Kapitel VI: Analytische Geometrie

6.1 Kapitel (VI.1): Koordinatensysteme

6.1.1 Defintion (VI.1.a): Affiner Punktraum $\mathbb{A}^n$

Wir definieren $\mathbb{A}^n(K) = K^n$ als affinen Punktraum wobei

$$\mathbb{A}^n(K) = \{(x_1, \ldots, x_n) |\, x_i \in K\}$$

In diesem Fall sprechen wir von einem Zeilenraum.
Zur Erinnerung: $\mathbb{K}^n$ ist Vektorraum mit $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) |\, x_i \in \mathbb{K}\}$
Gedankliche Unterscheidung von affinem Punktraum und Vektorraum.
Sei $P = (x_1, \ldots, x_n)$ und $Q = (y_1, \ldots, y_n)$. Für den Verbindungsvektor gilt:

$$\overrightarrow{PQ} := (y_1, \ldots, y_n) - (x_1, \ldots, x_n) = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$$

6.1.2 Drei Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel und Parabel (hier nur Darstellung im $\mathbb{R}^2$)

Die Punktmenge einer Ellipse im Ursprung wird durch folgende Gleichung beschrieben: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

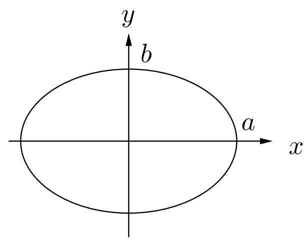

Abbildung VI-1: Ellipse im Ursprung

Eine Ellipse läßt sich geometrisch folgendermaßen konstruieren:

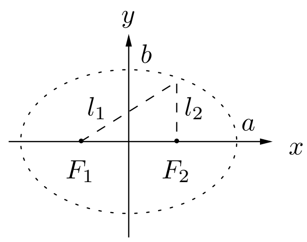

Abbildung VI-2: geometrische Konstruktion einer Ellipse

Dabei sind F_1 und F_2 die Brennpunkte. Die Ellipse ist der geometrische Ort, an dem alle Punkte P mit $l_1 + l_2 = c$ ($c =$ const) sind. Die Punkte $\pm a$ und $\pm b$ bezeichnen die Schnittpunkte mit den Achsen.

Für die Punktmenge einer Hyperbel im Ursprung gilt: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **für** $a, b > 0$

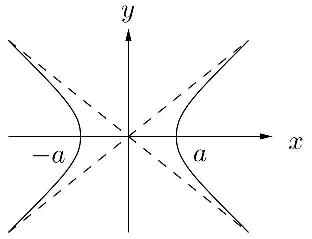

Abbildung VI-3: Hyperbel im Ursprung

Eine Hyperbel läßt sich geometrisch folgendermaßen konstruieren:

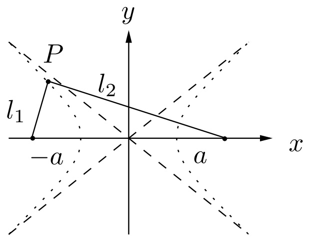

Abbildung VI-4: geometrische Konstruktion einer Hyperbel

Dabei sind F_1 und F_2 die Brennpunkte. Die Ellipse ist der geometrische Ort, wo alle Punkte P mit $l_1 + l_2 = c$ ($c =$ const). Die Winkelhalbierenden sind die Asympthote der beiden Hyperbelarme
Für eine Parabel im Usprung gilt: $y^2 = p \cdot x$ **für** $p > 0$**.**

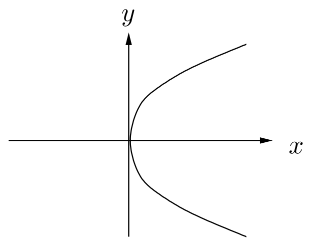

Abbildung VI-5: Parabel im Ursprung

Eine wichtige geometrische Eigenschaft der Parabel ist, daß alle Strahlen im Brennpunkt fokussiert werden.

