Kapitel IV: Normalenform und Eigenwerttheorie

4.1 Kapitel (IV.1): Eigenwerte, Eigenvektoren

4.1.1 Definition (IV.1.a): Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum

Gegeben sei ein Endomorphismus $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ beziehungsweise $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von f beziehungsweise A wenn gilt:

$$\exists v \neq 0 : f(v) = \lambda \cdot v \quad \textbf{beziehungsweise} \quad \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : A \cdot x = \lambda \cdot x$$

(ii) Gilt $f(v) = \lambda \cdot v$ mit $v \neq 0$, so heißt v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Analog: gilt $A \cdot x = \lambda \cdot x$ mit $x \neq 0$, so heißt x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(iii) $\mathbf{Eig}(\lambda, f) = \{v \in \mathbf{V} : f(v) = \lambda \cdot v\}$ wird als Eigenraum von f zum Eigenwert λ bezeichnet. Analog: $\mathbf{Eig}(\lambda, A) = \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = \lambda \cdot x\}$ wird als Eigenraum von A zum Eigenwert λ bezeichnet. Achtung: Im Eigenraum ist auch $\{0\}$ enthalten, obwohl Null kein Eigenvektor gemäß obiger Definition ist.

4.1.2 Beispiele für Eigenwerte

a) Drehung um einen Winkel α im $\mathbb{R}^2$, wobei der Ursprung Drehpunkt ist.

Es handelt sich um eine lineare Abbildung. Um die Matrix aufzustellen betrachten wir was passiert wenn wir die einzelnen Spaltenvektoren (hier e_1 und e_2) um einen Winkel α drehen:

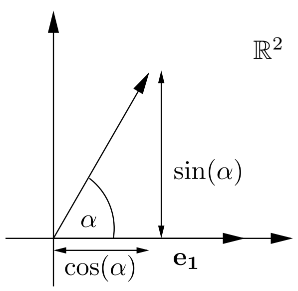

Abbildung IV-1: Drehung von e_1 um α

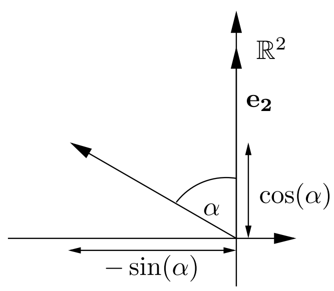

Abbildung IV-2: Drehung von e_2 um α

Damit ergibt sich folgende Matrix für eine Drehung um den Winkel α:

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Determinante von D_α ist ebenfalls leicht zu berechnen:

$$\mathbf{det}(D_\alpha) = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$\mathbf{det}(D_\alpha) = 1$, d.h. eine Drehung erhält den Maßstab.

Nun wollen wir die Eigenwerte berechnen: $D_\alpha \cdot x = \lambda \cdot x$.
Aus geometrischen Gründen folgt: Für $\alpha \neq 0, \pi$ **gibt es keine Eigenvektoren.**
Für $\alpha = 0$ **beziehungsweise** $\alpha = \pi$ **gilt:**

(1) $\alpha = 0$**:** $D_0 = id$**, dann ist** $D_0 \cdot x = x \Rightarrow$ **jeder Vektor** $x \neq 0$ **ist Eigenvektor zum Eigenwert** 1.

(2) $\alpha = \pi$**:** $D_\pi = -id$**, dann ist** $D_\pi \cdot x = -x \Rightarrow$ **jeder Vektor** $x \neq 0$ **ist Eigenvektor zum Eigenwert** -1.

b) Drehung um einen Winkel α **im** $\mathbb{C}^2$**, wobei der Ursprung Drehpunkt ist.**
Also: $D_\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.
Nun müssen wir folgendes komplexes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren obiges Gleichungssystem aus:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) &= \lambda \cdot x \\ x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) &= \lambda \cdot y \end{aligned}$$

Anschließend fassen wir alle Terme mit x **beziehungsweise** y **zusammen und erhalten:**

$$\begin{aligned} x \cdot (\cos(\alpha) - \lambda) - y \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot (\cos(\alpha) - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Nun suchen wir solche λ**, die nicht triviale Lösungen gestatten.**
Wäre A **regulär:** $A \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot 0 = 0$ **Also notwendige Bedingung:**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \textbf{ ist singulär} \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist in $\mathbb{C}$ **immer lösbar:** $\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm i \cdot \sin(\alpha) = e^{\pm i\alpha}$.
$\lambda_{1,2}$ **reell - genau für** $\alpha = 0, \pi$.
Bisher: λ **ist Eigenwert** $\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0$.
Behauptung:
Die Umkehrung gilt auch: $\lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda$ **ist Eigenwert.**
Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}}_{\doteqdot A} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbb{L}(A, 0)) = 2 - \mathbf{rg}(A) \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0 \quad \textbf{mit} \quad D_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.1.3 Satz (IV.1.1)

Sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ **ist Eigenwert** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = 0$

(ii) Ist λ **Eigenwert** $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{Eig}(\lambda, A) = \mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)$
mit $\quad \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(\lambda, A)) = n - \mathbf{rg}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$

Beweise:
(i) **"$\Rightarrow$"** λ **Eigenwert** $\quad\Rightarrow\quad \exists x \neq 0$**:** $A \cdot x = \lambda \cdot x \quad\Rightarrow\quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \cdot x = 0.$
Das heißt: $\mathbf{dim}(\mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)) \neq \{0\}$, $\mathbf{dim}(\mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)) \geq 1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{rg}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \lneqq n$
$\Rightarrow \quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$ **nicht regulär** $\quad\Rightarrow\quad \mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = 0.$
"$\Leftarrow$" $\mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = 0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$ **ist singulär,** $\mathbf{rg}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \lneqq n$
$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)) \geq 1 \quad\Rightarrow\quad \exists x \neq 0 : (\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \cdot x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A \cdot x = \lambda \cdot x$
(ii) $x \in \mathbf{Eig}(\lambda, A) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda \cdot x = A \cdot x \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \cdot x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)$
Anmerkung: Dieser Beweis ist eine beliebte Aufgabe in der mündlichen Prüfung, da er viele Elemente der linearen Algebra auf kompakte Art und Weise kombiniert.

Alternative Berechnung von Eigenwerten

Wir wissen: $\mathbf{det}(A - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$**. Es gibt zwei Möglichkeiten Eigenwerte zu berechnen:**

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad\Leftrightarrow\quad A \cdot x - \lambda \cdot \mathbf{E} \cdot x = 0$$

Nun müssen wir uns nur über den Zusammenhang zwischen $\mathbf{det}(B)$ **und** $\mathbf{det}(-B)$ **klar werden.**
Es ist leicht zu sehen, daß für $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **gelten muß:** $\mathbf{det}(-B) = (-1)^n \cdot \mathbf{det}(B)$

4.1.4 Gestalt von $\mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$

Zuerst wollen wir uns die Leibnizsche Determinantenformel ins Gedächtnis zurückrufen

$$\mathbf{det}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Wir richten unser Augenmerk auf die n **Faktoren: Aus jeder Zeile wird ein Faktor ausgewählt, so daß jede Spalte einmal vertreten ist.**
Annahme: Wir würden aus zwei verschiedenen Zeilen zwei Elemente aus derselben Spalte auswählen:

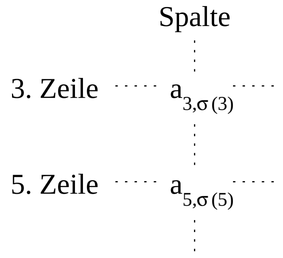

Abbildung IV-3: Auswahl zweier Elemente aus derselben Spalte

Wir können aber diese Auswahl nicht treffen, da es sich bei σ **um eine Bijektion handelt.**

4.1.5 Beispiel für $n = 3$ (die Sarrussche Regel)

Es gilt:

$$\textbf{det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$- a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

Die Sarrussche Regel ist häufig aus der Schule bekannt.
Anmerkungen zu den Vorzeichen:
Betrachten wir nur den Term $a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$ so gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \quad \Rightarrow \quad \textbf{sgn}\,(123) = (-1)^{3-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad +$$

Analog: $a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) \quad \Rightarrow \quad \textbf{sgn}\,(132) = (-1)^{3-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad +$$

Aber: $a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13) \quad \Rightarrow \quad \textbf{sgn}\,(13) = (-1)^{2-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad -$$

Die restlichen Terme sind analog zu behandeln - siehe auch sgn (σ) **(Definition: (III.**5.c**)).**
Hier nun noch einmal die Regel von Sarrus zum Merken:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Abbildung IV-4: Regel von Sarrus

Nun wollen wir eine Formel für det $(\lambda\cdot\mathbf{E} - A)$**, wobei** $(\lambda\cdot\mathbf{E} - A) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$**, entwickeln.**
Wir wissen:

$$\textbf{det}\,(\lambda\cdot\mathbf{E} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm\,(n - \textbf{fache Produkte})$$

Für die Summe der n-fachen Produkte gilt nun:

$$\sum \pm\,(n - \textbf{fache Produkte}) = (\lambda - a_{11})\cdot(\lambda - a_{22})\cdot\ldots\cdot(\lambda - a_{nn})$$
$$\pm c_2\cdot(n-2) - \textbf{fache Produkte der Form } (\lambda - \alpha_{ii})\ldots \pm c_n$$

wobei c_i Konstanten sind.
Wir erhalten also:

$$\textbf{det}\,(\lambda\cdot\mathbf{E} - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - a_{ii}) + \sum_{j=2}^{n} c_j\cdot\lambda^{n-j} = \lambda^n - \lambda^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{j\geq 2} d_j\cdot\lambda^{n-j}$$

4.1.6 Definition (IV.1.b): Spur der Matrix

Die Spur der Matrix ist definiert als Spur $(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Also gilt für det $(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$**:**

$$\mathbf{det}\,(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = \lambda^n - \mathbf{Spur}\,(A) \cdot \lambda^{n-1} + d_2 \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + d_n$$

Zur Bestimmung von d_n **setzen wir** $\lambda = 0$ **und erhalten:**

- **auf der linken Seite: det** $(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = \mathbf{det}\,(-A) = (-1)^n \cdot \mathbf{det}\,(A)$
- **auf der rechten Seite:** d_n

Also: $d_n = (-1)^n \cdot \mathbf{det}\,(A)$

4.1.7 Definition (IV.1.c): Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix ist definiert als

$$\mathbf{det}\,(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = \lambda^n - \mathbf{Spur}\,(A) \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \mathbf{det}\,(A)$$

4.1.8 Satz (IV.4.2)

Die Eigenwerte einer Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
Anmerkung: Das charakteristische Polynom, zu einer Matrix A**, wird in vielen Büchern mit** χ_A **bezeichnet.**

4.1.9 Beispiele für die Berechnung von charakteristischen Polynomen

(i) **Sei** $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ **mit** $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$**. Nun gilt für** $\chi_A(\lambda)$**:**

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda - \delta \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha) \cdot (\lambda - \delta) - \beta \cdot \gamma = \lambda^2 - \lambda \cdot \underbrace{(\alpha + \delta)}_{\mathbf{Spur}\,(A)} + \underbrace{(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma)}_{(-1)^2 \cdot \mathbf{det}\,(A)}$$

(ii) **Nun sei** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**. Wir müssen also die Lösungen von** $\lambda^2 - a \cdot \lambda + b = 0$ **bestimmen. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:**

$$\left(\lambda - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

Diese Gleichung hat eine reelle Lösung falls

$$\frac{a^2}{4} - b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0 \qquad (*)$$

Bei der letzteren Form spricht man auch von der Diskriminantenbedingung. Für λ **ergeben sich damit als Lösungen:**

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

Jetzt wollen wir noch untersuchen wann A keine reellen Eigenwerte besitzt. Es gilt: A hat keine reellen Eigenwerte wenn $\lambda^2 - (\alpha+\delta)\cdot\lambda + (\alpha\cdot\delta - \beta\cdot\gamma) = 0$ keine reelle Lösung hat. Nach $(*)$ gilt dafür

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (\alpha+\delta)^2 \geq 4\alpha\cdot\delta - 4\beta\cdot\gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha\cdot\delta + \delta^2 + 4\beta\cdot\gamma \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha-\delta)^2 + 4\beta\cdot\gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Achtung: A hat in diesem Fall keine reellen Eigenwerte, wohl aber komplexe Eigenwerte.
Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ hat A immer Eigenwerte, da laut dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom

$$z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ (genau n) Lösungen hat.

4.1.10 Satz (IV.1.3):

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $f \in \mathbf{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Dann sind die Eigenwerte von f genau die Eigenwerte von $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. Insbesondere sind die Eigenwerte von $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ unabhängig von der Wahl der Basis.

<u>Beweis</u>: Sei $\Phi_{\mathfrak{A}} \begin{cases} V \to \mathbb{K}^n \\ a_i \mapsto e_i \end{cases}$ Isomorphismus mit $f(v) = \Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}\left(\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\cdot\Phi_{\mathfrak{A}}(v)\right)$ für alle $v \in V$, also gilt für alle $v \in V\setminus\{0\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda\cdot v \quad &\Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}\left(\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\cdot\Phi_{\mathfrak{A}}(v)\right) = \lambda\cdot\Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}\left(\Phi_{\mathfrak{A}}(v)\right) = \Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}(\lambda\cdot \underbrace{\Phi_{\mathfrak{A}}(v)}_{\mathrel{\hat{=}}\,\tilde{v}}) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\cdot\tilde{v} = \lambda\cdot\tilde{v} \end{aligned}$$

<u>Bemerkungen</u>:

(i) **Die Eigenvektoren von $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ hängen aber von der Wahl der Basis ab, denn $v \rightsquigarrow \Phi_{\mathfrak{A}}(v)$ bei gleichen Eigenwerten.**

(ii) $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \underbrace{\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})}_{\mathrel{\hat{=}}\,\mathbf{T}^{-1}} \cdot \mathrm{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot \underbrace{\mathrm{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})}_{\mathrel{\hat{=}}\,\mathbf{T}}$

Generell gilt: Unter $A \mapsto \mathbf{T}^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{T}$ bleiben die Eigenwerte invariant, falls $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$. Sogar das charakteristische Polynom bleibt gleich denn

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(\lambda\cdot\mathbf{E}_n - A) = \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}(\lambda\cdot\mathbf{E}_n - A)\cdot\mathbf{T}\right) &= \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}\lambda\cdot\mathbf{E}_n\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{T}\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\lambda\cdot\mathbf{E}_n - \mathbf{T}^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{T}\right) \end{aligned}$$

4.1.11 Zusammenfassung

$f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ linear, $v \in \mathbf{V}\setminus\{0\}$ heißt Eigenvektor, falls $\exists\lambda \in \mathbb{K}$ mit $f(v) = \lambda\cdot v$, λ heißt Eigenwert. Sprich: v ist ein Eigenvektor zu Eigenwert λ.
Eigenraum zu λ:

$$\mathbf{Eig}\{v \in \mathbf{V} : f(v) = \lambda\cdot v\} = \{0\} \cup \{\textbf{Eigenvektoren zu } \lambda\}$$

$\mathbf{Eig}(\lambda, f) < \mathbf{V}$, denn

$$\mathbf{Eig}(\lambda, f) = \mathbf{Kern}(f - \lambda\cdot\mathbf{id}_{\mathbf{V}})$$

Spezialfall: $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, $f = f_A$: $x \mapsto A\cdot x$ (Matrizentheoretische Fassung)
Charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) := \mathbf{det}(\lambda\cdot\mathbf{E} - A)$ (Im Fischer: $\mathbf{det}(A - \lambda\cdot\mathbf{E})$)

4.2 Kapitel (IV.2): Polynomringe

Problematik von Polynomen und Polynomfunktionen
Beispiele für Polynomfunktion:

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(X) = X^3 + 4X^2 - 2$
- $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}},\ f(X) = X^3 - X$
- $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}},\ f(X) = X^{10} - X^2$

In $\mathbb{R}$ sind Polynom und Polynomfunktion identisch.
In $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ gilt: $\overline{0}^3 - \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{1}^3 - \overline{1} = \overline{0}$, $\overline{2}^3 - \overline{2} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad f(X) = X^3 - X \equiv 0$ **in** $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$**.**
Analog: In $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ gilt: $f(X) = X^{10} - X^2 \equiv 0$
Problem: Funktionen sind Nullfunktionen, sehen aber nicht so aus $\Rightarrow$ Unterscheidung zwischen Polynomen und Polynomfunktionen.
Anmerkung zur Terminologie: Gegeben sei f mit

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i$$

a_i **wird als der i-te Koeffizient von f bezeichnet.**

4.2.1 Definition (IV.2.a): Gleichheit von Polynomen

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins:

$$\mathbf{R}[X] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i : n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Gegeben seien f, g mit

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i, \quad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j$$

OBdA: $n \leq m$**:** $f = g \Leftrightarrow$ **Für** $i = 0, 1, \ldots, n$**:** $a_i = b_i$**, für** $i = n+1, \ldots, m$**:** $b_i = 0$**.**
Hier ein Beispiel:

$$0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 = 0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2$$

4.2.2 Definition (IV.2.b): Addition von Polynomen

Seien f, g gegeben wie oben. OBdA: $n = m$ **(Ansonsten füllen wir mit Nullen auf)**

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i + \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \cdot X^k$$

4.2.3 Definition (IV.2.c): Multiplikation von Polynomen

Seien f, g gegeben wie oben.

