}(A) \cdot A^{-1}\right) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) &=& \ (\mathbf{det}(A))^n \cdot \mathbf{det}\left(A^{-1}\right) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) &=& \ (\mathbf{det}(A))^n \cdot \tfrac{1}{\mathbf{det}(A)} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) &=& \ (\mathbf{det}(A))^{n-1} \end{aligned}$$

Wir haben folgende (schon bekannte) Eigenschaften der Determinante benutzt:

$\mathbf{det}(\alpha \cdot \mathbf{M}) = \mathbf{det}(\alpha \cdot v_1, \ldots, \alpha \cdot v_n) = \alpha^n \cdot \mathbf{det}(v_1, \ldots, v_n) = \alpha^n \cdot \mathbf{det}(\mathbf{M})$

$\mathbf{det}\left(A^T\right) = \mathbf{det}(A)$

Bleibt zu zeigen:

$$\mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}$$

Beweis:

$$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \mathbf{det}\left(A \cdot A^{-1}\right) = \mathbf{det}(E) \Rightarrow \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = 1 \Rightarrow \mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}$$

für $\mathbf{det}(A) \neq 0$.

3.5.18 Bemerkungen zu $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

Allgemein gilt:

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : A \ \textbf{invertierbar}\}$$

$$A \ \textbf{invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{det}(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}(A) = n$$

Bemerkungen:

1. Anzahl $\mathbf{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ =Anzahl $\mathbf{GL}(n, \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}) = (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdot \ldots \cdot \left(p^n - p^{n-1}\right)$
2. $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$, $\mathbf{M}_i(\beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\} \Rightarrow$ Jede reguläre Matrix ist Produkt von gewissen $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ und $\mathbf{M}_i(\beta)$. Man sagt: $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ und $\mathbf{M}_i(\beta)$ erzeugen $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$.
3. Spezielle lineare Gruppe $\mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) : \mathbf{det}(A) = 1\}$$

Behauptung: $\mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$ ist eine Untergruppe der $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

(i) $\mathbf{det}(A \cdot B) = \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{det}(B) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$ ist unter der Multiplikation abgeschlossen.

(ii) Gruppenaxiome:

(1) Einselement $\mathbf{E}_n \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$

(2) Assoziativität vererbt sich von der $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

(3) Inverses Element:

$$\mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}$$

Existenz:

$$\mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)} \overset{\textbf{n.V.}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

(4) $\mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$ wird erzeugt von den $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ für $i, j \in 1, \ldots, n$, $\alpha \in \mathbb{K}$

4. $\mathbf{SL}(n, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{Z}) : \mathbf{det}(A) = 1\}$. $\mathbf{SL}(n, \mathbb{Z})$ ist auch Gruppe: E, Assoziativität, Abgeschlossenheit klar.
Inverses Element:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}(A)} \cdot \left((-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|\right) = \underbrace{\left((-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|\right)}_{(*)} \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{Z})$$

Anmerkung: $(*)$ ist ganzzahlig.