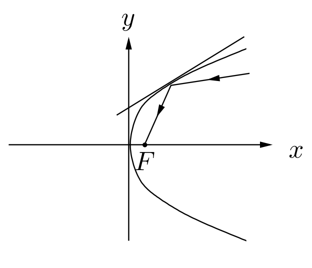

Abbildung VI-6: Fokussierung aller Strahlen um Brennpunkt

Geometrische Konstruktion einer Parabel

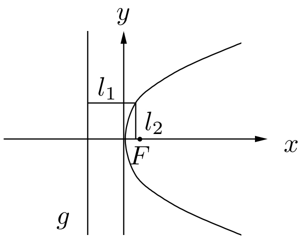

Abbildung VI-7: Geometriosche Konstruktion einer Parabel

Für eine, zur $y-$Achse parallelen Gerade (g) gilt (mit $l_1 \hat{=}$ $\perp$Stütze auf g): $l_1 = l_2$

6.1.3 Koordinatentransformation

Wir wollen nun das Zentrum der Ellipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ **nach** $(1,1)$ **verschieben und die Ellipse anschließend um** $45°$ **gegen den Uhrzeigersinn drehen:**

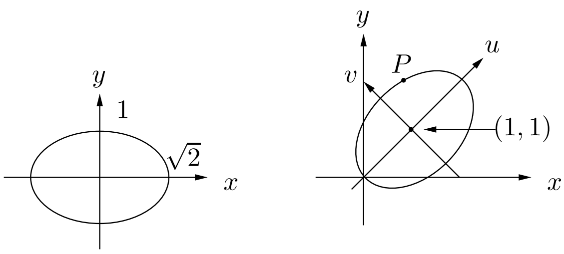

Abbildung VI-8: Verschiebung und Drehung einer Ellipse

Anschließend beschreiben wir die verschobene und gedrehte Ellipse in den (x, y) **−Koordinaten. Hierzu müssen eine Beziehung zwischen den Koordinatensystemen** (x, y) **und** (u, v) **aufstellen:**

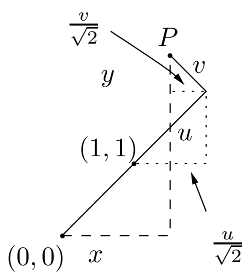

Abbildung VI-9: Beziehung zwischen den Koordinatensystemen (x, y) und (u, v)

Damit: $x - 1 = \frac{u - v}{\sqrt{2}}$ **und** $y - 1 = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$**. Addition beziehungsweise Subtraktion liefern:**

$$x + y - 2 = \sqrt{2} \cdot u \qquad -x + y = \sqrt{2} \cdot v$$

Wir wissen: (u, v) **Punkt der Ellipse** $\Leftrightarrow$ $\frac{u^2}{2} + v^2 = 1$**. Einsetzen liefert:**

$$\frac{(x + y - 2)^2}{4} + \frac{(y - x)^2}{2} = 1$$

Lösen wir nun auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4 &= x^2 + xy - 2x + yx + y^2 - 2y - 2x - 2y + 4 + 2y^2 - 4yx + x^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Relation, der man nicht direkt ansehen kann, daß es sich um eine Ellipse handelt. Nach einem nicht so leichten Koordinatenwechsel können wir es leicht erkennen.

6.1.4 Definition (VI.1.b): Affines Koordinatensystem

Ein System $\mathcal{K} = (P_0 | P_1, \ldots, P_n)$ heißt affines Koordinatensystem des $\mathbb{A}^n$, wenn gilt:

(I) $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{A}^n$

(II) $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, …, $\overrightarrow{P_0P_n}$ **bilden eine Basis des** $\mathbb{K}^n$

Notation und Bezeichnung:

(i) P_0 **wird als Koordinantenursprung bezeichnet**

(ii) $\overline{P_0P_1} := P_0 + \mathbb{K} \cdot \overrightarrow{P_0P_i} = \left\{ P_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{P_0P_i} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$ **wird als i-te Koordinatenachse bezeichnet.**

Sei $P \in \mathbb{A}^n$. P wird bezüglich $\mathcal{K}$ durch ein Koordinatentupel $(y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}}$ beschrieben:

$$P = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \overrightarrow{P_0P_i} \quad \Leftrightarrow \quad P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \overrightarrow{P_0P_i}$$

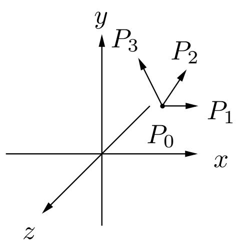

Abbildung VI-10: Koordinatensystem im $\mathbb{A}^3$

6.1.5 Definition (VI.1.c): Standardkoordinatensystem $\mathfrak{E}$

Wir definieren $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{E} = ((0, \ldots, 0) | (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$ wobei die 1 jeweils an der i-ten Stelle steht. Beispiel für $n = 2$:

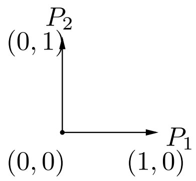

Abbildung VI-11: Beispiel für Standardkoordinatensystem im $\mathbb{R}^2$

6.1.6 Definition (VI.1.d): Euklidisches Koordinatensystem $\mathcal{K}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\mathcal{K}$ heißt euklidisches Koordinatensystem, wenn die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukt bilden.