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) \cdot X^k = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$$

4.2.4 Satz (IV.2.1): $\mathbf{R}[X]$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Zur Erinnerung: Ein kommutativer Ring mit Eins ($(\mathbf{R}, +, \cdot)$) muß folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) $(\mathbf{R}, +)$ **ist abelsche Gruppe**

(ii) $(\mathbf{R}, \cdot)$ **ist kommutative Halbgrup e mit Eins**

(iii) Distributivgesetz

Beweis: $(\mathbf{R}[X], +)$ **ist abelsche Gruppe**
Assoziativität: zu zeigen: $(f+g)+h = f+(g+h)$ **- folgt direkt aus der Assoziativität in** $\mathbb{K}$**.**
Kommutativität: zu zeigen $f+g = g+f$ **- folgt direkt aus der Kommutativität in** $\mathbb{K}$**.**
Nullelement:

$$0_{\mathbf{R}[X]} = \sum 0 \cdot X^i$$

Additives Inverses:

$$-\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) \cdot X^i$$

Beweis: $(\mathbf{R}[X], \cdot)$ **ist kommutative Halbgruppe mit Eins.**
Wir werden bei diesem Teil des Beweises die Assoziativität nach der Distributivität zeigen.
Kommutativität: zu zeigen:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right)$$

Klar, da $(\mathbf{R}, \cdot)$ **kommutativ.**
Distributivgesetz: Übungsaufgabe 7 auf Übungszettel 2.
Eine Anmerkung zur Notation: $0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 1 \cdot X^2 =: X^2$. **Allgemein:**

$$a \cdot X^k := 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \ldots + 0 \cdot X^{k-1} + a \cdot X^k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i$$

wobei $a_i = a$ **für** $i = k$ **und** $a_i = 0$ **für** $i \lneqq k$**.**
Nachprüfen:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i = \textbf{wirkliche Summe der Polynome}$$

<u>Assoziativität</u>: Wir werden die Assoziativität mit Hilfe der Distributivität zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} c_l \cdot X^l\right) \\
= \quad & \left[\left(a_0 \cdot X^0 + \ldots + a_n \cdot X^n\right) \cdot \left(b_0 \cdot X^0 + \ldots + b_m \cdot X^m\right)\right] \cdot \left(c_0 \cdot X^0 + \ldots + c_l \cdot X^l\right) \\
\overset{\textbf{Distr.}}{=} \quad & \textbf{Summe der } \left[\left(a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(b_j \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(c_k \cdot X^k\right)
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} c_l \cdot X^l\right)\right] \\
= \quad & \left(a_0 \cdot X^0 + \ldots + a_n \cdot X^n\right) \cdot \left[\left(b_0 \cdot X^0 + \ldots + b_m \cdot X^m\right) \cdot \left(c_0 \cdot X^0 + \ldots + c_l \cdot X^l\right)\right] \\
\overset{\textbf{Distr.}}{=} \quad & \textbf{Summe der } \left(a_i \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(b_j \cdot X^j\right) \cdot \left(c_k \cdot X^k\right)\right]
\end{aligned}$$

Nun bleibt (wegen der Distributivität) die Assoziativität folgender Produkte zu zeigen:

$$\left[\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(c \cdot X^l\right) = \left(a \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(b \cdot X^j\right) \cdot \left(c \cdot X^l\right)\right]$$

Dazu:

$$\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right) = \sum_{k=0}^{i+j} d_k \cdot X^k$$

wobei die d_k von folgender Gestalt sind:

$$d_k = \left(0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \ldots + 0 \cdot X^{i-1} + a \cdot X^i\right) \cdot \left(0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \ldots + 0 \cdot X^{j-1} + b \cdot X^j\right)$$

Für $k < i + j$: $d_k = 0$, für $k = i + j$: $d_k = a \cdot b$. Damit ergibt sich:

$$\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right) = a \cdot b \cdot X^{i+j}$$

Mit diesem Zwischenergebnis können wir nun die Assoziativität zeigen:
Für die linke Seite gilt: $\left[\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(c \cdot X^l\right) = (a \cdot b) \cdot c \cdot X^{(i+j)+l}$
Für die rechte Seite gilt: $\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(b \cdot X^j\right) \cdot \left(c \cdot X^l\right)\right] = a \cdot (b \cdot c) \cdot X^{i+(j+l)}$
Die linke und die rechte Seite sind gleich, da in $(\mathbf{R}, \cdot)$ die Koeffizienten und in $(\mathbb{N}_0, +)$ die Exponenten assoziativ sind.
<u>Einselement</u>: $1_{\mathbf{R}[X]} = 1 \cdot X^0$
Noch eine Anmerkung zur Notation:

- $a \cdot X^k$ **wird als Monom bezeichnet (in manchen Bücher auch als Term)**
- a **ist der Koeffizient des Monoms**
- X^k **ist ein Term: Monom mit Koeffizient Eins.**
- **Jedes Polynom ist die Summe von Monomen:**

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i = \textbf{Summe von Monomen } a_i \cdot X^i$$

4.2.5 Einbettung von $\mathbb{R}$ als konstante Polynome in $\mathbf{R}[X]$

$\mathbb{R} \to \mathbf{R}[X]$, $a \mapsto a \cdot X^0$. **Leicht zu zeigen: injektiv, Ringhomomorphismus.**
Ab jetzt: $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbf{R}[X]$, $a = a \cdot X^0$, $f = a_0 + a_1 \cdot X^1 + \ldots + a_k \cdot X^k$.
"$\hookrightarrow$" symbolisiert die Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbf{R}[X]$.
Für die Eins- und Nullelemente gelten:

$$1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbf{R}[X]}, \quad 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbf{R}[X]}$$

Konvention: Wir können Monome mit Koeffizienten Null weglassen. Zudem können wir bei Monomen mit Koeffizienten Eins den Koeffizienten weglassen:

$$0 + 1 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 + 1 \cdot X^4 = X + X^4$$

4.2.6 Definition (IV.4.d): Grad eines Polynoms

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{f}) = n \quad :\Leftrightarrow \quad f = a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n$$

mit $a_n \neq 0$. **Konvention: grad (Nullpolynom) $= -\infty$ oder nicht definiert.**

4.2.7 Satz (IV.2.2): Gradformel

Sei R Integritätsbereich (= nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins). Dann gilt in $\mathbf{R}[X]$:

(i) $\mathbf{grad}\,(f+g) \leq \mathbf{max}\,\{\mathbf{grad}\,(f), \mathbf{grad}\,(g)\}$, **sogar**
$\mathbf{grad}\,(f+g) = \mathbf{max}\,\{\mathbf{grad}\,(f), \mathbf{grad}\,(g)\}$, **falls** $\mathbf{grad}\,(f) \neq \mathbf{grad}\,(g)$.

(ii) $\mathbf{grad}\,(f \cdot g) = \mathbf{grad}\,(f) + \mathbf{grad}\,(g)$

Beweis:
(i): **Seien** f **und** g **gegeben mit** $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i, \quad a_n \neq 0, \qquad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j, \quad b_m \neq 0$
In diesem Fall sei $n \neq m$, **etwa** $n < m$. **Für** $f + g$ **folgt:**

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot X + \ldots + (a_n + b_n) \cdot X^n + b_{n+1} \cdot X^{n+1} + \ldots + b_m \cdot X^m$$

$\Rightarrow$ **Behauptung.**
Falls $n = m$: $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot X + \ldots + (a_n + b_n) \cdot X^n \quad \Rightarrow$ **Behauptung.**
(ii): **Seien** f **und** g **gegeben mit**

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i, \quad a_n \neq 0, \qquad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j, \quad b_m \neq 0$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j\right) &= \sum_{k=0}^{n+m} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}\right) \cdot X^k \\ &= \sum (\textbf{Monome vom Grad} < n+m) + a_n \cdot b_m \cdot X^{n+m} \end{aligned}$$

Wenn R Integritätsbereich ist muß $a_n \cdot b_m \neq 0$ **sein** $\Rightarrow$ **Behauptung.**
Beispiel: Sei $\mathbf{R} = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_4$ **(R ist in diesem Fall kein Integritätsbereich):**

$$(a + b \cdot X)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot X + b^2 \cdot X^2$$

Für $b = 2$: $(a + b \cdot X)^2 = a^2$ **oder** $(1 + 2 \cdot X)^2 = (3 + 2 \cdot X)^2 = 1$ **in** $\mathbb{F}_4$.

4.2.8 Definition (IV.4.e): Normierung

f **normiert** $:\Leftrightarrow f = a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + 1 \cdot X^n$ **wobei grad** $(f) = n$.
Für ein beliebiges R (kein Integritätsbereich notwendig) mit normiertem f gilt:

$$\mathbf{grad}\,(f \cdot g) = \mathbf{grad}\,(f) + \mathbf{grad}\,(g)$$

4.2.9 Satz (IV.2.3): Division mit Rest

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f, g \in \mathbf{K}[X]$, $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q, r mit

(i) $f = g \cdot q + r$

(ii) $r = 0$ **oder grad** $(r) <$ **grad** (g)

Beispiel: $X^4 + 1 = \left(X^2 + X + 2\right) \cdot \left(X^2 - X - 1\right) + 3 \cdot X + 3$
Beweis: Wir werden zuerst die Eindeutigkeit und dann die Existenz beweisen:
<u>Eindeutigkeit</u>:

$$f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r' \quad \Rightarrow \quad g \cdot (q - q') = r' - r$$

Angenommen: $r \neq r' \quad \Rightarrow$ **Alle Polynome** $\neq 0$
Wenden wir nun die multiplikative Gradformel (IV.2.2) an so folgt:

$$\mathbf{grad}\,(g) + \mathbf{grad}\,(q - q') = \mathbf{grad}\,(r' - r)$$

Wir erhalten einen Widerspruch, da grad $(r' - r) <$ **grad** (g) **und grad** $(q' - q) \geq 0$.
Also: $r = r' \Rightarrow 0 = g \cdot (q - q')$. **Da $g \neq 0$ nach Voraussetzung folgt analog zu oben mit Hilfe der Gradformel $q = q'$.**
$\Rightarrow$ **Eindeutigkeit.**
<u>Existenz</u>:
Per Induktion nach grad (f), $f \neq 0$.
IA: grad $(f) = 0$**: trivial, grad** $(f) = n > 0$
IS: Sei $a_n \neq 0$, **grad** $(f_n) \leq n - 1$
Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: grad $(g) > n \quad \Rightarrow \quad q = 0, r = f$.
2. Fall: grad $(g) = m \leq n \quad \Rightarrow \quad g = b_m \cdot X^m + \ldots$, $b_m \neq 0$.
Es ist $f - a_n \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n-m} \cdot g$ **ein Polynom vom Grad** $\leq n - 1 =: \overline{f}$.
Nach Induktionsvoraussetzung: $\overline{f} = g \cdot \overline{q} + r$. **Einsetzen liefert:**

$$f = \left(a_n \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n-m} + \overline{q}\right) \cdot g + r$$

4.2.10 Division mit Rest im $\mathbf{K}[X]$

Anmerkung: **$\mathbb{K}$ ist natürlich ein Körper. ($f = q \cdot g + r$, $r = 0$ oder grad$(r) \lneqq$ grad(g) für $g \neq 0$)**

Analog zu $\mathbb{Z}$: $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < |b|$. q und r sind beide eindeutig.

($\mathbb{Z}$ und $\mathbf{K}[X]$ sind Beispiele für Euklidische Ringe)

Zur Erinnerung:

Sei R Integritätsbereich ($a \cdot b = 0 \Rightarrow a = \vee b = 0$)

Teilbarkeitsbeziehung: $a|\,b :\Leftrightarrow \exists c : a \cdot c = b$.

Eigenschaften:

(i) $a|\,b \wedge a|\,c \Rightarrow a|\,(x \cdot b + y \cdot c)$ **für** $x, y \in \mathbf{K}$

(ii) **Sei** $a \cdot b \neq 0$. $a|\,b \wedge b|\,a \Leftrightarrow a = \varepsilon \cdot b$. ε **wird als Einheit bezeichnet:** $\varepsilon \cdot \eta = 1$

Beweis zu (ii)

"$\Leftarrow$": Klar.

"$\Rightarrow$": $a|\,b \wedge b|\,a \Leftrightarrow b = c \cdot a \wedge a = d \cdot b \Rightarrow b = cd \cdot b \Leftrightarrow b \cdot (1 - cd) = 0$. **Da** $b \neq 0$ **laut Voraussetzung:** $1 = cd$, c **Einheit.**

4.2.11 Allgemeine Anmerkungen zur Teilbarkeitslehre

Zur Erinnerung:

a) $d = \mathbf{ggT}(a, b)$ **wobei** $a \neq 0$, $b \neq 0$

(i) $d|\,a \wedge d|\,b$

(ii) $e|\,a \wedge e|\,b \Rightarrow e|\,d$ **(schluckt anderen Teiler)**

- **Allgemein: Definition des größten gemeinsamen Teiler**
- **Existenz: Im Allgemeinen nicht vorhanden**
- **Im Fall der Existenz nur bis auf Einheiten als Faktoren festgelegt**

b) $m = \mathbf{kgV}(a, b)$

(i) $a|\,m \wedge b|\,m$

(ii) $a|\,n \wedge b|\,n \Rightarrow m|\,n$

- **Im Fall der Existenz: Bis auf Einheit als Faktor festgelegt.**

Anzahl von ggTs und kgVs:

- **In $\mathbb{N}$: nur jeweils ein ggT und ein kgV.**
- **In $\mathbb{Z}$: zwei ggTs und zwei kgVs**

4.2.12 Teilbarkeit in $\mathbf{K}[X]$

Seien $f, g \in \mathbf{K}[X]$**.**
Teilbarkeit: $f | g \Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{K}[X]$**:** $g = f \cdot h$**.**
Einheit in $\mathbf{K}[X]$**:** f **Einheit** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{grad}(f) = 0$ **(Das heißt:** $f \equiv a \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$**)**
Beweis:
"$\Leftarrow$**"** $f = a \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, $g = a^{-1} \Rightarrow f \cdot g = 1$
"$\Rightarrow$**"** $f \cdot g = 1$**. Nach der Gradformel folgt:** $\mathbf{grad}(f) + \mathbf{grad}(g) = \mathbf{grad}(1) = 0$
$\Rightarrow$ $\mathbf{grad}(f) = \mathbf{grad}(g) = 0$**, da** $\mathbf{grad}(\cdot) \in \mathbb{N}_0$**.**

4.2.13 Existenz des ggT (f, g) für $\mathbf{K}[X]$ /Existenz einer Zerlegung in irreduzieble Polynome

Zuerst wollen wir noch einmal $\mathbb{Z}$ **betrachten:**
Warum existiert ein ggT (a, b) **in** $\mathbb{Z}$**? Die Menge der gemeinsamen Teiler von** a **und** b **ist endlich und es existiert ein größter (bezüglich der Ordnung) gemeinsamer Teiler.**
Eigenschaft (ii) **des ggT** (a, b) **folgt aus der Primfaktorzerlegung:**

$$a = \prod p^{\alpha_p}, b = \prod p^{\beta_p} \Rightarrow \quad \mathbf{ggT}(a, b) = \pm \prod p^{\mathbf{min}\{\alpha_p, \beta_p\}}$$

Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

$$\prod p^{\delta_p} \Big| \prod p^{\gamma_p} \quad \Leftrightarrow \quad \forall p : \delta_p \leq \gamma_p$$

Analog über die Primfaktorzerlegung können wir das kgV (a, b) **definieren:**

$$a = \prod p^{\alpha_p}, b = \prod p^{\beta_p} \Rightarrow \quad \mathbf{kgV}(a, b) = \pm \prod p^{\mathbf{max}\{\alpha_p, \beta_p\}}$$

4.2.14 Teilbarkeitslehre in $\mathbf{K}[X]$

Die Einheiten in $\mathbf{K}[X]$ **sind die konstanten Polynome** $\neq 0$**.**
Beispiele:

(a) $\mathbb{R}[X] : f = X^3 - 8, g = X^2 + X + 1$

$$\begin{array}{rcl}
\left(x^3 - 8\right) : \left(x^2 + x + 1\right) & = & X^2 + 2x + 4 \\
\underline{- \left(x^3 - 2x^2\right)} & & \\
2x^2 - 8 & & \\
\underline{- \left(2x^2 - 4x\right)} & & \\
4x - 8 & & \\
\underline{- (4x - 8)} & & \\
0 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^3 - 8 = (x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right) \qquad g$ **ist in** $\mathbb{R}[X]$ **irreduziebel.**

(b) $\mathbb{Q}[X] : x^{101} - 4$ **wahrscheinlich keine irreduziblen Faktoren**

(c) $\mathbb{R}[X] : x^4 - 1$ **hat Faktoren:** $(x - 1), (x + 1), \left(x^2 + 1\right)$

Es ist leicht zu ersehen, daß eine Faktorisierung mit hohem Rechenaufwand, also auch mit vielen Problemen, verbunden ist.

4.2.15 Definition (IV.2.f): irreduzibel

Ein Polynom f heißt irreduzibel $\Leftrightarrow$ grad$(f) \geq 1$, f hat keine Zerlegungen in Grad-kleinere Faktoren von Grad ≥ 1

4.2.16 Satz (IV.2.4): Polynome: ggT, kgV, irreduzieble Faktoren

Gegeben sei der Polynomring $\mathbf{K}[\mathbf{X}]$ über den Körper $\mathbb{K}$.

(i) **Es existieren ggT und kgV**

(ii) $\mathbf{ggT}(f,g) \cdot \mathbf{kgV}(f,g) = \text{const.} \cdot f \cdot g$

(iii) **Die Faktorisierung in irreduzieble Polynome ist eindeutig, bis auf Reihenfolge und konstante Kaktoren $\neq 0$.**

Beweisskizze: Euklidscher Algorthmus für Polynomdivision $f = f_1$, $g = f_2$:

$$\begin{array}{rrclr} & f_1 & = & q_1 \cdot f_2 + f_3 & f_3 = 0 \vee \mathbf{grad}(f_3) < \mathbf{grad}(f_2) \\ \textbf{Falls } f_3 \neq 0 & f_2 & = & q_2 \cdot f_3 + f_4 & f_3 = 0 \vee \mathbf{grad}(f_4) < \mathbf{grad}(f_3) \\ & & \vdots & & \\ \textbf{Falls } f_{i-1} \neq 0 & f_{i-2} & = & q_{i-2} \cdot f_{i-1} + f_i & f_i = 0 \vee \mathbf{grad}(f_i) < \mathbf{grad}(f_{i-1}) \\ \textbf{Falls } f_i \neq 0 & f_{i-1} & = & q_{i-1} \cdot f_i + f_{i+1} & f_{i+1} = 0 \vee \mathbf{grad}(f_{i+1}) < \mathbf{grad}(f_i) \end{array}$$

Der Algorithmus terminiert, da grad(f_i) immer kleiner wird und eventuell Null wird. Dies bedeutet, das wir nach maximal grad(f_{i+1}) Schritte berechnen müssen. Irgendwann ist $f_{i-1} = q_{i-1} \cdot f_i + 0$, i maximal. Aus dieser Gleichung können wir den ggT ablesen: ggT$(f,g) = f_i$.

<u>Bisher</u>: Die Existenz des ggTs folgt direkt aus dem Euklidschen Algorithmus.

Nun gehen wir zur Faktorzerlegung über.

<u>Behauptung</u>: Es existiert eine Faktorzerlegung in irreduzieble Polynome.

<u>Beweis</u>: Per Induktion nach grad$(f) \geq 1$

"grad$(f) = 1$": Unmöglich, da $f = g \cdot h$, grad(g), grad$(h) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad$ grad$(f) \geq 2$.

"grad$(f) = n$":

- **f ist irreduziebel $\quad \Rightarrow \quad$ fertig**
- **Sonst: $f = g \cdot h$, $1 \leq$ grad(g), grad$(h) \leq$ grad(f)**
  Nach Induktion: $g = \prod p_i \quad p_i$ irreduziebel, $h = \prod q_j \quad q_j$ irreduziebel.
  $\Rightarrow \quad f = g \cdot h = \prod p_i \cdot \prod q_j$

Eindeutigkeit durch Übergang zum normierten Polynom.