6.1.7 Sätzchen (VI.1.1): Abstände zweier Punkte im euklidischen Koordinatensystem

Sei $\mathcal{K}$ euklidisches Koordinatensystem, $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{K}}$ und $Q = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}}$. Dann gilt:

$$\mathbf{d}(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Beweis: P und Q können eindeutig dargestellt werden:

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \qquad Q = P_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$$

Für den Verbindungsvektor gilt nun:

$$Q - P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i - \left(P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot v_i$$

Wir wissen:

$$\left\| \overrightarrow{PQ} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{n} v_i, \sum_{i=1}^{n} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

weil $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis ist.

6.1.8 Beispiel: Koordinatensysteme

Wir wollen endlich dimensionale Körper betrachten. Zur Erinnerung: $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ (p Primzahl).
Der $\mathbb{F}_2^2$ läßt sich leicht aufzeichnen, da es nur aus vier Punkte besteht:

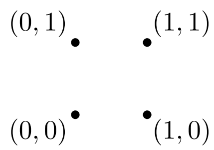

Abbildung VI-12: $\mathbb{F}_2^2$

In diesem Fall ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = ((0,0)|\,(1,0), (0,1))$. Damit sind die "Achsenvektoren" $v_1 = (1, 0)$ und $v_2 = (0, 1)$.
Für die Punkte der ersten Achse gilt:

$$P_0 + \mathbb{K}v_1 = \{P_0 + \lambda \cdot v_1 \quad \textbf{für } \lambda \in \mathbb{F}_2\} = \{P_0, P_0 + v_1\}$$

Also sind die Punkte der Menge $\{(0,0), (1,0)\}$ die erste Achse und $\{(0,0), (0,1)\}$ die zweite Achse.
Nun wollen wir ein anderes Koordinatensystem $\mathcal{K}' = \{(1,1)|\,(0,0), (1,0)\}$ betrachten. Wir können leicht zeigen, daß $\mathcal{K}'$ auch Koordinatensystem ist, da

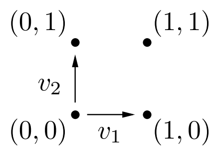

Abbildung VI-13: v_1 und v_2 im $\mathbb{F}_2^2$

(i) Alle Punkt $\in \mathbb{F}_2$

(ii) Für die Verbindungsvektoren gilt:

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = Q_1 - Q_0 = (-1,-1) = (1,1) \qquad \overrightarrow{Q_0Q_2} = Q_2 - Q_0 = (0,-1) = (0,1)$$

Man sieht leicht, daß die Verbindungsvektoren sind linear unabhängig.

Damit ist auch $\mathcal{K}'$ **ein Koordinatensystemdes** $\mathbb{F}_2^2$**.**
Nun wollen wir einen Punkt $P = (0,1)_{\mathcal{K}}$ **in** $\mathcal{K}'$ **beschreiben:** $P = (y_1, y_2)_{\mathcal{K}'}$**. Es gilt:**

$$\begin{array}{rrcl} & \overrightarrow{Q_0P} & = & y_1 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} + y_2 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_2} \\ \Leftrightarrow & (1,0) & = & y_1 \cdot (1,1) + y_2 \cdot (0,1) \end{array}$$

$y_1 = y_2 = 1$ **lößt diese Gleichung eindeutig, da** v_1, v_2 **eine Basis bilden, also gilt:**

$$P = (0,1)_{\mathcal{K}} = (y_1, y_2)_{\mathcal{K}'} = (1,1)_{\mathcal{K}'}$$

6.1.9 Koordinatenwechsel

Gegeben sei $\mathcal{K} = (P_0 | P_1, \ldots, P_n)$ **mit Basis** $\mathfrak{A} = \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right) \doteqdot (v_1, \ldots, v_n)$ **des** $\mathbb{K}^n$ **und** $\mathcal{K}' = (Q_0 | Q_1, \ldots, Q_n)$ **mit Basis** $\mathfrak{B} = \left(\overrightarrow{Q_0Q_1}, \ldots, \overrightarrow{Q_0Q_n}\right) \doteqdot (w_1, \ldots, w_n)$ **des** $\mathbb{K}^n$**.**
Dann existiert eine Übergangsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} =: \mathbf{S} = \left(\boxed{s_{ij}} \right)$$

Wir wissen aus der Linearen Algebra I: In den Spalten von S stehen die Beschreibungen von w_j **in der Basis** $\mathfrak{A}$**:**

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \cdot v_i$$

Nun: $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{K}} = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}'}$, $Q_0 = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{K}}$

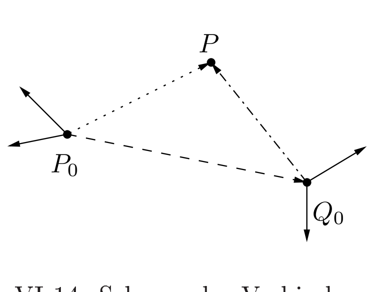

Abbildung VI-14: Schema der Verbindungsvektoren

6.1.10 Satz (VI.1.2): Koordinatenwechsel

In obiger Situation gilt:

$$y^T = S^{-1} \cdot (x-a)^T$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$**,** $y = (y_1, \ldots, y_n)$ **und** $a = (a_1, \ldots, a_n)$

<u>Beweis</u>: Ausrechnen der Koordinaten im neuen System:

$$\overrightarrow{Q_0P} = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot w_j = -\overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{P_0P} = -\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

Einsetzen von $w_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \cdot v_i$ **und anschließendem Koeffizientenvergleich liefert:**

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot y_j = x_i - a_i \quad \textbf{für } i = 1, \ldots, n$$

Damit: $(x-a)^T = \mathbf{S} \cdot y^T \quad \Leftrightarrow \quad y^T = \mathbf{S}^{-1} \cdot (x-a)^T$

6.1.11 Spezialfall des Koordinatenwechsels

Nun wollen wir noch einen Spezialfall des Koordinatenwechsels betrachten:
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**,** $\mathcal{K} = \mathfrak{E}$ **und sei** $\mathcal{K}'$ **euklidisches Koordinatensystem.**
Sind $(w_1, \ldots, w_n)$ **Orthonormalbasis, dann bilden auch** $\left(w_1^T, \ldots, w_n^T\right)$ **eine Orthonormalbasis. Damit:**

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ w_1^T & \cdots & w_n^T \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n)$$

Ein Kennzeichen orthognaler Matrizen ist: $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$

6.1.12 Korollar (VI.1.3)

Beim Übergang von einem Standardkoordinatensystem zu einem euklidischen Koordinatensystem gilt:

$$y = (x-a) \cdot \mathbf{S}$$

<u>Beweis</u>:

$$\begin{aligned} y^T &= \mathbf{S}^{-1} \cdot (x-a)^T = \mathbf{S}^T \cdot (x-a)^T \\ \Leftrightarrow \quad y &= \left(\mathbf{S}^T \cdot (x-a)^T\right)^T = \left((x-a)^T\right)^T \cdot \left(\mathbf{S}^T\right)^T = (x-a) \cdot \mathbf{S} \end{aligned}$$

6.1.13 Beispiel für einen Koordinatenwechsel

Wir betrachten $\mathfrak{E}$ im $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{K}'$, daß aus $\mathfrak{E}$, durch eine Drehung um 45^0 gegen den Uhrzeigersinn und eine anschließende Verschiebung um den Vektor $(1,1)$ hervorgeht. (Vergleiche auch Beispiel mit Ellipse $(6.1.3)$)

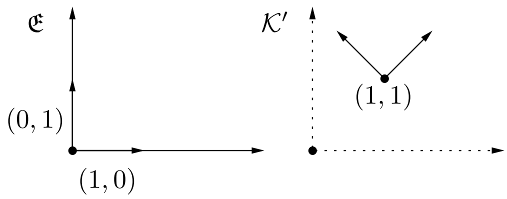

Abbildung VI-15: $\mathfrak{E}$ und $\mathcal{K}'$

Betrachten wir die Vektoren w_1, w_2 näher so sehen wir leicht:

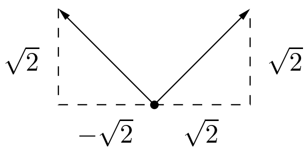

Abbildung VI-16: Nähere Betrachtung von w_1, w_2

Damit: $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{K}'}$ **und** $w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{K}'}$. **Damit sind die Einträge von S bekannt und wir erhalten:**