<u>Erweiterter Euklidischer Algorithmus</u>:

$$\mathbf{ggT}\,(f,g) = A\cdot f + B\cdot g$$

wobei $A, B \in \mathbf{K}\,[X]$ **- der euklidische Algorithmus liefert** A **und** B**.**
Konsequenz:
I) Existenz:

- **In** $\mathbb{Z}$**:** p **ist Primzahl:** $p|\,r\cdot s \Rightarrow p|\,r \vee p|\,s$
- **In** $\mathbf{K}\,[X]$**:** f **ist irreduzibel:** $f|\,g\cdot h \Rightarrow f|\,g \vee f|\,h$

Beweis: Sei f **irreduzibel,** $f|\,g\cdot h$
Angenommen f **teilt** g **nicht** $\Rightarrow \mathbf{ggT}\,(f,g) = 1 = A\cdot f + B\cdot g$
Multiplikation mit h **liefert:**

$$h = A\cdot f\cdot h + B\cdot g\cdot h = (A\cdot h)\cdot f + \underbrace{B\cdot C\cdot f}_{(*)} = f\cdot (A\cdot h + B\cdot C) \quad \Rightarrow \quad \textbf{Behauptung}$$

Anmerkung zu $(*)$**: Laut Voraussetzung:** $f|\,(g\cdot h)$

II) Eindeutigkeit
Es ist möglich die Eindeutigkeit der Faktorzerlegung aus dem Euklidischen Algorithmus zu zeigen:
Seien $f, g \in \mathbf{K}\,[X]$**,** $g \neq 0$**.**
<u>Euklidischer Algorithmus</u>:

- **Input:** $f_1 = f$**,** $f_2 = g$
- **Schleife:** $f_i = f_{i+1}\cdot q_i + f_{i+2}$ **- Wichtig:** $f_{i+2} = 0$ **oder** $\mathbf{grad}\,(f_{i+2}) < \mathbf{grad}\,(f_{i+1})$
- **Terminierung der Schleife für** $f_{i+2} = 0$
- **Output:** $f_{i+1} = \mathbf{ggT}\,(f,g)$ **(Eindeutigkeit bis auf konstante Faktoren)**

$f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_r = g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_s$ **wobei** f_i, g_i **irreduzible Polynome seien.**
$f_1|\,g_1\cdot(g_2\cdot\ldots\cdot g_s) \Rightarrow f_1|\,g_1 \vee f_1|\,(g_2\cdot\ldots\cdot g_s) \quad \overset{\textbf{OE}}{\Rightarrow} \quad g_1 = \mathbf{const}\cdot f_1 \vee f_1|\,(g_2\cdot\ldots\cdot g_s)$
$\Rightarrow$ **per Induktion** $\ldots \Rightarrow \exists g_1$ **mit** $g_1 = \mathbf{const}_1\cdot f_1$
OE (Umnummerierung) $g_1 = \mathbf{const}_1\cdot f_1 \Rightarrow$ **(Kürzen - Konstante in** g_2 **eingegangen)**
$f_2\cdot f_3\cdot\ldots\cdot f_r = g_2\cdot g_3\cdot\ldots\cdot g_s$
Per Induktion: $r = s$**, nach Umnummerierung:** $g_i = \mathbf{const}_i\cdot f_i$
Eindeutige (bis auf Reihenfolge) normierte irreduzible Zerlegung: $f = c\cdot f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_r$ **mit** $c \neq 0$ **wobei** f_i **irreduzible Polynome sind.**
Endgültige Formulierung:

$$f = c\cdot\prod p^{\alpha_p}$$

wobei p **die Menge der vorhandenen irreduziblen Polynome durchläuft.**
Anmerkungen zur Primfaktorzerlegung:

- **In der Praxis von geringer Bedeutung, da sehr rechenaufwendig**
- **Theoretisch von Nutzen:**

$$\begin{aligned} \mathbf{ggT}\left(c\cdot\prod p^{\alpha_p}, c'\cdot\prod p^{\beta_p}\right) &= \prod p^{\mathbf{min}\{\alpha_p,\beta_p\}} \\ \mathbf{kgV}\left(c\cdot\prod p^{\alpha_p}, c'\cdot\prod p^{\beta_p}\right) &= \prod p^{\mathbf{max}\{\alpha_p,\beta_p\}} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{ggT}\,(f,g)\cdot\mathbf{kgV}\,(f,g) &= f\cdot g\cdot\mathbf{const} \end{aligned}$$

4.2.17 Beispiele zum Euklidschen Algorithmus

(a) $f = x^4 - 1$, $g = x^3 - 1$

$$\begin{aligned} f = x^4 - 1 &= q_1 \cdot \left(x^3 - 1\right) + f_3 \\ f_1 = x^4 - 1 &= x \cdot \left(x^3 - 1\right) + (x - 1) \\ f_2 = x^3 - 1 &= q_2 \cdot (x - 1) + f_4 \\ x^3 - 1 &= \left(x^2 + x + 1\right) \cdot (x - 1) + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ **ggT** $(f, g) =$ **ggT** $\left(x^4 - 1, x^3 - 1\right) = x - 1$

(b) $f = 2x^4 - 1$, $g = x^3 - 1$

$$\begin{aligned} f = 2x^4 - 1 &= q_1 \cdot \left(x^3 - 1\right) + f_3 \\ f_1 = 2x^4 - 1 &= 2x \cdot \left(x^3 - 1\right) + (2x - 1) \\ f_2 = x^3 - 1 &= \frac{1}{2}x^2 \cdot (2x - 1) + \frac{1}{2}x^2 - 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right) \cdot (2x - 1) - \frac{7}{8} \\ 2x - 1 &= \left(-\frac{16}{7}x + \frac{8}{7}\right)\left(-\frac{7}{8}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ **ggT** $(f, g) =$ **ggT** $\left(2x^4 - 1, x^3 - 1\right) = -\frac{7}{8}$

Bemerkung: $d =$ **ggT** (a, b)**,** ε **Einheit** $\quad \Rightarrow \quad d \cdot \varepsilon =$ **ggT** (a, b)**.**

Deshalb: ggT $(f, g) =$ **ggT** $\left(2x^4 - 1, x^3 - 1\right) = 1$

Einsetzen in Polynome

Situation: $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}'$ **(**$\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ **kommutative Ringe mit Eins). Sei** $a \in \mathbf{R}'$ **und**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot X^i \in \mathbf{R}[X]$$

Einsetzen von a **liefert:**

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot a^i \in \mathbf{R}'$$

4.2.18 Satz (IV.2.4) (Einsetzen ist Ringhomorphismus)

(i) $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

(ii) $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$

Beweise:

(i) **Seien** f **und** g **gegeben mit**

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \cdot X^i$$

Nach Definition der Polynom-Addition:

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \cdot X^i$$

Nun setzen wir a **ein und erhalten:**

$$(f + g)(a) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \cdot a^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \cdot a^i + \beta_i \cdot a^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \cdot a^i\right) + \sum_{i=0}^{n} \left(\beta_i \cdot a^i\right) = f(a) + f(g)$$

(ii) **Bekannt: Für die Multiplikation zweier Polynome gilt:**

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot X^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m}\beta_i\cdot X^i\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\cdot\beta_{k-i}\right)\cdot X^k$$

Setzen wir nun a ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)(a) &= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\cdot\beta_{k-i}\right)\cdot a^k\\
&= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\beta_{k-i}\cdot a^{k-i}\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq n+m}}\left(\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\beta_j\cdot a^j\right)\right)\\
&= \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq n+m}}\left(\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\beta_j\cdot a^j\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\beta_j\cdot a^j\right)\\
&= f(a)\cdot g(a)
\end{aligned}$$

Warum Ringhomomorphismus: a **liefert:** $\Phi:\mathbf{R}[X]\to\mathbf{R}'$, $f\mapsto f(a)$, **es ist**

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g) &= \Phi(f)+\Phi(g)\\
\Phi(f\cdot g) &= \Phi(f)\cdot\Phi(g)
\end{aligned}$$

4.2.19 Satz (IV.2.5): "Abspalten der Nullstellen" - Partialbruchzerlegung

Sei $\mathbb{K}$ Körper, $f\in\mathbf{K}[X]$ (grad$(f)\geq 1$), $a\in\mathbb{K}$

(i) $f(a)=0\Leftrightarrow(X-a)|f\quad\Leftrightarrow\quad f=(X-a)\cdot g(X)$ **für ein** $g\in\mathbf{K}[X]$

(ii) grad$(f)=n\quad\Rightarrow\quad f$ **hat in $\mathbb{K}$ höchstens n Nullstellen**

Beweise:
Zu (i): Division mit Rest: $f=(X-a)\cdot q+r$. **Wir müssen zwei Fälle unterschieden:** $r=0\vee$ **grad**$(r)<1\quad\Rightarrow\quad$ **grad**$(r)=0$. **Das heißt:** $r=$ **const. Einsetzen von a liefert:**

$$f(a)=(a-a)\cdot g(a)+r(a)=r\quad\Rightarrow\quad f(a)=r=0\quad\textbf{nach Voraussetzung}$$

Das heißt: $f(X)=(X-a)\cdot q(X)+f(a)\quad\Rightarrow\quad$ **Behauptung.**
Zu (ii): Induktionsbeweis:
f **habe eine Nullstellen:** $f=(X-a)\cdot g$, $g\in\mathbf{K}[X]$. **Nach Gradformel: grad**$(g)=n-1$
Weitere Nullstelle von f:

$$f(b)=(b-a)\cdot g(b)$$

$\Rightarrow\quad b$ **Nullstellen von** $f\Rightarrow b=a\vee g(b)=0$. **Nach Induktion hat g höchstens $n-1$ Nullstellen $\Rightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen.**

<u>Bemerkungen</u> (teilweise mit Beweisen):

1.) $f \in \mathbf{K}[X]$, $f(x) = (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot \ldots \cdot (X - a_i) \cdot g(x)$ **wobei** g **ohne Nullstelle in** $\mathbb{K}$.

2.) Satz $(\mathbf{IV}.2.5.i)$ **gilt auch über Ringen,** $(\mathbf{IV}.2.5.ii)$ **ist absolut falsch. Beispiel: Sei** $\mathbf{R} = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}[X]$**. Löse** $T^2 - 1 = 0$ **in R. Diese Gleichung hat unendliche viele Lösungen:** $(1 + 2 \cdot X^n)^2 = 1 + 2 \cdot 2 \cdot X^n + (2 \cdot X^n)^2 = 1 + 4 \cdot X^n + 4 \cdot X^{2n} = 1$ **für alle** n.

3.) Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht konstante Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ **besitzt. Äquivalent dazu: Jedes Polynom vom Grad** ≥ 1 **ist Produkt von Linearfaktoren und eventuell einer Konstante.**

Beispiel: $\mathbb{C}$ **ist algebraisch abgeschlossen (**$\Rightarrow$ **irreduzible Polynome in** $\mathbb{C}$ **haben Grad**$=$ 1**. (Fundamentalsatz der Algebra - erster Beweis darüber von Gauß)).**

Beispiel: Berechnung von $T^n - 1 = 0$ **(Berechnung der** n**-ten Wurzeln einer komplexen Zahl)**

Bereits bekannt (Multiplikation zweier komplexen Zahlen):

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi} \\ w &= r' \cdot (\cos(\varphi') + i \cdot \sin(\varphi')) = r' \cdot e^{i\varphi'} \\ z \cdot w &= r \cdot r' \cdot e^{i \cdot (\varphi + \varphi')} \end{aligned}$$

Damit: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n\varphi}$**. In den Übungen schon gezeigt: Formel von Moivre:**

$$z_k = e^{i \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k}$$

mit $k = 0, 1, \ldots n - 1$

4.) <u>Zerlegung von Polynomen</u> in $\mathbb{R}[X]$

(i) irreduzible Polynome haben Grad$= 1$ **oder Grad**$= 2$. $X^2 + aX + b$ **ist irreduzibel** $\Leftrightarrow$ $X^2 + aX + b$ **in** $\mathbb{R}$ **nicht lösbar**

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \notin \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \lneqq 0 \end{aligned}$$

(ii) $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$ **ist in** $\mathbb{R}$ **lösbar (Allgemeiner:** $X^n + bX^{n-1} + \ldots + c = 0$ **ist in** $\mathbb{R}$ **für ungerade** n **lösbar). Wir wissen aus der Analysis:**

$$\lim_{x \to -\infty} X^n + bX^{n-1} + \ldots + c = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} X^n + bX^{n-1} + \ldots + c = \infty$$

Da es sich bei diesen Polynomen um stetige Funktion handelt folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß $X^n + bX^{n-1} + \ldots + c$ **mindestens eine Nullstelle hat.**

Die Behauptung (i) **läßt sich mit Hilfe des Fundamentalsatz der Algebra beweisen.**

Sei $f \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, **wobei**

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot X^i$$

Nun ist:

$$f(z) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^i$$

für ein $z \in \mathbb{C}$.

Einschub: Konjugiert komplexe Zahlen:

- **Sei** $z = a + bi$. **Nun gilt:** $\overline{a + ib} = a - bi$
- **Seien** $z, w \in \mathbb{C}$: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ **beziehungsweise** $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Nun gilt auch:

$$0 = \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i \cdot z^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \cdot \overline{z^i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{z}^i \quad \Rightarrow \quad f(\overline{z}) = 0$$

Also: Wenn $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ **und** z **Nullstelle** $\Rightarrow$ $\overline{z}$ **ist auch Nullstelle von** f.
$\Rightarrow$ **In** $\mathbb{C}[X]$:

$$(X - z) \cdot (X - \overline{z}) | f$$

Zudem gilt:

$$(X - z) \cdot (X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z}) \cdot X + z \cdot \overline{z} = \underbrace{X^2 + 2 \cdot \Re(z) \cdot X + |z|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

Also: $f = \left(X^2 + 2 \cdot \Re(z) \cdot X + |z|^2\right) \cdot g$, **wobei** $g \in \mathbb{R}[X]$

5.) <u>Integration über Partialbruchzerlegung</u>

Häufig sind Intergrale der Form

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \, \mathbf{d}x$$

zu lösen, wobei $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

1. Schritt: $g = f_1 \cdot f_2$, $\mathbf{ggT}(f_1, f_2) = 1$. **Nach Vorausetzung:** $1 = A \cdot f_1 + B \cdot f_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f_1 \cdot f_2} = \frac{A}{f_2} + \frac{B}{f_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} = \frac{\overline{A}}{f_2} + \frac{\overline{B}}{f_1} = C + \frac{A_1}{f_2} + \frac{A_2}{f_1}$$

wobei C, A_1, A_2 **Polynome sind mit** $\mathbf{grad}(A_i) < \mathbf{grad}(f_i)$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{f}{g} \, \mathbf{d}x = \int C \, \mathbf{d}x + \int \frac{A_1}{f_2} \, \mathbf{d}x + \int \frac{A_2}{f_1} \, \mathbf{d}x$$

2. Schritt: Schließlich erhalten wir:

$$\int \frac{f}{g} \, \mathbf{d}x = \int C \, \mathbf{d}x + \underbrace{\int \frac{c_i}{(X - a_i)^k} \, \mathbf{d}x + \ldots}_{\textbf{lineare Terme}} + \underbrace{\int \frac{c_j}{(X^2 + aX + b)^l} \, \mathbf{d}x + \ldots}_{\textbf{quadratische Terme}}$$

6.) <u>Faktorisierung der Polynome</u> in $\mathbb{R}[X]$:

$$f(X) = c \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}}_{(i)} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \left(X^2 + \beta_j \cdot X + \gamma_j\right)^{s_j}}_{(ii)}$$

Da wir uns in einem Polynom-Ring über $\mathbb{R}$ befinden ist f ein Produkt von linearen Termen (i) und quadratischen Termen (ii), wobei die quadratischen Terme irreduzibel sind, also $\left(\frac{\beta_j}{2}\right)^2 - \gamma_j \lneqq 0$.

7.) <u>Integration von gebrochen rationalen Funktionen</u>:

$$\int \frac{f}{g}\,\mathrm{d}X = \int \frac{f}{g_1 \cdot g_2}\,\mathrm{d}X = \int A + \frac{B}{g_1} + \frac{C}{g_2}\,\mathrm{d}X$$

wobei A, B, C Polynome, ggT $(g_1, g_2) = 1$, grad $(g_1) >$ grad (B), grad $(g_2) >$ grad (C).
Anwendung der follständigen Faktorisierung liefert:

$$\int A + \frac{B}{g_1} + \frac{C}{g_2}\,\mathrm{d}X = \int A\,\mathrm{d}X + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int \frac{B_i}{(X - \alpha_i)^{r_i}}\,\mathrm{d}X}_{(i)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \int \frac{C_j}{\left(X^2 + \beta_j \cdot X + \gamma_j\right)^{s_j}}\,\mathrm{d}X}_{(ii)}$$

Nun müssen wir die verbleibenden Brüche, welche entweder lineare (i) oder quadratische Terme (ii) im Nenner haben, integrieren:
a) Berechnung der linearen Terme:

$$\int \frac{B}{(X - \alpha)^r}\,\mathrm{d}X$$

Wir können B_i per Division mit Rest zerlegen: $B = \tilde{B} \cdot (X - \alpha) + B(\alpha)$. Damit folgt:

$$\int \frac{B}{(X - \alpha)^r}\,\mathrm{d}X = \int \frac{\tilde{B}}{(X - \alpha)^{r-1}}\,\mathrm{d}X + \int \frac{B(\alpha)}{(X - \alpha)^r}\,\mathrm{d}X$$

wobei grad $(B) < r$ und grad $\left(\tilde{B}\right) < r - 1$. Schließlich ist alles zurückgeführt auf:

$$\int \frac{1}{(X - \alpha)^r}\,\mathrm{d}X = \begin{cases} \ln(|X - \alpha|) & r = 1 \\ -\frac{1}{r+1} \cdot \frac{1}{(X - \alpha)^{r+1}} & r > 1 \end{cases}$$

b) Berechnung der quadratischen Terme

$$\int \frac{C}{\left(X^2 + \beta \cdot X + \gamma\right)^s}$$

Zuerst führen wir eine Variablensubstitution durch. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$X^2 + \beta \cdot X + \gamma = \left(X + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \underbrace{\left[\gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]}_{\doteqdot\, \delta} = \left(X + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \delta = \delta \cdot \left[\left(\frac{X + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\delta}}\right)^2 + 1\right]$$

Nun substituieren wir: $Z := \dfrac{X + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\delta}}$

Schließlich erhalten wir Integrale der Form $\displaystyle\int \frac{C(Z)}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z$

C **läßt sich nun per Division mit Rest weiter zerlegen:** $C(Z) = Q(Z)\cdot\left(Z^2+1\right)+(a\cdot Z+b)$
Wir erhalten:

$$\int \frac{C(Z)}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z = \underbrace{\int \frac{Q(Z)}{(Z^2+1)^{r-1}}\,\mathbf{d}Z}_{(i)} + \underbrace{\int \frac{a\cdot Z+b}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z}_{(ii)}$$

Das Integral (i) **zerlegen wir rekursiv weiter, das Integral** (ii) **ist mittels Substitution und partieller Integration zu berechnen:**

$$\int \frac{a\cdot Z+b}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z = \frac{a}{2}\cdot \underbrace{\int \frac{2Z}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z}_{(iii)} + b\cdot \underbrace{\int \frac{1}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z}_{\doteqdot I_r}$$

(iii) **wird direkt per Substitution integriert.** I_r **intergrieren wir mittels partieller Integration:**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z &= \int 1\cdot\frac{1}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z \\
&= Z\cdot\frac{1}{(Z^2+1)^r} + 2r\cdot\int\frac{Z^2}{(Z^2+1)^{r+1}} \\
&= \frac{Z}{(Z^2+1)^r} + 2r\cdot\int\frac{Z^2+1-1}{(Z^2+1)^{r+1}} \\
&= \frac{Z}{(Z^2+1)^r} + 2r\cdot I_r - 2r\cdot I_{r+1}
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit folgende Rekursionsformel:

$$I_{r+1} = \frac{1}{2r}\cdot\frac{Z}{(Z^2+1)^r} + \frac{2r}{2r-1}\cdot I_r \quad \textbf{mit} \;\; I_1 = \arctan(Z)$$

4.3 Kapitel (IV.3): Diagonalisierbarkeit

Zur Erinnerung:
Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linear, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = n$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{W}) = m$, $\mathfrak{A}$ sei Basis von V und $\mathfrak{B}$ sei Basis von W

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(f) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad a_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{pmatrix}, \quad f\,(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i$$

Berechnung der Transformationsmatrix:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{f})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung IV-5: Schema für die Transformationsmatrix

Basiswechsel: Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ Basen von V und $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Basen von W.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{id}"] & \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[r, "\mathbf{id}"] & \mathbf{W} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}'}"] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{f})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung IV-6: Schema für den Basiswechsel

$f = \mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ f \circ \mathbf{id}_{\mathbf{V}}$ wird bezüglich $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ durch $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(f) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$ beschrieben.
Es folgt für die Transformationsformel: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{B}'}\,(f) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(f) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$
Anmerkung: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$ und $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}\,(\mathbf{id})$ sind reguläre Matrizen, da zum Beispiel:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'}\,(\mathbf{id}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id}) = \mathbf{E}$$

4.3.1 Spezialfall: Endomorphismen $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

Wir wählen eine Basis $\mathfrak{A}$ von V mit beschreibender Matrix $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(f)$
(In diesem Fall, da Endomorphismus: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$)
Die Transformationsformel für den Basiswechsel von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ lautet:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}'}\,(f) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(f) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(f) \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

wobei $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{K})$

4.3.2 Definition (IV.3.a): Ähnlichkeit von Matrizen

Seien $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. A und B heißen ähnlich, falls ein $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ mit $B = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$ existiert. T wird als konjugierende Matrix bezeichnet.
Bemerkung: Ähnlichkeit ist Äquivalenzrelation
Zur Erinnerung: Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

(i) **Reflexivität** $A \sim A$: $A = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T} = \mathbf{E}_n$

(ii) **Symmetrie** $B \sim A \Rightarrow A \sim B$: $B = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow A = \mathbf{T}^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{T}$,
$\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ **also** $A = \mathbf{S} \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B$

(iii) **Transitivität: Sei zusätzlich** $C \in \mathbf{M_n}(\mathbb{K})$ **und** $A \sim B$, $B \sim C$:
$A \sim B \Leftrightarrow A = \mathbf{S} \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1}$ **mit** $B \sim C \Leftrightarrow B = \mathbf{T} \cdot C \cdot \mathbf{T}^{-1}$ **folgt:**
$A = \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{T} \cdot C \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot C \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{U} \cdot C \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A \sim C$
Bemerkung: $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}$

4.3.3 Definition (IV.3.b): Diagonalisierbarkeit von f

$f : V \to V$ **Endomorphismus,** f **heißt diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ **es existiert eine Basis** $\mathbb{K}$ **von** V **mit** $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

<u>**Speziell**</u>: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, A **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$**diagonalisierbar.**
<u>**Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie**</u>:
$\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $f(v_j) = \sum\limits_i \alpha_{ij} v_i$ **entspricht der** j **-ten Spalte von**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \cdots \lambda_j \cdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Spalte}$$

daher $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $\mathfrak{A}$ **ist Basis aus Eigenwerten.**

4.3.4 Satz (IV.3.1):

Seien $f : V \to V$ **ein Endomorphismus,** $\mathfrak{B}$ **eine beliebige Basis von** V**. dann sind äquivalent:**

(i) f **diagonalisierbar**

(ii) V **besitzt eine Basis aus Eigenvektoren**

(iii) $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(f)$ **ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix**

<u>Beweis</u>: **Aquivalenz von** (i) **und** (ii) **siehe (IV.3.b).**
$(i) \Rightarrow (iii)$ **Basiswechsel liefert ähnliche Matrizen** $\Rightarrow \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ **ist ähnlich zu**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ **nach Voraussetzung** $\mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Jede reguläre Matrix ist Matrix eines Basiswechsels $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{A}$ **Basis aus Eigenwerten.** $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)\,\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$

$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$ **in** $\mathbf{T}^{-1}$ **sind die Spalten Eigenvektoren ausgedrückt in der Basis** $\mathfrak{B}$.

4.3.5 Charakteristische Polynom von Endomorphismen

Bisher: $\chi_A(\mathbf{T}) = \mathbf{det}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_n - A) \in \mathbf{K}[\mathbf{T}]$
Problem: Die Einträge von $\mathbf{TE_n} - A$ **sind nicht alle in** $\mathbf{K}[\mathbf{T}]$**, die Determinate ist bisher nur über Körper definiert.**
<u>Zwei Begründungen</u>:
(I) Entwicklung der Determinantentheorie über Ringen, hier $\mathbf{K}[\mathbf{T}]$**, aus der Leibniz'schen Determinantenformel** $\mathbf{det} A = \sum_\sigma \mathbf{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i\sigma(i)}$**, alle Standartsätze (bis auf Alternierende Multilinarform") gelten.**
(II) Suche Körper $\mathbb{L} \supseteq \mathbf{K}[\mathbf{T}]$**. Es gibt einen solchen Körper, und zwar einen kleinsten:**

$$\mathbb{L} = \mathbf{K}[\mathbf{T}] = \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \middle| f, g \in \mathbf{K}[\mathbf{T}], g \neq 0 \right\},$$

den "Körper der rationalen Funktionen".

(a) Gleichheit:
$$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \quad \Leftrightarrow \quad f \cdot g' - f' \cdot g = 0$$

(b) Addition:
$$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{f \cdot g' + f' \cdot g}{g \cdot g'}$$

(c) Multiplikation:
$$\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{f \cdot f'}{g \cdot g'}$$

(d) Inverse:
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{-1} = \frac{g}{f} \quad f \neq 0$$

(e) Doppelbruch:
$$\frac{\frac{f}{g}}{\frac{f'}{g'}} = \frac{f}{g} \cdot \left(\frac{f'}{g'}\right)^{-1} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g'}{f'} = \frac{f \cdot g'}{g \cdot f'}$$

4.3.6 Satz (IV.3.2)

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charaktristische Polynom ($\chi_A(X)$ ist eine Invariante gegenüber Ähnlichkeiten)

Beweis: $B = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$. **Für das charakteristische Polynom von B gilt:**

$$\begin{aligned}\chi_B &= \mathbf{det}(X \cdot \mathbf{E} - B) = \mathbf{det}\left(X \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\mathbf{T} \cdot (X \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\mathbf{T} \cdot [X \cdot \mathbf{E} - A] \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{det}(\mathbf{T}) \cdot \chi_A(X) \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}\right) \\ &= \chi_A(X)\end{aligned}$$

da $\mathbf{det}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{det}\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{det}(\mathbf{E}) = 1$

Konsequenz: Spur und Determinante bleiben bei Ähnlichkeit unverändert, denn:

$$\chi_A(X) = X^n - \mathbf{Spur}(A) \cdot X^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n \cdot \mathbf{det}(A)$$

Bisher: A **ähnlich zu** B **(oft:** $A \approx B$**)** $\Rightarrow \chi_A = \chi_B$

Warnung: $\chi_A = \chi_B \not\Rightarrow A$ **ähnlich zu** B

Beispiel: Sei A **und** B **gegeben mit**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die charaktristischen Polynome gilt:

$$\chi_A(T) = \begin{vmatrix} T-1 & 0 \\ 0 & T-1 \end{vmatrix} = (T-1)^2, \quad \chi_B(T) = \begin{vmatrix} T-1 & 1 \\ 0 & T-1 \end{vmatrix} = (T-1)^2$$

Angenommen es existiert $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ **mit** $\mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = B$, **aber** $\mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot E \cdot \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow B = E$. **Aber** $B \neq E$

4.3.7 Definition (IV.3.c): Charakteristisches Polynom von f

Wähle Basis $\mathfrak{A}$ **von V, setze** $\chi_f(X) := \mathbf{det}\left(X \cdot E - \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\right) = \chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}(X)$

Wohldefiniertheit des charakterisitschen Polynoms von f **(Unabhängigkeit von der Wahl der Basis): Sei** $\mathfrak{B}$ **eine weitere Basis von V, dann gilt:** $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot \mathbf{T}^{-1}$ **für** $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$. **Also:**

$$\chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}(X) = \chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)}(X)$$

4.3.8 Satz (IV.3.3): Eigenwerte von Endomorphismen

Die Eigenwerte von f **sind genau die Nullstellen von** χ_f

Beweis: f **wird in der Basis** $\mathfrak{A}$ **durch** $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ **beschrieben:**

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \cdot v_i, \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \left(\boxed{\alpha_{ij}}\right)$$

Allgemein gilt für Eigenwerte: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\exists v \neq 0$: $f(v) = \lambda \cdot v$

$$v = \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, \quad f(v) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot v_i, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Das heißt: $f(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow A \cdot x = \lambda \cdot x$, $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. **Wir haben bereits gezeigt, daß die Behauptung für Matrizen korrekt ist, also auch für** f.

4.3.9 Beispiel für Eigenwerte eines Endomorphismus

Vergleiche auch Aufgabe 11 vom dritten Übungszettel der LinA II.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$: $\{$**Polynome über** $\mathbb{R}, \mathbf{grad}(f) \leq 4\} = \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. **Für** $f \neq 0$: $\frac{d}{dt}(f) = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = 0$, $f =$ **const. Damit folgt für den Eigenraum:** $\mathbf{Eig}\left(\frac{d}{dt}, 0\right) = \mathbb{R} \cdot 1$
Beschreibung durch Basis $\mathfrak{A} = \left(1, t, t^2, t^3, t^4\right)$

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für das charakteristische Polynom folgt:

$$\chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} = X^5$$

Damit ist die einzige Nullstelle $x_0 = 0$ **einziger Eigenwert.**

4.3.10 Beschreibung der Eigenräume eines Endomorhpismus

Es gilt: $\mathbf{Eig}(f, \lambda) = \{v | f(v) = \lambda \cdot v\} = \mathbf{Kern}(f - \lambda \cdot \mathbf{id})$
Denn: $f(v) = \lambda \cdot v = (\lambda \cdot \mathbf{id})(v) \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda \cdot \mathbf{id})(v) = 0$
Aus der Dimensionsformel folgt: $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f, \lambda)) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{rg}(f - \lambda \cdot \mathbf{id})$
Darstellung der Eigenräume mittels beschreibender Matrizen:
$\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ **sei Basis,** $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. **Nun gilt:**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f - \lambda \cdot \mathbf{id}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) - \lambda \cdot \mathbf{E}$$

Damit folgt: $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f, \lambda)) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}} - \lambda \cdot \mathbf{E}\right)$ **und weiter:**

$$\mathbf{Eig}(f, \lambda) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, (A - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \doteqdot \mathbf{Eig}(A, \lambda)$$

4.3.11 Weiter Charakterisierungen der Diagonalisierbarkeit

Zur Erinnerung an (**IV**.3.b), (**IV**.3.1): $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **heißt diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ **es existiert Basis** $\mathfrak{A}$ **mit**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

(i) $\mathfrak{A}$ **ist Basis von Eigenvektoren**

(ii) λ_i **sind Eigenwerte von** f**, da**

$$\chi_f(X) = \mathbf{det}\begin{pmatrix} X-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X-\lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$$

Zur Erinnerung an (II.4.6) - Direkte Summe zweier Untervektorräume:
Seien $\mathbf{U}, \mathbf{V} < \mathbf{W}$**,** $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \{u+v \mid u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V}\}$**. Nach der Dimensionsformel (II.4.4):**

$$\mathbf{dim}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) + \mathbf{dim}(\mathbf{U}\cap\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{U}) + \mathbf{dim}(\mathbf{V})$$

Diese beiden Sätze sind beliebtes Material für eine mündliche Prüfung bei Hern Becker.
Zur Erinnerung: Definition der direkten Summe von zwei Unterräumen:
U+V heißt direkte Summe $\Leftrightarrow$ **jedes Element von U+V hat eine eindeutige Darstellung der Form** $u+v$ **wobei** $u \in \mathbf{U}$**,** $v \in \mathbf{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \phi$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{dim}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{U}) + \mathbf{dim}(\mathbf{V})$
Notation: $\mathbf{U}\oplus\mathbf{V}$**.**

4.3.12 Definition (IV.3.d): Direkte Summe von Unterräumen (Mehr als zwei)

Gegeben seien $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r < \mathbf{V}$**. Der Unterraum**

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{U}_r = \sum_{i=1}^{r}\mathbf{U}_i = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_r \mid u_i \in \mathbf{U}_i \text{ } \mathbf{f\ddot{u}r} \text{ } i = 1, \ldots, r\}$$

heißt direkt, wenn jedes Element von $\sum_{i=1}^{r}\mathbf{U}_i$ **eine eindeutige Darstellung der Form** $\sum_{i=1}^{r} u_i$**,** $u_i \in \mathbf{U}_i$ **hat. Notation:** $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{U}_r$
Äquivalente Formulierungen:

(i) Die Summe $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{U}_r$ **ist direkt**

(ii) Für alle $i = 1, \ldots, r$ **gilt:** $\mathbf{U}_i \cap \left(\sum_{i \neq j}\mathbf{U}_j\right) = 0$

(iii) $\mathbf{dim}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{U}_r) = \sum_{i=1}^{r}\mathbf{dim}(\mathbf{U}_i)$

Für die Beweise siehe Aufgabe 14 vom vierten Übungszettel der LinA II.

4.3.13 Beispiel: Direkte Summen von Unterräumen im $\mathbb{R}^3$

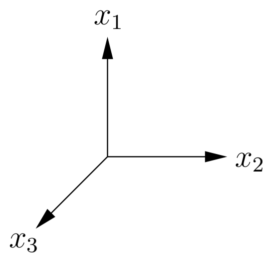

Abbildung IV-7: Der $\mathbb{R}^3$

Die Unterräume seien gegeben mit $\mathbf{U}_i = x_i$-Achse. Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Nun gilt:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = u_1 + u_2 + u_3$$

mit $u_i \in \mathbf{U}_i \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \mathbf{U}_3$

4.3.14 Satz (IV.3.4): Die Summe von Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten ist direkt

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}(f, \lambda_i) = \mathbf{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \mathbf{Eig}(f, \lambda_2) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Eig}(f, \lambda_r)$$

<u>Beweis</u>: Sei $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in \mathbf{Eig}(f, \lambda_i)$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden.
Zuerst zu zeigen: Eindeutigkeit der Darstellung.
Äquivalent zu zeigen: $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_r \quad \Rightarrow \quad v_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$.
<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit der Darstellung
“$\Rightarrow$” Sei die Summe direkt, $v = \sum_{i=1}^{r} v_i = \sum_{i=1}^{r} 0 = 0$, $0 \in \mathbf{Eig}(f, \lambda_i)$, alle $v_i = 0$
“$\Leftarrow$” Voraussetzung: Null nur trivial darstellbar. Sei $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r = v_1' + v_2' + \ldots + v_r'$ wobei $v_i, v_i' \in \mathbf{Eig}(f, \lambda_i)$
$\Rightarrow \quad 0 = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') + \ldots + (v_r - v_r')$. Aber: $(v_i - v_i') \in \mathbf{Eig}(f, \lambda_i)$. Nach Voraussetzung folgt: $v_i - v_i' = 0 \Leftrightarrow v_i = v_i'$
Nachdem wir die Eindeutigkeit der Darstellung gezeigt haben, werden wir den Rest des Beweises mit zwei verschiedenen Argumenten führen:
<u>1. Beweis</u>:
Sei $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$, $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$. Zu zeigen $v_i = 0$. Anwendung von f liefert:

$$0 = f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_r) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r$$

Wenden wir nun f erneut an, so erhalten wir: $0 = \lambda_1^2 \cdot v_1 + \lambda_2^2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_r^2 \cdot v_r$
Haben wir nun f $(r-1)$-mal angewendet, so erhalten wir folgendes homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & \lambda_1^0 \cdot v_1 & + & \lambda_2^0 \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^0 \cdot v_r \\
0 & = & \lambda_1^1 \cdot v_1 & + & \lambda_2^1 \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^1 \cdot v_r \\
0 & = & \lambda_1^2 \cdot v_1 & + & \lambda_2^2 \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^2 \cdot v_r \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & = & \lambda_1^{r-1} \cdot v_1 & + & \lambda_2^{r-1} \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^{r-1} \cdot v_r
\end{array}$$

Dies erinnert uns an die Vandermondsche Matrix ($\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det(\mathbf{A})$):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i\leq j\leq r} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$\prod\limits_{1\leq i\leq j\leq r} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ **genau dann, wenn alle λ_i paarweise verschieden sind.**

Allgemeines Schema zur Lösung für $r = 3$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &\overset{(i)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &\overset{(ii)}{=} (b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c+a-(b+a)) \\ &= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b) \end{aligned}$$

Anmerkungen:

(i) Entwicklung nach der ersten Zeile

(ii) Aufspaltung der Terme in der zweiten Spalte nach dritter Binomischer Formel und Herausziehen der Faktoren in jeder Zeile

Vergleiche Aufgabe 4 auf dem ersten Übungsblatt LinA II.
Formal erhalten wir nun:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \lambda_3^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Alle $v_i = 0$ (Für $\det(A) \neq 0$)**

<u>2. Beweis</u>: Per Induktion nach r.

Gegeben: $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, r$

Induktionsanfang: $r = 1$: trivial (jede Summe aus einem Unterraum ist immer direkt)

Induktionsschritt: $r - 1 \rightsquigarrow r$

Nach Voraussetzung: $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$, $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$

Wenden wir nun f an, so erhalten wir: $0 = v_1 \cdot \lambda_1 + v_2 \cdot \lambda_2 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r$

Multiplizieren wir nun die Voraussetzung mit λ_1 und subtrahieren von der folgenden, so ergibt sich:

$$0 = (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot v_2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\cdot v_3 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)\cdot v_r$$

Per Induktion folgt: alle $(\lambda_i - \lambda_1)\cdot v_i = 0$ für $i = 2, 3, \ldots, r$.

Da $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j \Rightarrow v_2 = v_3 = \ldots = v_r = 0 \Rightarrow v_1 = 0$

Dimension der Eigenräume

(i) **$\mathbf{Eig}(f,\lambda) = \mathbf{Kern}(f-\lambda\cdot\mathbf{id})$, denn $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{rg}(f-\lambda\cdot\mathbf{id})$**

(ii) **Zu beweisen: $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) \leq$ Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteritischen Polynoms**

4.3.15 Definition (IV.3.e): Vielfachheit einer Nullstelle

Sei $g(T) \in \mathbf{K}(T)$ mit $g(\alpha) = 0$.
Nun spalten wir solange eine Nullstelle bis der Rest des Polynoms $h(T)$ für α keine Nullstelle mehr hat:

$$g(T) = (T-\alpha)^{r_\alpha} \cdot h(T)$$

r_α wird nun als Vielfachheit oder Multiplizität von α bezeichnet.

4.3.16 Definition (IV.3.f): f-invarianter Unterraum

Gegeben: $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ (Endomorphismus), $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ heißt f-invariant Unterraum, wenn gilt:

$$f(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$$

4.3.17 Beispiele für f-invariante Unterräume

(a) **$\{0\}$ und $\mathbf{V}$ sind immer invariant (pathologische Fälle)**

(b) **$\mathbb{K}\cdot v$ ist f-invariant $\quad\Leftrightarrow\quad$ v ist ein Eigenvektor**

(c) **Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$ und $f =$ Drehung 60^0 im $\mathbb{R}^2$. In diesem Fall sind nur $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$ invariant.**

(d) **Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}^3$ und $f =$ Drehung im $\mathbb{R}^3$. In diesem Fall sind nur $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$ und die Drehachse invariant.**

(e) **$\mathbf{Eig}(f,\lambda)$ f-invariant: $v \in \mathbf{Eig}(f,\lambda) \quad\Rightarrow\quad f(v) = \lambda\cdot v \in \mathbf{Eig}(f,\lambda)$**
(Denn: $f|_{\mathbf{Eig}(f,\lambda)} =$ Multiplikationen mit λ)

4.3.18 Lemma (IV.3.5)

Sei $\mathbf{U}$ ein f-invarinater Unterraum

$$\Rightarrow \quad \chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T)\cdot g(T)$$

Beweis: Sei $\mathbf{V} = \mathbf{U}\oplus\mathbf{U}'$ und sei $(u_1,\ldots u_r, u_{r+1},\ldots,u_n)$ sei Basis von $\mathbf{V}$, mit $u_1,\ldots,u_r \in \mathbf{U}$ und $u_{r+1},\ldots,u_n \in \mathbf{U}'$.

Die Beschreibung von f in dieser Basis hat Blockstruktur: $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$

Anmerkungen:

- $f(u_1) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{1i} \cdot u_i$ **(U ist f-invarianter Unterraum von V, jedoch über u_i für $i = r+1, \ldots, n$ ist keine Aussage möglich)**
- A **ist eine** $r \times r$**-Matrix und** B **ist eine** $(n-r) \times (n-r)$**-Matrix**

Damit erhalten wir nun folgendes charakteristische Polynom $\chi_f(T)$**:**

$$\begin{aligned} \chi_f(T) &= \det \left(\begin{array}{c|c} T \cdot \mathbf{E}_r - A & -B \\ \hline 0 & T \cdot \mathbf{E}_{n-r} - C \end{array} \right) \\ &= \det(T \cdot \mathbf{E}_r - A) \cdot \det(T \cdot \mathbf{E}_{r-n} - C) \end{aligned}$$

Weiter: $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f|_{\mathbf{U}})$ **mit Basis** $\mathfrak{A} = (u_1, \ldots, u_r)$**. Es folgt die Behauptung:**

$$\chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T) \cdot g(T) \quad \textbf{wobei} \quad g(\lambda) \neq 0$$

D.h.: $\chi_f(T) = (T-\lambda)^{r_\lambda} \cdot g(T)$ **wobei** $g(\lambda) \neq 0$ **und** λ **Eigenwert**

4.3.19 Definition (IV.3.g): Algebraische Vielfachheit, geometrische Vielfachheit

$\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) :=$ **geometrische Vielfachheit von** λ**,**
$r_\lambda :=$ **algebraische Vielfachheit**

4.3.20 Satz (IV.3.6): geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Es gilt: $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) \leq r_\lambda$
Beweis: $\mathbf{Eig}(f,\lambda)$ **ist** f**-invariant:**

$$f|_{\mathbf{Eig}(f,\lambda)} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist $r \times r$**-Matrix,** $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda))$**. Für das charakteristische Polynom gilt:**

$$\chi_{f|_{\mathbf{Eig}(f,\lambda)}} = (T-\lambda)^r \quad \Rightarrow \quad \chi_f(T) = (T-\lambda)^r \cdot \tilde{g}(T)$$

Es folgt die Behauptung: $r \leq r_\lambda$

4.3.21 Beispiel: geometrische Vielfachheit $\lneqq$ algebraischer Vielfachheit

Sei A **gegeben mit**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(T) = (T-1)^2$$

$\Rightarrow \quad \lambda = 1$ **ist einziger Eigenwert. Rechnen wir nun den Eigenraum aus, so erhalten wir:**

$$\mathbf{Eig}(A,1) = \mathbf{Kern}(A - \mathbf{E}) = \mathbf{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für dieses Beispiel: $r = 1 \lneqq r_\lambda = 2$

4.3.22 Hauptsatz (IV.3.7):

Gegeben sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ Endomorphismus (beziehungsweise $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$). Dann sind äquivalent:

(i) f **(beziehungsweise A) sind diagonalisierbar**

(ii) V ist direkt Summe der Eigenräume: $\mathbf{V} = \bigoplus_{\lambda} \mathbf{Eig}(f, \lambda)$ **(bzw.** $\mathbf{V} = \bigoplus_{\lambda} \mathbf{Eig}(A, \lambda)$**)**

(iii) Zwei Teile:

(a) χ_f **(beziehungsweise χ_A) zerfällt über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren**

(b) **Für jeden Eigenwert stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein.**

Beweis:

$(i) \Rightarrow (ii)$**:** f **diagonalisierbar $\Rightarrow$ es existiert eine Basis aus Eigenvektoren**

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}(f, \lambda_i) = \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}(f, \lambda_i)$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$**: Man erhält eine Basis der Form**

$$\dot{\bigcup_{\lambda}} \left\{ v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, \ldots, v_{\lambda_{n_\lambda}} \right\}$$

Stellen wir nun f in dieser Basis da, so erhalten wir:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{B_{\lambda_1}} & & & \\ & \boxed{B_{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_{\lambda_n}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B_{\lambda_r} = \begin{pmatrix} \lambda_r & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Damit folgt für das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$:

$$\chi_f(T) = \prod_{\lambda} (T - \lambda)^{r_\lambda} \qquad (*)$$

$(iii) \Rightarrow (i)$**:**

Laut (a)**:** $\chi_f(T) = \prod (T - \lambda)^{r_\lambda}$**. Laut** (b)**:** $r_\lambda = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f, \lambda))$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}\left(\bigoplus_{\lambda} \mathbf{Eig}(f, \lambda) \right) = \sum r_\lambda \overset{(*)}{=} \mathbf{grad}\left(\chi_f(T)\right) = \mathbf{dim}(\mathbf{V})$$

4.3.23 Bemerkungen

1.) $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **diagonalisierbar** $\overset{\textbf{Def.}}{\Leftrightarrow}$ f_A **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow A = \mathbf{M}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(f_A)$ **ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix:**

$$\mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textbf{für } T \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$$

Dabei:

- **T ist nicht eindeutig bestimmt, wohl aber die Eigenwerte** λ_i
- $\mathbf{T}^{-1}$ **hat als Spalten Eigenvektoren, weil** $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathbf{E}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id})$.

2.) Die zweite Bemerkung ist ein Korrolar:

4.3.24 Korrolar (IV.3.8)

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n$ **(beziehungsweise** $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$**). Hat** f **(beziehungsweise** A**)** n **verschiedene Eigenwerte in** $\mathbb{K}$**, so ist** f **(beziehungsweise** A**) diagonalisierbar.**
Beweis: Folgt aus (**IV**.3.6) **und** (**IV**.3.7): **Alle** $r_\lambda = 1$. **Aus** (**IV**.3.6): $\dim(\mathbf{Eig}(f, \lambda)) = r_\lambda$

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_n)$$

3.) Situation: $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathbf{K}[T]$
Behauptung: f **hat in** $\mathbb{C}$ **eine mehrfache komplexe Nullstelle** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{ggT}(f, f') \neq 1$
Anmerkung: In diesem Fall ist mit f' **tatsächlich die Ableitung gemeint.**
Für den Beweis wollen wir zwei Fälle unterscheiden:
Fall 1: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $f(T) = (T - \alpha)^r \cdot g(T)$ **mit** $g(\alpha) \neq 0$. **Für die Ableitung gilt:**

$$\begin{aligned} f'(T) &= r \cdot (T - \alpha)^{r-1} \cdot g(T) + (T - \alpha)^r \cdot g'(T) \\ &= (T - \alpha)^{r-1} \cdot \underbrace{[r \cdot g(T) + (T - \alpha) \cdot g(T)]}_{\doteqdot h(T)} \end{aligned}$$

mit $h(\alpha) \neq 0$. $\mathbf{ggT}(f, f') = (T - \alpha)^{r-1} \cdot p(T)$ **mit** $p(\alpha) \neq 0$.
Für $r > 1$: $\mathbf{ggT}(f, f') \neq 1$
Sind alle Nullstellen einfach - für $r = 1$**, das heißt** $\mathbf{ggT}(f, f') = 1$ **(Rückrichtung).**
Fall 2: Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$: $\mathbf{ggT}(f, f')$ **bleibt unverändert beim Übergang von** $\mathbb{K}$ **zu** $\mathbb{C}$
Wichtig: ggT-Berechnung ohne Kenntnis der Nullstellen

4.) Trigonalisierbarkeit - wird in Kapitel IV-§5 noch ausführlicher behandelt

4.3.25 Definition (IV.3.h): Trigonalisierbarkeit von f beziehungsweise A

f heißt trigonalisierbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis $\mathfrak{C}$ mit

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ heißt trigonalisierbar

$$\Leftrightarrow \quad A \textbf{ ist ähnlich zu } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.3.26 Satz (IV.3.9)

f (beziehungsweise A) trigonalisierbar $\Leftrightarrow \chi_f$ (beziehungsweise χ_A) zerfällt vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{K}$.
"$\Leftarrow$" $\chi_f(T) = \prod (T - \lambda_i)$ **(Klar)**
"$\Rightarrow$" Algorithmus: Wähle v_1 Eigenvektor zu λ_1: $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$. Nun beschreiben wir v_1 in der Standardbasis:

$$v_1 = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$$

OE: $\alpha_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad v_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ **ist Basis, wobei**

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right) \cdot e_i$$

Nun wollen wir A in der neuen Basis beschreiben:

$$\boxed{\mathbf{T}_0 \cdot A \cdot \mathbf{T}_0^{-1}} \doteqdot \tilde{A}$$

wobei

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \leftarrow \quad \dfrac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} \quad \rightarrow \\ \hline 0 & \\ \vdots & \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \alpha_{1j} \\ 0 & \end{array} \right)$$

da für die j-ten Spalten von $\tilde{A}$ gilt:

$$A_{e_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot e_i = \alpha_{1j} \cdot e_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ij} \cdot e_i = \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \alpha_{1j} \right)$$

Wir erhalten:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array} \right), \qquad \chi_B = \prod_{i=2}^{n} (T - \lambda_i)$$

Per Rekusion: $\mathbf{T}_1 \in \mathbf{GL}(n-1, \mathbb{K})$ **mit**

$$\mathbf{T} \cdot B \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1 \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots\cdots\cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1 \cdot B \cdot \mathbf{T}_1^{-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Damit gilt für T**:**

$$T := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1 \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \mathbf{T}_0, \qquad \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.3.27 Frobenius-Begleitmatrix

Bemerkung: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad \chi_A(T)$ **ist normiertes Polynom vom Grad** n**.**
Frage: Tritt jedes derartige Polynom auf?
Wenn wir schon so fragen ist die Antwort wohl: Ja.
Gegeben $f(T) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot T + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot T^{n-1} + T^n$**. Nun habe** A_n **die folgende Form:**

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Wird als Frobenius-Begleitmarix bezeichnet

Behauptung: $\chi_{A_n} = f$
Wir führen den Beweis per Induktion:
Sei $n = 2$**:**

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \chi_{A_2} &= \mathbf{det}(T \cdot \mathbf{E}_2 - A_2) = \begin{vmatrix} T & \alpha_0 \\ -1 & T + \alpha_1 \end{vmatrix} \\ &= T \cdot (T + \alpha_1) - (-1 \cdot \alpha_0) = T^2 + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0 \end{aligned}$$

Sei nun $n = 3$:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \chi_{A_3} &= \mathbf{det}\,(T \cdot \mathbf{E}_3 - A_3) = \begin{vmatrix} T & 0 & \alpha_0 \\ -1 & T & \alpha_1 \\ 0 & -1 & T + \alpha_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Nun entwicklen wir nach der ersten Zeile und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\chi_{A_3} &= \begin{vmatrix} T & 0 & \alpha_0 \\ -1 & T & \alpha_1 \\ 0 & -1 & T + \alpha_2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{1. } \mathbf{Zeile}}{=} T \cdot \begin{vmatrix} T & \alpha_1 \\ -1 & T + \alpha_2 \end{vmatrix} + \alpha_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & T \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= T \cdot \left(T^2 + \alpha_2 \cdot T + \alpha_1\right) + \alpha_0 \\
&= T^3 + \alpha_2 \cdot T^2 + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0
\end{aligned}
$$

Für $n \rightsquigarrow n+1$ gehen wir analog vor, indem wir die Determinante nach der ersten Zeile entwickeln.

4.4 Kapitel (IV.4): Minimalpolynom und Satz von Cayley-Hamilton

4.4.1 Einsetzen von Matrizen und Endomorphismen in Polynome

Es gilt: $f(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot T^i \quad \in \mathbb{K}[T]$

Auf Matrizenebene:

- **Einbettung:** $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \hookleftarrow \mathbb{K}$, $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathbf{E}$
- **Verknüpfungen:** $A + B,\ A \cdot B$
- $f(A) = \alpha_0 \cdot A^0 + \alpha_1 \cdot A^1 + \ldots + \alpha_n \cdot A^n = \alpha_0 \cdot E + \alpha_1 \cdot A^1 + \ldots + \alpha_n \cdot A^n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

Auf Endomorphismenebene:

- **Einbettung:** $\mathbf{End}(\mathbf{V}) \hookleftarrow \mathbb{K}$, $\alpha \mapsto \alpha \cdot \mathbf{id_V}$
- **Verknüpfungen:** $f + g,\ f \circ g$
- $f(\varphi) = \alpha_0 \cdot \varphi^0 + \alpha_1 \cdot \varphi^1 + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi^n = \alpha_0 \cdot \mathbf{id_V} + \alpha_1 \cdot \varphi^1 + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi^n \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$

4.4.2 Beispiel für das Einsetzen von Matrizen in ein Polynom

Seien A gegeben mit:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \chi_A(T) = T^2 - (a+d) \cdot T + (ad - bc)$$

Setzen wir nun A in χ_A ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= A^2 - (a+d) \cdot A + (ad-bc) \cdot \mathbf{E} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ba+bd \\ ca+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ba-bd \\ ca+dc-ca-cd & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\textbf{Null im Ring}) \end{aligned}$$

4.4.3 Vorbereitungen für den Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton

Für Matrizen gelten folgende Rechenregeln:

(i) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$

(ii) $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$

(iii) $f(A)(x) = \left(\sum_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i \right)(x) = \sum_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i(x)$

Nahezu analog gelten folgende Rechenregeln für Endomorphismen:

(i) $(f+g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$

(ii) $(f \cdot g)(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$ **!Kommutativität!**

(iii) $f(\varphi)(x) = \left(\sum\limits_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i \right)(\varphi) = \sum\limits_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i(\varphi)$

4.4.4 Satz (IV.4.1): Satz von Cayley-Hamilton

Es gilt:

$$\chi_A(A) = 0, \qquad \chi_\varphi(\varphi) = 0$$

Beweis: Was ist zu zeigen?

Für $\chi_\varphi(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i$ **gilt:** $\left(\chi_\varphi(\varphi)\right)(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$

Sei $\chi_\varphi = T^n + \alpha_{n-1} \cdot T^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0$**.**

Nun ist $\forall v \in \mathbf{V}$ **zu zeigen:**

$$\varphi^n(v) + \alpha_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}(v) + \ldots + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \alpha_0 \cdot \mathbf{id_V}(\mathbf{v}) = 0$$

Wir sprechen in diesem Fall auch von einer "universellen linearen Abhängigkeit der Vektoren $\mathbf{id_V}(v), \varphi(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v), \varphi^n(v)$**".**

Sei $v \in \mathbf{V}$ **gegeben.**

Betrachte $\mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v), \varphi^k(v) \right\rangle$**, dim** $(\mathbf{U}) = k+1 \leq n$**.**

Behauptung: k **ist das minimale** l **mit** $\varphi^{k+1}(v) \in \left\langle \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^l(v) \right\rangle$

Behauptung: U ist φ**-invariant:**

$$\varphi(\mathbf{U}) = \left\langle \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^k(v), \varphi^{k+1}(v) \right\rangle$$

da $\varphi^{k+1}(v) \in \mathbf{U}$**.**

Nach Lemma (IV.3.5) gilt:

$$\chi_\varphi(T) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(T) \cdot g(T) \quad \Rightarrow \quad \chi_\varphi(\varphi) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi) \circ g(\varphi) = g(\varphi) \circ \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi)$$

Anwendung auf v **liefert:**

$$\chi_\varphi(\varphi)(v) = g(\varphi)\left(\chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi)(v)\right)$$

Nun beschreiben wir $\varphi|_\mathbf{U}$ **in der Basis** $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^k(v)$ **von U (Insgesamt** $k+1$ **Vektoren):**

$v \to \varphi(v), \varphi(v) \to \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \to \varphi^k(v), \varphi^k(v) \to \varphi^{k+1}(v) = \alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_k \cdot \varphi^k(v)$

Damit ergibt sich für die beschreibende Matrix:

$$\mathbf{M}(\varphi|_\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & +\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & +\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & +\alpha_{k-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & +\alpha_k \end{pmatrix}$$

Dies sollte uns an die Frobenius-Begleitmatrix erinnern. Somit kennen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} & \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(T) = -\alpha_0 - \alpha_1 \cdot T - \ldots - \alpha_k \cdot T^k + T^{k+1} \\ \Rightarrow \quad & \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(\varphi) = -\alpha_0 \cdot \mathbf{id_V} - \alpha_1 \cdot \varphi - \ldots - \alpha_k \cdot \varphi^k + \varphi^{k+1} \end{aligned}$$

Anwendung auf v liefert:

$$\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(\varphi)(v) = -\alpha_0 \cdot v - \alpha_1 \cdot \varphi(v) - \ldots - \alpha_k \cdot \varphi^k(v) + \varphi^{k+1}(v) = 0$$

Damit folgt: $\chi_\varphi(\varphi)(v) = g(\varphi)(0) = 0$

4.4.5 Definition (IV.4.a): Minimalpolynom: $\mathbf{m}_A(T)$, $\mathbf{m}_\varphi(T)$

$\mathbf{m}_A(T)$ beziehungsweise $\mathbf{m}_\varphi(T)$ heißen Minimalpolynom von A beziehungsweise φ, wenn $\mathbf{m}_A(T)$ beziehungsweise $\mathbf{m}_\varphi(T)$ ein normiertes Polynom vom kleinsten Grad ist, daß A beziehungsweise φ zur Nullstelle hat.

4.4.6 Satz (IV.4.2)

Das Minimalpolynom ist eindeutig bestimmt und teilt jedes Polynom, daß A beziehungsweise φ zur Nullstelle hat.

Für den Beweis: $\mathbf{m} := \mathbf{m}_A$

Sei f ein Polynom mit $f(A) = 0$ und sei $f = q \cdot \mathbf{m} + r$, wobei $r = 0$ oder grad $(r) \lneqq$ grad (m).
Anwendung auf A liefert:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(A)}_{=0} = q(A) \cdot \underbrace{\mathbf{m}(A)}_{=0} + r(A) \quad \Rightarrow \quad r(A) = 0$$

Nach der Definition des Minimalpolynoms folgt: $r = 0$, **das heißt:** $\mathbf{m} | f$.

Es folgt auch weiter: Das Minimalpolynom ist eindeutig.

4.4.7 Satz (IV.4.3)

Das Minimalpolynom ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms und hat dieselben irreduziblen Faktoren wie letzteres.

Anmerkung: In $\mathbb{C}$: Eigenwerte sind genau die Nullstellen von $\mathbf{m}_\varphi$. Beweis siehe (4.4.14).

4.4.8 Beispiele für Minimalpolynom und charakeristisches Polynom

1.) Sei A gegeben mit

$$A = \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(T) = (T-1)^n$$

$\mathbf{m}_A$ ist das normiertes Polynom kleinsten Grades mit $\mathbf{E}_n$ als Nullstelle.

Sei $f(T) = (T-1)$, $f(\mathbf{E}_n) = (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\mathbf{E}_n} = (T-1)$

2.) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\alpha \neq \beta$, und sei A gegeben mit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \chi_A(T) = (T-\alpha) \cdot (T-\beta)$

Nun gilt es drei Möglichkeiten für das minimale Polynom:

(i) $\mathbf{m}_A = (T - \alpha)$

(ii) $\mathbf{m}_A = (T - \beta)$

(iii) $\mathbf{m}_A = \chi_A$

Es gilt: Für $\mathbf{m}_A = (T - \alpha)$ **müßte folgen** $0 = A - \alpha \cdot \mathbf{E}$ **- dies ist falsch. Analog erhalten wir einen Widerspruch für** $\mathbf{m}_A = (T - \beta)$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_A = \chi_A$

3.) Sei A **gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(T) = (T-1)^2$

Nun gilt es zwei Möglichkeiten für das minimale Polynom:

(i) $\mathbf{m}_A = (T - 1)$

(ii) $\mathbf{m}_A = \chi_A$

Da $\mathbf{m}_A = (T-1)$ **einen Widerspruch liefert (wie oben) folgt:** $\mathbf{m}_A = \chi_A$

4.) Sei A **gegeben mit**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für die Frobenius-Begleitmatrix ist das charakteristische Polynom bekannt:

$$\chi_A(T) = T^n + \alpha_{n-1} \cdot T^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0$$

grad $(\mathbf{m}) = n$**. Laut** $0 = A^k + \beta_{k-1} \cdot A^{k-1} + \ldots + A \cdot \beta_1 + \beta_0$, $k < n$ **folgt:**

$$e_1, A \cdot e_1 = e_2, A^2 \cdot e_1 = e_3, \ldots, A^k \cdot e_1 = e_{k+1}$$

Widerspruch, da wir lineare Abhängigkeit erhalten $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_A = \chi_A$

4.4.9 Vorbemerkungen zum Beweis von Satz (IV.4.3)

Zur Erinnerung: U $<$ **V, U ist** φ**-invariant:** $\varphi(\mathbf{U}) < \mathbf{U}$ **(Auch:** $\Rightarrow \quad \chi_\varphi(T) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(T) \cdot g(T)$**)**

Grund: Blockstruktur der Transformationsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

4.4.10 Lemma (**IV**.4.4)

Sei $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ und $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ seien φ-invariant. Dann gilt:

(i) $\mathbf{m}_\varphi (T) = \mathbf{kgV} \left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \right)$

(ii) $\chi_\varphi (T) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}} (T) \cdot \chi_{\varphi|_\mathbf{W}} (T)$

<u>Beweis von *(ii)*</u>: schon erledigt. Zur Erinnerung in Kurzform:
Wähle Basis $\mathfrak{A} = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ wobei $u_1, \ldots, u_r \in \mathbf{U}$ und $w_1, \ldots, w_s \in \mathbf{W}$. Die beschreibende Matrix hat Blockstruktur:

$$\mathbf{M}_\mathfrak{A}^\mathfrak{A} (\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ **Behauptung.**
<u>Beweis von *(i)*</u>:
Im ersten Schritt zu zeigen: $\mathbf{kgV} \left(m_{\varphi|_\mathbf{U}}, m_{\varphi|_\mathbf{W}} \right) \big| f$
$f(\varphi)$ **bedeutet:**

$$f(T) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot T^i \quad \Rightarrow \quad f(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i$$

Zudem gilt: $f(\varphi)(v) = 0 \; \forall v \in \mathbf{V}$.
Nun wählen wir $v = u \in \mathbf{U}$. Einsetzen von u liefert:

$$f(\varphi)(u) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i \right) (u) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i (u) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \left(\varphi|_\mathbf{U} \right)^i (u) = f\left(\varphi|_\mathbf{U} \right) = 0 \; \forall u \in \mathbf{U}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \big| f$.
Analog erhalten wir für $v = w \in \mathbf{W}$: $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \big| f$
Damit folgt die Behauptung: $\mathbf{kgV} \left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \right) \big| f$
Im zweiten Schritt bleibt zu zeigen: $g = \mathbf{kgV} \left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \right) \quad \Rightarrow \quad g(\varphi) = 0$
Nach Voraussetzung:

$$g(T) = \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \cdot h(T) = h(T) \cdot m_{\varphi|_\mathbf{U}} (T)$$

Wenden wir nun g auf den Endomorphismus φ an, so folgt:

$$g(\varphi) = h(\varphi) \circ \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} (\varphi)$$

Setzen wir nun $u \in \mathbf{U}$ ein, so erhalten wir:

$$g(\varphi)(u) = h(\varphi) \left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} (\varphi)(u) \right) = h(\varphi) \left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \left(\varphi|_\mathbf{U} \right)(u) \right) = h(\varphi)(0) = 0$$

Bisher: $g(\varphi)(u) = 0$ für $u \in \mathbf{U}$
Analog zu zeigen: $g(\varphi)(w) = 0$ für $w \in \mathbf{W}$
Damit folgt aus dem ersten und zweiten Schritt: $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{kgV} \left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \right)$
$\Rightarrow \quad g(\varphi)(u + w) = 0 \; \forall u \in \mathbf{U}, \forall w \in \mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad g(\varphi) = 0$, **da $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$**

4.4.11 Beispiel, Anwendungen

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ und sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \doteqdot \left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \quad 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \end{array}\right)$$

Es folgt: $A \cdot e_1 = 2 \cdot e_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \langle e_1 \rangle$ **ist A-invariant (U ist in diesem Fall die x_1-Achse)**
Zudem gilt:

$$A \cdot e_2 = 3 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3, \quad A \cdot e_3 = 4 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{W} = \langle e_2, e_3 \rangle$ **ist A-invarinat (W ist in diesem Fall die (x_2, x_3)-Ebene)**

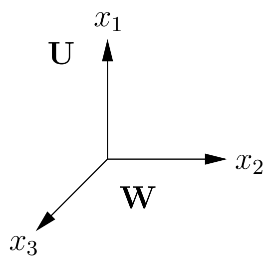

Abbildung IV-8: **U** und **W** im $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ **ist A-invariante direkte Zerlegung. Für das charaktristische Polynom von A gilt:**

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= (T-2) \cdot \chi_B(T) \\ &= (T-2) \cdot \left(T^2 - 9T - 2\right) \\ &= (T-2) \cdot \left(T - \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{89}{4}}\right) \cdot \left(T - \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{89}{4}}\right) \end{aligned}$$

Nun wollen wir das Minimalpolynom von A bestimmen. Es gilt:

$$m_A(T) = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{A_0}(T), \mathbf{m}_B(T)\right)$$

Für A_0 gilt:

$$A_0 = (2) = 2 \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{A_0}(T) = (T-2)$$

Nun müssen wir noch $\mathbf{m}_B(T)$ bestimmen. Hierzu zwei Versuche:

(1) (schlechter) Versuch: Angenommen:

- **grad** $(\mathbf{m}_B(T)) = 1 \quad \Rightarrow \quad B - \alpha \cdot \mathbf{E} = 0$ **(offensichtlich falsch)**
- **grad** $(\mathbf{m}_B(T)) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_B(T) = T^2 + \alpha \cdot T + \beta \quad \Rightarrow \quad B^2 + \alpha \cdot B + \beta \cdot \mathbf{E} = 0$
  Wir erhalten ein Gleichungssystem für α und β, daß wir mühsam ausrechnen müssen.

(2) (fundierter) Versuch: Wir wissen: $\mathbf{m}_B(T) | \chi_B(T) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_B(T) = (T - \alpha)$ **oder** $\mathbf{m}_B(T) = \chi_B(T)$
Also: $\mathbf{m}_A = \mathbf{kgV}\left(T-2, \chi_B\right) = (T-2) \cdot \chi_B$ **(da in diesem Fall $(T-2)$ und χ_B keine gemeinsamen Nullstellen haben)**

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \chi_A(T) &= (T-2) \cdot \left(T^2 - 9T - 2\right) \\ &= T^3 - 9T^2 - 2T^2 + 18T - 2T + 4 \\ &= T^3 - 11T^2 + 16T + 4 \end{aligned}$$

Nun wollen wir die A-Iteraten von $v = (1,1,0)$ betrachten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
A \cdot v &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (2,3,5) \\
A^2 \cdot v &= A \cdot (A \cdot v) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= (4,29,45)
\end{aligned}$$

Behauptung: $\left(v, A \cdot v, A^2 \cdot v\right)$ **ist Basis des** $\mathbb{R}^3$
Als Beweis rechnen wir den Rang der folgenden Matrix aus:

$$\mathbf{rg}\left(v, A \cdot v, A^2 \cdot v\right) = \mathbf{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 29 \\ 0 & 5 & 35 \end{pmatrix} = 3$$

Beschreibung von A in dieser Basis:
Für die ersten beiden Spalten gilt: $A(v) = (0,1,0)$ **und** $A(A \cdot v) = (0,0,1)$. **Damit erhalten wir:**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ? \\ 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir noch die dritte Spalte berechnen. Hierzu müsen wir die folgende Gleichung lösen:

$$A\left(A^2 \cdot v\right) = \alpha \cdot v + \beta \cdot A \cdot v + \gamma \cdot A^2 \cdot v$$

Hierzu können wir zwei Methoden anwenden:

(1) Methode: Wir lösen das lineare Gleichungssystem für α, β, γ.

(2) Methode: Verwendung von m_A oder χ_A und Cayley-Hamilton:

$$A^3 - 11A^2 + 16A + 4\mathbf{E} = 0$$

Setzen wir nun v ein, so erhalten

$$A^3 \cdot v - 11A^2 \cdot v + 16A \cdot v + 4\mathbf{E} \cdot v = 0$$

Nun lösen wir nach $A \cdot \left(A^2 \cdot v\right) = A^3 \cdot v$ auf und erhalten ein Darstellung von $A^3 \cdot v$ in der Basis von $\mathfrak{A}$:

$$A^3 \cdot v = 11A^2 \cdot v - 16A \cdot v - 4\mathbf{E} \cdot v$$

Damit erhalten wir unsere endgültige Transformationsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Dies ist die Frobenius-Begleitmatrix von χ_A

4.4.12 Lemma (IV.4.5)

Sei $\mathbf{m}_\varphi = p^k$, p irreduzibel $\Rightarrow$ $\chi_\varphi = p^l$ mir $k \leq l$

<u>Beweis</u>:

Angenommen χ_φ ist keine Potenz von p, etwa $\chi = p^l \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}$ wobei p_i irreduzibel und $l_i \geq 1$, $r \geq 2$.

Also: $\chi_\varphi = p^l \cdot g$ mit ggT $\left(p^l, g\right) = 1$ für $g \neq 1$ (g ist keine Konstante)

Dann folgt nach Lemma (IV.4.6): $\mathbf{V} = \underbrace{\mathbf{Kern}\left(p^l(\varphi)\right)}_{\doteqdot \mathbf{U}} \oplus \underbrace{\mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right)}_{\doteqdot \mathbf{W}}$

Die Summanden sind φ-invariant $\Rightarrow$ $\mathbf{m} = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right)$

Auf U: $p^l(\varphi) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \big| p^l$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} = p^{r'}$ mit $r' \leq r$

Auf W: $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \big| g = \left(p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}\right)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} = p_2^{l_2'} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r'}$ mit $l_i' \leq l_i$

Angenommen: alle $l_i' = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} = 1$ $\Rightarrow$ $\mathbf{W} = \{0\}$

Dies ist Widerspruch zu $\chi_\varphi = p^l \cdot g$ für $g \neq 1$.

Somit: Wenigstens ein $l_i \neq 0$ $\Rightarrow$ $m_\varphi = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right) \neq p$-Potenz

---

4.4.13 Lemma (IV.4.6): Zerlegungslemma

Sei $f(\varphi) = 0$, $f = g \cdot h$, ggT $(g, h) = 1$ (g und h haben eine Teilerfremde Zerlegung). Dann folgt:

(i) Kern $(g(\varphi))$ und Kern $(h(\varphi))$ sind φ-invariante Unterräume

(ii) $\mathbf{V} = \underbrace{\mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right)}_{\doteqdot \mathbf{U}} \oplus \underbrace{\mathbf{Kern}\left(h(\varphi)\right)}_{\doteqdot \mathbf{W}}$

<u>Beweis</u>:

Zu (i): $g(\varphi)$ ist Endomorphismus, also Kern $(g(\varphi)) < \mathbf{V}$.

Bleibt zu zeigen: Invarianz: $\varphi\left(\mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right)\right) \subseteq \mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right)$

Sei $g(\varphi)(v) = 0$. Zu zeigen: $g(\varphi)(\varphi(v)) = 0$

Sei $g = \sum_i a_i \cdot T^i$ $\Rightarrow$ $g(\varphi) = \sum_i a_i \cdot \varphi^i$

$h(T) = T$ liefert: $h(\varphi) = \varphi$.

Das heißt: Wir haben $(g(\varphi) \circ h(\varphi))(v) = 0$ zu zeigen.

Für Endomorphismen gilt: $g(\varphi) \circ h(\varphi) = (g \cdot h)(\varphi) = (h \cdot g)(\varphi) = h(\varphi) \circ g(\varphi)$

Damit: $g(\varphi)(\varphi(v)) = g(\varphi)(h(\varphi)(v)) = h(\varphi)(g(\varphi)(v)) = \varphi(g(\varphi)(v)) = \varphi(0) = 0$

Zu (ii): Aus ggT $(g, h) = 1$ folgt nach dem erweiterten Euklidischen Algorithmus:

$$1 = g_1 \cdot g + h_1 \cdot h \quad \Rightarrow \quad \mathbf{id} = g_1(\varphi) \circ g(\varphi) + h_1(\varphi) \circ h(\varphi)$$

Wir wollen zwei Dinge zeigen:

(1) $\mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right) \cap \mathbf{Kern}\left(h(\varphi)\right) = 0$

(2) $\mathbf{V} = \mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right) + \mathbf{Kern}\left(h(\varphi)\right)$

Zu (1)**: Sei** $v \in \mathbf{Kern}(g(\varphi)) \cap \mathbf{Kern}(h(\varphi))$**.**
Nach $\mathbf{id} = g_1(\varphi) \circ g(\varphi) + h_1(\varphi) \circ h(\varphi)$ **folgt:**

$$v = \mathbf{id}(v) = g_1(\varphi)\underbrace{(g(\varphi)(v))}_{=0} + h_1(\varphi)\underbrace{(h(\varphi)(v))}_{=0} = g_1(\varphi)(0) + h_1(\varphi)(0) = 0$$

Zu (2)**: Gegeben** $v \in \mathbf{V}$**. Dann gilt:**

$$\mathbf{id} = g_1(\varphi) \circ g(\varphi) + h_1(\varphi) \circ h(\varphi) = g(\varphi) \circ g_1(\varphi) + h(\varphi) \circ h_1(\varphi)$$

Es folgt:

$$v = \underbrace{g(\varphi)(g_1(\varphi)(v))}_{\in \mathbf{Kern}(h(\varphi))} + \underbrace{h(\varphi)(h_1(\varphi)(v))}_{\in \mathbf{Kern}(g(\varphi))}$$

Nun setzen wir zur Vereinfachung $x := g_1(\varphi)(v)$ **und wenden** h **an. Wir erhalten:**

$$h(\varphi)(g(\varphi)(x)) = [h(\varphi) \circ g(\varphi)](x) = [(h \cdot g)(\varphi)](x) = f(\varphi)(x) \overset{(*)}{=} 0$$

Anmerkung: $(*)$ **Nach Voraussetzung:** $f(\varphi)(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\varphi)(g_1(\varphi)(v)) \in \mathbf{Kern}(h(\varphi))$
Analog erhalten wir: $h(\varphi)(h_1(\varphi)(v)) \in \mathbf{Kern}(g(\varphi))$
Wichtig: $g(\varphi|_{\mathbf{U}}) = 0$**,** $h(\varphi|_{\mathbf{W}}) = 0$

4.4.14 Beweis von Satz (IV.4.3)

Wie nicht anders zu erwarten folgt der Beweis aus den Lemmata (IV.4.4), (IV.4.5), (IV.4.6).
Sei $\mathbf{m}_\varphi = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ **die Zerlegung in irreduzible Faktoren.**
Da $\mathbf{m}_\varphi(\varphi) = 0$**,** $\mathbf{m}_\varphi = p_1^{r_1} \cdot \underbrace{p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}}_{\doteqdot h}$ **ist, folgt:**

$$\mathbf{V} = \mathbf{Kern}(p_1^{r_1}(\varphi)) \oplus \mathbf{Kern}(h(\varphi)) =: \mathbf{U} + \mathbf{W}$$

$p_1^{r_1}(\varphi|_{\mathbf{U}}) = 0$**,** $h(\varphi|_{\mathbf{W}}) = 0$**,** φ**-invariante Zerlegung.**
Weitere Anwendung von Lemma (IV.4.6) liefert eine φ**-invariante Zerlegung von V:**

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{Kern}(p_i^{r_i}(\varphi))}_{\doteqdot \mathbf{U}_i}, \quad p_i^{r_i}\left(\varphi|_{\mathbf{U}_i}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = p_i^{s_i}$**,** $s_i \leq r_i$ **(sogar** $s_i = r_i$**). Aus (IV.4.5) folgt** $(r_i \leq t_i)$**:**

$$\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = p_i^{t_i} \quad \overset{(\mathbf{IV}.4.4)}{\Rightarrow} \quad \chi_\varphi = \prod \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{t_i} \qquad \textbf{bei } \mathbf{m}_\varphi = \prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i}$$

Damit

$$\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{l} p_i^{r_i} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{l} p_i \,\Big|\, \mathbf{m}_\varphi \quad \textbf{und} \quad \prod_{i=1}^{l} p_i \,\Big|\, \chi_\varphi$$

4.4.15 Vorbemerkungen zum Beweis von Satz ($\mathbf{IV}$.4.7)

m ist Produkt verschiedener Linearfaktoren $\Leftrightarrow$ φ (beziehungsweise A) diagonalisierbar.

Beweis:

"$\Rightarrow$" $\mathbf{m} = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$. Nach dem vorigen Lemma folgt:

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Kern}\,(\varphi - \lambda_i \cdot \mathbf{id}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda_i)$$

Also ist φ diagonalisierbar.

"$\Leftarrow$" φ ist diagonalisierbar. Es folgt:

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda_i)\,, \qquad \varphi\,(\mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda)) \subseteq \mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda)$$

Nach den obigen Lemmata folgt:

$$\mathbf{m} = \mathbf{kgV}\left(\ldots, m_{\varphi|_{\mathbf{Eig}(\ldots,\ldots)}}, \ldots\right) : \varphi|_{\mathbf{Eig}(\ldots,\ldots)} : \varphi\,(v) = \lambda \cdot v \quad \Rightarrow \quad \varphi|_{\mathbf{Eig}(\ldots,\ldots)} = T - \lambda$$

Also: $m = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$

4.4.16 Beispiel zu Satz ($\mathbf{IV}$.4.7)

Bestimme alle $A \in \mathbf{M}_2\,(\mathbb{R})$ mit $A^3 = \mathbf{E}$.

Wir wissen: $A^3 = \mathbf{E}$ $\Rightarrow$ A ist Nullstelle von $T^3 - 1$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}| T^3 - 1$. Außerdem wissen wir: $\mathbf{grad}\,(\mathbf{m}) \leq 2$.

Wir können $T^3 - 1$ weiter zerlegen:

$$T^3 - 1 = (T - 1) \cdot \left(T^2 + T + 1\right)$$

wobei $\left(T^2 + T + 1\right)$ irreduzibel über $\mathbb{R}$. Damit bestehen zwei Möglichkeiten für das Minimalpolynom:

(i) $\mathbf{m} = T - 1$ **(das heißt: $A = \mathbf{E}$)**

(ii) $\mathbf{m} = T^2 + T + 1$

Bemerkung: $m = T^2 + T + 1 \quad \Rightarrow \quad A^3 = \mathbf{E}$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = T^k + \alpha_1 \cdot T^{k-1} + \ldots + \alpha_k \quad &\Rightarrow \quad A^k + \alpha_1 \cdot A^{k-1} + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \Rightarrow \quad \forall v : A^k \cdot v = -\alpha_k \cdot v - \alpha_{k-1} \cdot A \cdot v - \ldots &- \alpha_1 \cdot A^{k-1} \cdot v \end{aligned}$$

Hier in diesem Fall: $A^2 \cdot v + A \cdot v + \mathbf{E} \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

Angenommen wir hätten v mit $(v, A \cdot v)$ Basis von $\mathbb{R}^2$. In dieser Basis:

$$f_A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Frobenius} \\ \textbf{Begleitmatrix} \end{array} \right.$$

Unter dieser Annahme gilt:

$$\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$$

Können wir solche v finden? Ja, jedes v ungleich Null paßt.
Sonst bei $v \neq 0$: $A \cdot v = \lambda \cdot v \quad \Rightarrow \quad T - \lambda | \chi_A \quad \Rightarrow \quad T - \lambda | \, \mathbf{m}$. Dies ist ein Widerspruch, da m keine reelle Nullstelle hat.
Daher: $A^3 = \mathbf{E}$, wobei $A \neq \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}) \textbf{:} \quad \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Umkehrung?
Sei $\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =: A_0 \quad \Rightarrow \quad A = \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S}$. Damit folgt für A^3:

$$A^3 = \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0^3 \cdot \mathbf{S}$$

Es ist $(A_0)^3 = \mathbf{E}_2 \quad (\Leftarrow \chi_{A_0} = T^2 + T + 1) \quad \Rightarrow \quad A^3 = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E}_2$
Damit:

$$\left\{ A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \middle| \, A^3 = \mathbf{E}_2, A \neq \mathbf{E}_2 \right\} = \left\{ \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} \middle| \, \mathbf{S} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}) \right\}$$

4.5 Kapitel (IV.5): Elementarteilersatz und Jordansche Normalenform

4.5.1 Ziel dieses Abschnittes

"Einfache" $A := \mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi)$ oder ähnlicher Matrizen $\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}$ herzustellen.

4.5.2 Vorbemerkungen:

1. Fall: $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline 0 & E \end{array}\right) \leftrightarrow \varphi -$ **invarinater Unterraum**

$\varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} \cdot v_i$ **und** $\varphi(\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle) \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

2. Fall: $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ **wobei** $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ **Basis von** C **und** $\langle v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n \rangle$ **Basis von** D **bilden. Dann gilt für V: V** $= \underbrace{\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle}_{\varphi - \textbf{invariant}} \oplus \underbrace{\langle v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n \rangle}_{\varphi - \textbf{invariant}}$

Daher notwendige Untersuchung von φ-invarianten Unterräumen:
Sei U φ-invariant, das heißt: $\varphi(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$ und sei $v \in \mathbf{U}$.
Dann: $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^k(v), \ldots \in \mathbf{U}$

4.5.3 Definition (IV.5.a): φ-zyklischer Unterraum: $\langle v \rangle_\varphi$

Wir definieren: $\langle v \rangle_\varphi := \left\langle \left\{ \varphi^k(v) \middle| \, k \in \mathbb{N}_0 \right\} \right\rangle$ **erzeugt von v, als den kleinster φ-invarianten Unterraum, der v enthält.**

4.5.4 Beispiel für φ-zyklischen Unterraum

Sei V $= \mathbb{R}^3$ **und A gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **sowie** $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung von $\langle v \rangle_A$: Es gilt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0,0) = v \quad \Rightarrow \quad A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot v = v$$

Per Induktion folgt: $A^n \cdot v = v$. **Damit:** $\langle v \rangle_A = \mathbb{R} \cdot v$.
Bestimmung von $\langle w \rangle_A$: Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot w &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,1,2) \\ \Rightarrow \quad A^2 \cdot w &= A \cdot (A \cdot w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0,4,4) \end{aligned}$$

Sind nun $w, A \cdot w, A^2 \cdot w$ linear abhängig? Ja, denn

$$A^2 \cdot w = (4,4,0) = 4A \cdot w - 4w$$

Damit können wir nun jedes weitere A^k ausrechnen:

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot \left(A^2 \cdot w\right) = A \cdot (4A \cdot w - 4 \cdot w) = 4A^2 \cdot w - 4A \cdot w \\ &= 4 \cdot (4A \cdot w - 4w) - 4A \cdot w = 16A \cdot w - 4A \cdot w - 16w = 12A \cdot w - 16w \end{aligned}$$

Per Induktion: $A^k \cdot w = \alpha_k \cdot A \cdot w + \beta_k \cdot w \quad \Rightarrow \quad \langle w \rangle_A = \langle w, A \cdot w \rangle$ **(2 dimensionaler Raum)**
Bestimmung von $\langle z \rangle_A$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1,2) \\ \Rightarrow \quad A^2 \cdot w &= A \cdot (A \cdot w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,4,4) \end{aligned}$$

Sind nun $\left(z, A \cdot z, A^2 \cdot z\right)$ linear abhängig?
Hierzu betrachten wir die Determinante der Matrix mit $\left(z, A \cdot z, A^2 \cdot z\right)$ als Spaltenvektoren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(z, A \cdot z, A^2 \cdot z\right) \textbf{ regulär} \quad \Rightarrow \quad \langle z \rangle_A = \mathbb{R}^3$$

4.5.5 Obere Abschätzung für dim $\left(\langle v \rangle_\varphi\right)$

Sei $\mathbf{m}_T = T^k + \alpha_1 \cdot T^{k-1} + \ldots + \alpha_k \quad \Rightarrow \quad \varphi^k(v) = -\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k-1} \cdot \varphi^i(v)$.

In diesem Fall: $\langle v \rangle_\varphi = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \textbf{dim}\left(\langle \mathbf{v} \rangle_\varphi\right) \leq \textbf{grad}\left(\mathbf{m}_\varphi\right)$

4.5.6 Definition (IV.5.b): $\mathbf{m}_{\varphi,v}(T)$

$\mathbf{m}_{\varphi,v}(T)$ **ist das normierte Polynom kleinsten Grades mit** $\left[\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)\right](v) = 0$

4.5.7 Beispiele zu $\mathbf{m}_{\varphi,v}(T)$

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ und A gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **sowie** $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Bestimmung von $\mathbf{m}_{A,v}$: $\mathbf{m}_{A,v} | (T-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{A,v} = (T-1)$
Bestimmung von $\mathbf{m}_{A,w}$: Wir wissen aus (4.5.4):

$$A^2 \cdot w - 4A \cdot w + 4w = \left[\left(T^2 - 4T + 4\right)(A)\right](w) = \left[(T-2)^2 (A)\right](w) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{A,w} = (T-2)^2$$

Bestimmung von $\mathbf{m}_{A,z}$: Bisher aus Berechnung von $\mathbf{m}_{A,v}$ und $\mathbf{m}_{A,w}$

$$\mathbf{m}_{A,v} | (T-1) \quad \textbf{und} \quad \mathbf{m}_{A,w} | (T-2)^2$$

Damit: $\mathbf{m}_A = (T-1) \cdot (T-2)^2$ **(normiertes Polynom, Grad 3)**
$\Rightarrow \quad \chi_A = (T-1) \cdot (T-2)^2$. **Da** $\langle z \rangle_A = \mathbb{R}^3$ **folgt:**

$$\mathbf{m}_{A,z} = \mathbf{m}_A$$

4.5.8 Satz (**IV**.5.1)

Sei g ein Polynom mit $g(\varphi) = 0$.

(i) $[\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)](v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | g$

(ii) $\mathbf{m}_{\varphi,v}$ **ist eindeutig und** $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \mathbf{m}_{\varphi}$

Beweis zu (i)**: Division mit Rest - analog zum Beweis für das Minimalpolynom** (**IV**.4.2)**:**
Es gilt: $g = q \cdot \mathbf{m}_{\varphi,v} + r$, **wobei** $r = 0$ **oder** $\mathbf{grad}(r) < \mathbf{grad}(\mathbf{m}_{\varphi,v})$. **Nach Einsetzen eines Endomorphismus** φ **folgt:**

$$g(\varphi) = q(\varphi) \circ \mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi) + r(\varphi)$$

Anwendung auf v **liefert:**

$$\underbrace{g(\varphi)(v)}_{(*)} = q(\varphi) \underbrace{(\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)(v))}_{(\#)} + r(\varphi)(v) \quad \Rightarrow \quad r(\varphi)(v) = 0$$

Zu $(*)$**:** $= 0$ **nach Vorraussetzung.**
Zu $(\#)$**:** $= 0$ **nach Definition.**
Beweis zu (ii)**: Angenommen es gäbe zwei Polynome. Diese müßten sich gegenseitig teilen. Da sie aber laut Voraussetzung normiert sind können sie nur identisch sein.**

4.5.9 Satz (**IV**.5.2)

Sei $\mathbf{grad}(\mathbf{m}_{\varphi,v}) = k$. **Dann gilt**

(i) $\mathbf{dim}\left(\langle v \rangle_{\varphi}\right) = k$

(ii) $\langle v \rangle_{\varphi} = \left\langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \right\rangle$ **(Bilden Basis)**

(iii) $\mathbf{U} := \langle v \rangle_{\varphi}$, $\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}}} = \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}$

<u>**Beweis zu** (i), (ii)</u>**: Wir wissen:**

$$\mathbf{m}_{\varphi,v} = T^k + \alpha_1 \cdot T^{k-1} + \ldots + \alpha_k \quad \Rightarrow \quad \varphi^k + \alpha_1 \cdot \varphi^{k-1} + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{id_V} = 0$$

Anwendung auf v **liefert:** $\varphi^k(v) = \sum_{i=0}^{k-1} (-\alpha_{k-i}) \cdot \varphi^i(v) \in \left\langle v, \varphi(v) \ldots, \varphi^{k-1}(v) \right\rangle =: \mathbf{U}_0$

<u>**Behauptung**</u>**:** $\langle v \rangle_{\varphi} = \mathbf{U}_0$
Beweis: Zu zeigen: alle $\varphi^l(v) \in \mathbf{U}_0$.
Wir haben oben bereits gesehen, daß dies für $l = 0, 1, \ldots, k-1, k$ **richtig ist.**
Für $l = k+1$ **werden wir einen Induktionsbeweis führen:**
Sei $\varphi^l(v) = \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i \cdot \varphi^i(v)$, **dann:**

$$\begin{aligned}
\varphi^{l+1}(v) &= \varphi\left(\varphi^l(v)\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=0}^{l-2} \beta_i \cdot \varphi^i(v) + \beta_{l-1} \cdot \varphi^{l-1}(v)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i \cdot \varphi^i(v) + \beta_{l-1} \cdot \varphi^l(v) \in \left\langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle \quad \textbf{nach Voraussetzungen}
\end{aligned}$$

Bisher: $\mathbf{U} = \langle v \rangle_{\varphi} = \left\langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbf{U}) \leq k$
Angenommen: $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = l \lneqq k$
Behauptung: $\mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle$
Beweis: $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v), \varphi^l$ **sind linear abhängig, da** $l+1$ **Vektoren. Also existiert eine nicht triviale Relation:**

$$\alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_l \cdot \varphi^l(v) = 0$$

Angenommen $\alpha_l \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^l(v) \in \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle$
$\Rightarrow \quad \mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle$
Angenommen $\alpha_l = 0$**: Seien** $\alpha_m \neq 0$ **und** $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_l = 0$
$\Rightarrow \quad \varphi^m \in \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) \right\rangle$ **wobei** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) \leq m \lneqq l$**. Es gibt also eine triviale Darstellung der Form**

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_l \cdot \varphi^l(v) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \left[\left(\alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_l \cdot \varphi^l(v) \right)(\varphi) \right](v) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | \, \alpha_0 + \alpha_1 \cdot T + \ldots + \alpha_l \cdot T^l \quad \Rightarrow \quad l \geq k$ **- wir erhalten einen Widerspruch.**
$\Rightarrow$ **Daher:** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = k$
<u>**Beweis zu** <u>*(iii)*</u></u>**: bereits gezeigt:** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{grad}\left(\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}\right) = k$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | \, \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}}} | \, \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}$$

Zudem stimmen die Grade der beiden äußeren Polynome, die überdies normiert sind, überein. Nach der Gradformel folgt die Behauptung.

4.5.10 Satz (IV.5.3): Maximum in φ-zyklischen Unterräumen

Es gibt $v \in \mathbf{V}$ **mit** $\mathbf{m}_{\varphi} = \mathbf{m}_{\varphi,v}$**. Folglich:** $\mathbf{grad}(\mathbf{m}_{\varphi})$ **= Maximum aller Dimensionen** φ**-zyklischer Unterräume.**
Beweis: Zuerst betrachten wir einen Spezialfall und führen diesen dann auf den allgemeinen Fall zurück:
1.) Spezialfall: $\mathbf{m} = p^k$**, wobei** p **irreduzibles Polynom und** $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} = p^l$ **mit** $l \leq k$
Angenommen: $l < k-1$ **für alle** v
$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^{k-1}$**, anders ausgedrückt:** $p^{k-1} = g_v \cdot \mathbf{m}_{\varphi,v}$**, Anwendung auf** φ **und anschließendes Einsetzen von** v **liefert:**

$$p^{k-1}(\varphi) = g_v(\varphi) \circ \mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \left[p^{k-1}(\varphi) \right](v) = g_v(\varphi) \underbrace{\left(\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)(v) \right)}_{= 0 \text{ n. D.}} = 0$$

Nach den Voraussetzungen folgt: $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^{k-1}$ **- wir erhalten einen Widerspruch.**
Also gibt es v **mit** $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^k$**,** $\mathbf{m}_{\varphi,v} = p^k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{k-1}(\varphi)(v) \neq 0$**. Anders formuliert:**

$$\{ v | \, \mathbf{m}_{\varphi,v} \neq \mathbf{m}_{\varphi} \} = \textbf{Kern} \underbrace{\left(p^{k-1}(\varphi) \right)}_{\neq 0} = \textbf{echter Unterraum von } \mathbf{V}$$

2.) Allgemeiner Fall: $\mathbf{m}_{\varphi} = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ **normiert und** p_i **seien paarweise verschieden. Nach dem Zerlegungslemma (IV.4.6) folgt:**

$$\mathbf{V} = \bigoplus \underbrace{\textbf{Kern}\left(p_i^{k_i} \right)}_{\mathbf{U}_i}, \quad \textbf{wobei } \varphi \textbf{ invariante Zerlegung}$$

Auf $\mathbf{U}_i$ gilt nun: $p_i^{k_i}\left(\varphi|_{\mathbf{U}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} \Big| p_i^{k_i}$**.**
Wegen Lemma (IV.4.4) gilt:

$$\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = p_i^{k_i}$$

Daher gibt es $v_i \in \mathbf{U}_i$ mit $\mathbf{m}_{\varphi,v_i} = p_i^{k_i}$. Setze $v = v_1 + \ldots + v_r$. Analog zu (IV.4.4) folgt:

$$\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi,v_i}\right) = \mathbf{kgV}\left(p_i^{k_i}\right) = \mathbf{m}_\varphi$$

4.5.11 Algorithmische Berechnung zur Suche von v mit $\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{m}_v$

(1) Finde v mit $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$

(2) Finde Zerlegung $v = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{U}$, wobei $\mathbf{U}$ φ-invariant sei.

(3) Zerlege $\mathbf{U}$ weiter

Zu (i) können wir zwei Methoden anwenden:
1. Methode: Folge dem Beweis (nicht stets zu empfehlen)
2. Methode: Mit Wahrscheinlichkeit nahezu Eins gilt: $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$ (über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)
Wir wählen ein $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zufällig - zudem sei A gegeben wie oben:

$$x = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Anwendung von A auf x liefert:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = (9, 3, 10) \\ \Rightarrow \quad A^2 \cdot x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = (9, 16, 20) \end{aligned}$$

Nun wollen wir die lineare Unabhängigkeit von $x, A \cdot x, A^2 \cdot x$ zeigen. Hierzu betrachten wir die Determinante mit Spaltenvektoren $x, A \cdot x, A^2 \cdot x$

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ -1 & 3 & 16 \\ 5 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 17 \\ 5 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 9 \cdot (60 - 85) = -225 \neq 0$$

Damit: $\mathbf{m}_{A,x} = \mathbf{m}_A$.
Diese 2. Methode klappt aus folgendem Grund:

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \, \mathbf{m}_A \neq \mathbf{m}_{A,x}\} \subseteq \bigcup_{\textbf{endlich}} \textbf{Unterräume der Dimension} \ \leq n-1$$

Zu (ii): $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{U}'$, wobei $\mathbf{U}'$ eventuell noch nicht invariant.
Falls $\varphi(\mathbf{U}') \subseteq \mathbf{U}'$ sind wir fertig.
Falls $\varphi(\mathbf{U}') \nsubseteq \mathbf{U}'$, dann wähle anderes $\mathbf{U}'$ und überprüfe erneut.

4.5.12 Satz (IV.5.4): Elementarteilersatz

Gegeben $\Psi \in \mathbf{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$. Dann gilt:

(i) $\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle v_i \rangle_\varphi$ **und für** $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}}$ $(\mathbf{U}_i = \langle v_i \rangle_\varphi)$ **gilt:**

  (1) $\mathbf{m}_1 |\, \mathbf{m}_2 |\, \mathbf{m}_3 |\, \ldots |\, \mathbf{m}_r$

  (2) $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}_\varphi$

  (3) $\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{r} \mathbf{m}_i$

(ii) Die $\mathbf{m}_i$ sind durch die Eigenschaften

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle v_i \rangle_\varphi \quad \textbf{und} \quad \mathbf{m}_1 |\, \mathbf{m}_2 |\, \mathbf{m}_3 |\, \ldots |\, \mathbf{m}_r |$$

eindeutig festgelegt. (Sie heißen eine Elementardarstellung von φ)

<u>Algorithmischer Beweis</u>:
Man wähle $v \in \mathbf{V}$ mit $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$.
Betrachte $\langle v \rangle_\varphi = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \right\rangle$, wobei $k = \mathbf{grad}(\mathbf{m}_{\varphi,v})$
Zwischenziel: $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{U}$, wobei $\mathbf{U}$ φ-invarinat ist.
Dann: $\varphi|_{\mathbf{U}}$, U betrachten, per Rekursion folgt die Behauptung, da die Dimension immer kleiner werden.
Wir haben: $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{W}$, wobei W Vektorraumkomplement ist. W ist eventuell nicht φ-invariant.
Nun prüfen wir nach, ob W φ-invariant ist:
Wähle $w \in \mathbf{W}$, dann $\varphi(w) = v' + w'$ eindeutige Darstellung mit $v' \in \langle v \rangle_\varphi$, $w' \in \mathbf{W}$
Wir definieren: $\Psi : \mathbf{W} \to \mathbf{W} : w \mapsto w'$, wobei Ψ Endomorhpismus von W.
<u>Nachweisen der Linearität von Ψ</u>: Hier nur zum Beispiel die Addition:

$$(w + w_1)' \overset{!}{=} w' + w_1'$$

Dazu:

$$\varphi(w + w_1) = \varphi(w) + \varphi(w_1) = (v' + w') + (v_1' + w_1') = \underbrace{(v' + v_1')}_{\in \mathbf{V}} + \underbrace{(w' + w_1')}_{\in \mathbf{W}}$$

Also: $\Psi(w + w_1) = w' + w_1' = \Psi(w) + \Psi(w_1)$
Analog zeigen wir die skalare Multiplikation $\Rightarrow$ Ψ ist linear.
Per Induktion betrachten wir $(\mathbf{W}, \Psi)$, man hat also den Elementarteilersatz für $(\mathbf{W}, \Psi)$
<u>Jetzt: technische Schwierigkeit</u>:
Zusammenhang von $(\mathbf{V}, \varphi)$ und $(\mathbf{W}, \Psi)$: Es ist $\varphi(w) = v' + \Psi(w)$, $v' \in \langle v \rangle_\varphi$.
Anwendung von φ liefert:

$$\varphi^2(w) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi(v' + \Psi(w)) \overset{\varphi\ \textbf{linear}}{=} \underbrace{\varphi(v')}_{\in \langle v \rangle_\varphi} + \varphi\underbrace{(\Psi(w))}_{\in \mathbf{W}} = v'' + v''' + \Psi^2(w)$$

wobei $v'', v''' \in \langle v \rangle_\varphi$. Also: $\varphi^2(w) = \overline{v} + \Psi^2(w)$, $\overline{v} = v'' + v''' \in \langle v \rangle_\varphi$

Dito - per Induktion: $\varphi^k(w) = \overline{\overline{v}} + \Psi^k(w)$, **wobei** $\overline{\overline{v}} \in \langle v\rangle_\varphi$

Bedeutung für Einsetzen in Polynome:

Gegeben: $h(T) \quad \Rightarrow \quad h(\varphi)(w) = v' + h(\Psi)(w)$, $v' \in \langle v\rangle_\varphi$

Folgerung: Sei $h = \mathbf{m}_\varphi$

$\Rightarrow \quad h(\varphi)(w) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_\varphi(\Psi)(w) = 0$ **für alle** $w \in \mathbf{W} \quad \Rightarrow$ **Tatsache** $\mathbf{m}_\Psi | \mathbf{m}_\varphi$

Nach Induktion dürfen wir annehmen:

$$\mathbf{W} = \langle w_2\rangle_\varphi \oplus \langle w_3\rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle w_r\rangle_\varphi$$

Versuch: Gilt $\mathbf{V} = \langle v\rangle_\varphi \oplus \mathbf{W} = \langle v\rangle_\varphi \oplus \langle w_2\rangle_\varphi \oplus \langle w_3\rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle w_r\rangle_\varphi$**?**

Sei $\mathbf{m}_i$ **=Minimalpolynom von** Ψ **auf** $\langle w_i\rangle_\Psi$**.**

Das heißt (unter anderem): $\mathbf{m}_i(\Psi)(w_i) = 0$, $\mathbf{m}_i | \mathbf{m}_\Psi | \mathbf{m}_\varphi$

Nun wollen wir testen, ob die Summe $\langle v\rangle_\varphi + \langle w_2\rangle_\varphi$ **direkt ist.**

Angenommen: Sei $v' + w' = 0$, $v' \in \langle v\rangle_\varphi$, $w' \in \langle w_2\rangle_\varphi$ **wobei** $v', w' \neq 0$**. Dann:**

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \cdot \varphi^i(v) = h(\varphi)(v) \quad \textbf{mit} \quad h = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \cdot T^i \\ w' &= g(\varphi)(w_2) \end{aligned}$$

Daher ist zu untersuchen: $0 = h(\varphi)(v) + g(\varphi)(w_2)$**.**

Es gibt eine (offenkundige) Relation dieser Art:

$$\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = v' + \underbrace{\mathbf{m}_2(\Psi)(w_2)}_{=0} = v' = h(\varphi)(v)$$

Wir haben: $\mathbf{m}_2 | \mathbf{m}_{\varphi,v}$, $\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = v' \in \langle v\rangle_\varphi$

Behauptung: $\exists v'' \in \langle v\rangle_\varphi$ **mit** $\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = \mathbf{m}_2(\varphi)(v'')$

Berechnung von v''**:**

Nach Voraussetzung: $\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = h(\varphi)(v) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot \mathbf{m}_2\right)(\varphi)(w_2) = \mathbf{m}_\varphi(\varphi)(w_2) = 0$

Andererseits: $\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2}(\varphi) \circ (\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2)) = \frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2}(\varphi)(h(\varphi)(v)) = \left(\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h\right)(\varphi)(v)$

Daher: $\left(\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h\right)(\varphi)(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v} | \frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h$

Das heißt: $\mathbf{m}_\varphi \cdot f = \frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = f \cdot \mathbf{m}_2$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = (m_2 \cdot f)(\varphi)(v) = m_2(\varphi)\left(\frac{f(\varphi)(v)}{v''}\right)$$

Folgerung: $\mathbf{m}_2(\varphi) \cdot (w_2 - v_2'') = 0$ **(wir haben dem** v'' **den Index zwei gegeben)**

Setze $v_i = w_i - v_i'' \quad \Rightarrow \quad m_i(\varphi)(v_i) = 0$, $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{r} \langle v_i\rangle_\varphi$

Nachrechnen: $\mathbf{V} = \langle v\rangle_\varphi \oplus \langle v_2\rangle_\varphi \oplus \langle v_2\rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle v_r\rangle_\varphi$ **(dies sparen wir uns hier)**

Dies ist ein algorithmischer Beweis: Folgende Schritte:

(i) **Wahl von** v

(ii) $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{W}$ **(Vektoraumzerlegung)**

(iii) **Beschreibung von** Ψ **auf W: In der Basis** $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v), w_1, w_2, \ldots, w_l$ **beschreibende Martrix von** φ**:**

$$\mathbf{M}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} * & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Zudem ist $\mathbf{M}(\Psi) = C$

(iv) **Modifikation der** w_i**, so daß wir die passenden** v_i **erhalten.**

<u>Zur Eindeutigkeit</u>: Beweis per Rekursion:
Angenommen $\mathbf{m}_1 | \mathbf{m}_2 | \mathbf{m}_3 | \ldots | \mathbf{m}_r$ **und** $\mathbf{m}'_1 | \mathbf{m}'_2 | \mathbf{m}'_3 | \ldots | \mathbf{m}'_s$**.**
Sicher gilt: $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}'_s = \mathbf{m}_\varphi$ **(Das Minimalpolynom ist eindeutig)**
Angenommen: $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}'_s, \mathbf{m}_{r-1} = \mathbf{m}'_{s-1}, \ldots, \mathbf{m}_{r-k} = \mathbf{m}'_{s-l}$
Dann: $\mathbf{m}_{k-1}$ **ist normiertes Polynom kleinsten Grades mit** $\mathbf{m}_{k-1}(\varphi)(v) \subseteq \langle v_1 \rangle_\varphi \oplus \langle v_2 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle v_{t+1} \rangle_\varphi$, $k = r - t$
Dito: $\mathbf{m}_{l-1}(\varphi)(v) \subseteq \langle v'_1 \rangle_\varphi \oplus \langle v'_2 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle v'_{t+1} \rangle_\varphi$, $l = s - t$
Weiterhin gilt: $\exists \sigma : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **Automorphismus (bijektive lineare Abbildung) mit**

$$\varphi \left(\bigoplus_{i=1}^{t+1} \langle v_i \rangle \right) = \bigoplus_{i=1}^{t+1} \langle v'_i \rangle$$

Daraus folgt: $\mathbf{m}_{k-1} = w'_{l-1}$

4.5.13 Korollar (IV.5.5)

$\mathbf{m}_\varphi = \chi_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **V ist** φ**-zyklisch.**
Beweis:
"$\Leftarrow$": Schon oft gezeigt.
"$\Rightarrow$" Zwei Beweise für die Rückrichtung:
1.) Beweis folgt aus Elementarteilersatz:

$$\chi_A = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{m}_r, \quad \textbf{d.h.} \;\; \mathbf{m}_r = \mathbf{m}_\varphi$$

Hier: $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \ldots = \mathbf{m}_{r-1} = 1$**, das heißt:** $r = 1 \quad \Rightarrow \quad$ **V zyklisch.**
2.) Bereits früher (als ein Baustein des Elementarteilersatzes) gezeigt: $\exists v$**:** $\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{m}_\varphi$
Hier: $\mathbf{dim}\left(\langle \mathbf{v} \rangle_\varphi\right) = \mathbf{grad}(\mathbf{m}_{\varphi,v}) \overset{\textbf{Vor.}}{=} \mathbf{dim}(\chi_\varphi) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) \quad \Rightarrow \quad \langle v \rangle_\varphi = \mathbf{V}$

4.5.14 Korollar (IV.5.6)

Zwei Matrizen im $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sind ähnlich genau dann, wenn sie dieselben Elementarteiler haben.
"$\Leftarrow$" Nach Korollar (IV.5.5):

$$A \text{ ähnlich zu } \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

wobei die A_i durch $\mathbf{m}_i$ bestimmt werden. Daher ist A ähnlich zu gemeinsamer Matrix. Somit sind A, B ähnlich.
"$\Rightarrow$" Sei $B = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}$ mit $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$
Zerlegung von $\mathbb{K}^n$ in invariante Unterräume: $\mathbb{K}^n = \bigoplus \langle v_i \rangle_A$. Anwendung von S liefert:

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus \mathbf{S} \cdot \langle v_i \rangle_A$$

Nun lautet die generelle Frage: Was ist $\mathbf{S} \cdot \langle v_i \rangle_A$? Es gilt:

$$\mathbf{S} \cdot \langle v_i \rangle_A = \mathbf{S} \cdot \langle v, Av, A^2v, \ldots \rangle = \langle \mathbf{S} \cdot v, \mathbf{S} \cdot Av, \mathbf{S} \cdot A^2 v, \ldots \rangle$$

Nun gilt: $B \cdot (\mathbf{S}v) = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot v) = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot v = \mathbf{S} \cdot Av$
Damit folgt für die Potenzen von B:

$$B^i = \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^i \cdot (\mathbf{S} \cdot v) \overset{(*)}{=} \mathbf{S} \cdot A^i \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot v) = \mathbf{S} \cdot A^i v$$

Zur Erinnerung zu $(*)$:

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^2 & = & \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{E} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A^2 \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ & \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^3 & = & \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^2 \cdot \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A^2 \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A^3 \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ \Rightarrow & \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^i & = & \mathbf{S} \cdot A^i \cdot \mathbf{S}^{-1} \end{array}$$

Daher: $\mathbf{S}(\langle v \rangle_A) = \langle \mathbf{S}v \rangle_B$. Also: $\mathbb{K}^n = \bigoplus \langle \mathbf{S}v_i \rangle_B$
<u>Behauptung</u>: Das Minimalpolynom von B auf $\langle \mathbf{S}v_i \rangle_B$ sei $\mathbf{m}_i$.
Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i(B) &= \left(\sum \alpha_{k-i} \cdot T^i\right)(B) = \sum \alpha_{k-i} \cdot B^i = \sum \alpha_{k-i} \cdot \mathbf{S} \cdot A^i \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S} \cdot \left(\sum \alpha_{k-i} \cdot A^i\right) \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}_i(A) \cdot \mathbf{S}^{-1} = 0 \quad \textbf{auf } \langle \mathbf{S}v_i \rangle_B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Minimalpolynom von B auf $\langle \mathbf{S}v_i \rangle_B$ teilt $\mathbf{m}_i$ (Minimalpolynom von A auf $\langle v_i \rangle_A$).
Es folgt die Behauptung, da laut Voraussetzung das Minimalpolynom symmetrisch in A und B ist:
Bisher: $A \rightsquigarrow B = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}$, $\langle v \rangle_A \rightsquigarrow \langle \mathbf{S}v \rangle_B$
Daraus: $B \rightsquigarrow A = \mathbf{S}^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \cdot B \cdot \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1}$, $\langle \mathbf{S}v \rangle_B \rightsquigarrow \langle \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S}v \rangle_A = \langle v \rangle_A$
Daher: Entsprechende Minimalpolynome teilen sich wechselseitig und sind normiert $\Rightarrow$ Gleichheit

4.5.15 Beispiele: Projektion

Projektion: $p = p_{\mathbf{U}}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$
$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'$, $p_{\mathbf{U}}(u+u') = u$ **für** $u \in \mathbf{U}$, $u' \in \mathbf{U}'$
1.) $p^2 = p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} | T^2 - T = T \cdot (T-1)$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{Kern}(p) \oplus \mathbf{Kern}(p - \mathbf{id}) = \underbrace{\mathbf{Eig}(p,0)}_{\doteqdot \mathbf{U}'} \oplus \underbrace{\mathbf{Eig}(p,1)}_{\doteqdot \mathbf{U}}$$

$\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = r \quad \Rightarrow \quad \chi_p(T) = T^{n-1} \cdot (T-1)^r$,
$\mathbf{m}_1 | \mathbf{m}_2 | \ldots | \mathbf{m}_k = \mathbf{m} = T \cdot (T-1)$, $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{m}_k = T^{n-r} \cdot (T-1)^r$
Wie sehen nun die $\mathbf{m}_i$ aus? Es gibt zwei Möglichkeiten:

(i) $p \neq 0$, **id, dann:** $\mathbf{m} = T^2 - T$

(ii) Entweder: $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k = \ldots = \mathbf{m}_{h-(k-1)}$, $\mathbf{m}_{h-k} = \ldots = \mathbf{m}_1 = T$
oder: $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k = \ldots = \mathbf{m}_{h-(k-1)}$, $\mathbf{m}_{h-k} = \ldots = \mathbf{m}_1 = (T-1)$

Also:
a) $T \cdot (T-1)$ h**-mal,** T $(h-k)$**-mal. Damit folgt für das charakteristische Polynom:**

$$\chi_A = [T \cdot (T-1)]^h \cdot T^{k-h} = T^k \cdot (T-1)^h \quad \textbf{für } k \geq h$$

$\Rightarrow \quad n - r = k, \;\; r = h, \;\; n - r \geq n \quad \Rightarrow \quad 2r \leq n$
b) $T \cdot (T-1)$ h**-mal,** $(T-1)$ $(h-k)$**-mal. Damit folgt für das charakteristische Polynom:**

$$\chi_A = [T \cdot (T-1)]^h \cdot (T-1)^{k-h} = T^h \cdot (T-1)^k \quad \textbf{für } k \geq h$$

$\Rightarrow \quad n - r = k, \;\; r = k, \;\; r \geq n - r \quad \Rightarrow \quad 2r \geq n$
Also: Elementarteilesequenz allein bestimmt durch $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(p,1))$
Damit $p^2 = p$, $q^2 = q$. **Nach Korollar (IV.5.6):** p **und** q **sind ähnlich**
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(p,1)) = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(q,1))$
Direkter Beweis (nicht über Elementarteilersatz):
"$\Rightarrow$" $q = S \cdot p \cdot S^{-1} \quad \Rightarrow \quad S$ **liefert Isomorphismus zwischen Eigenräumen zu gegebenem Eigenwert.**
"$\Leftarrow$" $\mathbf{V} = \mathbf{Eig}(p,0) \oplus \mathbf{Eig}(p,1) = \mathbf{Eig}(q,0) \oplus \mathbf{Eig}(q,1)$.
Hier: $\mathbf{Eig}(p,1) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Eig}(q,1)$, **wobei** φ **Isomorhismus**
$\Rightarrow \quad \mathbf{Eig}(p,0) \xrightarrow{\Psi} \mathbf{Eig}(q,0)$, **wobei** Ψ **Isomorhismus, da die Dimensionen übereinstimmen.**
Das heißt: p **und** q **sind (bezüglich verschiedener Basen) durch**

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{E}_r \\ 0 & \end{array}\right)$$

beschreibbar.

Das Jordansche Normalenproblem für Matrizen

Gegeben $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

Zum Beispiel über $\mathbb{C}$: $\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{k} (T-\lambda_i)^{r_i}$, **wobei** $\lambda_i \neq \lambda_j$ **für** $i \neq j$. **Dann**

1.) $\mathbf{V} = \bigoplus \mathbf{Kern}\,(A - \lambda_i \cdot \mathbf{E})^{r_i}$

4.5.16 Definition: (**IV**.5.c): **Kern** $(A-\lambda_i\cdot\mathbf{E})^{r_i}$ **- Verallgemeinerte Eigenräume oder Haupträume**

Kern $(A-\lambda_i\cdot\mathbf{E})^{r_i}$ **werden als verallgemeinerte Eigenräume oder Haupträume bezeichnet.**
Es gilt: Eig $(A,\lambda_i) \subseteq$ **Kern** $(A-\lambda_i\cdot\mathbf{E})^{r_i}$
2.) Damit erhalten wir durch Basiswechsel:

$$\mathbf{S}\cdot A\cdot\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & & \\ & \boxed{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_n} \end{pmatrix}$$

wobei die einzelnen C_i **die Beschreibung von** $(A-\lambda_i\cdot\mathbf{E})^{r_i}$ **liefern.**
3.) $v_1,\ldots,v_k$ **seien Basis von** $\mathbf{U} = \mathbf{Kern}\,(A-\lambda\cdot\mathbf{E})^r$, $B := A-\lambda\cdot\mathbf{E}$. **Auf U:** $B^r = 0$
$\Rightarrow$ **alle auftretenden Blöcke gehören zu nilpotenten Matrizen.**
Sei $B^r = 0$, $v_1, B\cdot v_1, B^2\cdot v_1,\ldots,B^{r-1}\cdot v_1$ **und** $B^r\cdot v_1 = 0$. **Der Elementarteilersatz liefert nun:**
Es existieren $v_1,\ldots,v_l$ **mit:**

$$\mathbf{U} = \langle v_1\rangle_B \oplus \langle v_2\rangle_B \oplus \ldots \oplus \langle v_l\rangle_B$$

in der Basis $\left(v_1, B\cdot v_1,\ldots,B^{t-1}\cdot v_1, v_2, B\cdot v_2,\ldots,B^s\cdot v_2\right)$, **wobei** $B^t\cdot v = 0$, **wird** B **wie folgt beschrieben:**

$$\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_n} \end{pmatrix}$$

wobei für die einzelnen B_i **gilt:**

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bezüglich der Basis $\left(B^{t-1}\cdot v_1, B^{t-2}\cdot v_1,\ldots,v_1, B^{s-1}\cdot v_2, B^{s-2}\cdot v_2,\ldots,v_2\ldots\right)$ **hat die beschreibende Matrix ebenfalls Blockstruktur, wobei für die einzelnen** B_i **in diesem Fall gilt:**

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wollen wir nun A in der letzteren Basis beschreiben, so erhalten wir:

$$A = \lambda \cdot \mathbf{E} + B \quad \Rightarrow \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_1} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_n} \end{pmatrix}$$

mit den einzelnen J_i mit folgender Gestalt:

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Schließlich erhält man eine ähnliche Matrix:

$$\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_1(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_2(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_n(\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

In der Jordanschen Normalenform tauchen alle Eigenwerte auf. Es ist möglich, daß zu einem Eigenwert mehrere Jordanblöcke existieren.

4.5.17 Definition (IV.5.f): Jordanblock

Wir definieren den Jordanblock folgendermaßen:

$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}_k(\lambda) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ ist eine quadratische Matrix.

4.5.18 Definition (IV.5.g): Jordanmatrix

Wir definieren eine Jordanmatrix folgendermaßen:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_{k_n}(\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

Hier bei können die verschiedenen λ_k auch gleich sein.

4.5.19 Satz (IV.5.7): Jordansche Normalenform

Folgende Aussagen sind äquivalent für $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

(i) A **ist ähnlich zu einer Jordanmatrix**

(ii) $\chi_A = \prod (T - \lambda_i)$ **in** $\mathbf{K}[T]$

Die Jordanmarix ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Blöcke.
Sei $B = A - \lambda \cdot \mathbf{E}$. Dann: die Anzahl der k-reihigen Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist gegeben mit

$$\textbf{Anzahl Jodanblöcke zum Eigenwert } \lambda = \mathbf{rg}\left(B^{k-1}\right) - 2 \cdot \mathbf{rg}\left(B^{k}\right) + \mathbf{rg}\left(B^{k+1}\right)$$

(Insbesondere: In $\mathbb{C}$ ist jede Matrix ähnlich zu einer Jordanmatrix)

Zu (ii): $m_\varphi = \chi_\varphi$: **V hat eine Basis** $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v)$. **In dieser Basis wird** φ **wie folgt beschrieben:**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dies ist die Frobenius-Begleitmatrix zu χ_φ.
Nach der letzten Spalte gilt:

$$\chi_\varphi = T^n + \alpha_1 \cdot T^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

Nach Cayley Hamilton folgt:

$$\varphi^n(v) = -\alpha_n \cdot v - \alpha_{n-1} \cdot \varphi(v) - \ldots - \alpha_1 \cdot \varphi^{n-1}(v)$$

4.5.20 Herstellung der Jordanschen Normalenform für "kleine" Matritzen.

Nach Herrn Becker sind kleine Matrizen je nach Können zwischen (3×3) und (10×10) Felder groß.
Wir gehen folgendemaßen vor:

(1) $\chi_A(T) = \prod (T - \lambda_i)^{r_i}$, **die Eigenwerte λ_i bestimmen (die Vielfachheit der Eigenwerte ist nicht so wichtig)**

(2) Anzahl der k-reihigen Jordanblöcke bestimmen:

$$\#\mathbf{J}_k(\lambda_i) = \mathbf{rg}\left(B^{k-1}\right) - 2 \cdot \mathbf{rg}\left(B^{k}\right) + \mathbf{rg}\left(B^{k+1}\right)$$

wobei $B = A - \lambda \cdot \mathbf{E}$ (Wir fangen mit $k = 1$ an und machen solange weiter bis alle Jordanblöcke gefunden sind)

Aus (1) und (2) folgt die Jordansche Normalenform.
Bestimmung von $\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J}$. Zwei Möglichkeiten:

(i) Folge dem Beweis

(ii) Löse $\mathbf{S} \cdot A = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$, betrachte Einträge von S als Unbekannte: Wähle im Lösungsraum des linearen Gleichungssystems für S ein reguläre Matrix aus.