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$$

Nun wählen wir einen Punkt P:

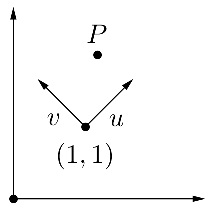

Abbildung VI-17: Punkt P

P hat nun Darstellungen in $\mathfrak{E}$ und $\mathcal{K}'$:

$$P = (x,y)_{\mathfrak{E}} = (u,v)_{\mathcal{K}'}$$

Nun gilt:

$$(u,v)^T = (x-1, y-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ausrechnen liefert das altbekannte Ergebnis:

$$u = \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}, \quad v = -\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

6.2 Quadriken in $\mathbb{R}^n$

6.2.1 Definition (VI.2.a): Quadrik

Gegeben seien $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Die Menge

$$\mathbf{Q} := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i + c = 0 \right\}$$

heißt Quadrik (allgemein Kegelschnitte).

6.2.2 Beispiele für Quadriken

Für den $\mathbb{R}^2$ beschreibt die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse mit den Achsenschnitten a und b

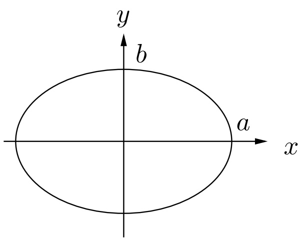

Abbildung VI-18: Ellipse mit Achsenschnitten a und b

Wir haben früher schon gesehen (6.1.3), daß die Gleichung

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y = 0$$

auch eine Ellipse darstellt.

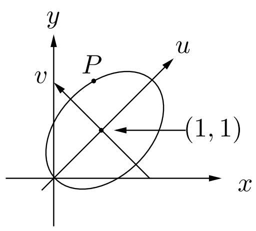

Abbildung VI-19: Ellipse mit obiger Gleichung

Es ist nicht ohne weiteres ersichtlich, daß die obige Gleichung eine Ellipse beschreibt. Deshalb wollen wir nun allgemeine Verfahren entwicklen um Aussagen über Gleichungen der obigen Form treffen zu können.

6.2.3 Vorbemerkungen

Ohne Einschränkung: $a_{ij} = a_{ji}$, denn für $i < j$:

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji}) \cdot x_ix_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \cdot x_ix_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \cdot x_jx_i$$

Es folgt die Behauptung.

Nach Definition: $\mathbf{Q} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$. **Da** $a_{ij} = a_{ji}$ **folgt unmittelbar:**

$$A = \left(\boxed{a_{ij}} \right) \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$$

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **und** $b = (b_1, \ldots, b_n)$. **Dann läßt sich die obige Gleichung auch in Matrizenform schreiben:**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0 = x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = 0$$

denn:

$$\begin{aligned} x \cdot A \cdot x^T &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \left(\boxed{a_{ij}} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ b \cdot x^T &= (b_1, \ldots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \end{aligned}$$

Der Satz über die Hauptachsentransformation liefert: $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ **mit der Eigenschaft**

$$\mathbf{D} := \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r = \mathbf{rg}(A)$ **und** $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wichtig: Die Spaltenvektoren von S bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A**.**

⌈**Beweis:** $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$, **da** $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$. **Damit:**

$$A \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen wir nun weiter aus, so erhalten wir:

$$A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \cdots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_1 \cdot v_1 & \cdots & \lambda_r \cdot v_r & 0 & \cdots & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Damit: $A \cdot v_i = \lambda \cdot v_i$ **für** $i = 1, \ldots, r$ **und** $A \cdot v_j = 0$ **für** $i = r + 1, \ldots, n$ ⌋
Einsetzen liefert nun: $\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad A = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T$. **Wir erhalten:**

$$x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = x \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot x^T + b \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot x^T + c = y \cdot \mathbf{D} \cdot y^T + b' \cdot y^T + c$$

wobei $y = x \cdot \mathbf{S}$ **und** $b' = b \cdot \mathbf{S}$. **Betrachtung von** $y \cdot \mathbf{D} \cdot y^T + b' \cdot y^T + c$ **:**

$$\begin{aligned}
(y_1, \ldots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (b'_1, \ldots, b'_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + c &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot y_i^2 + \sum_{i=1}^{r} b'_i \cdot y_i + c &= 0
\end{aligned}$$

Deutung mittels Korollar (**VI**.1.3)**:** $y = x \cdot \mathbf{S}$**, Übergang von** $\mathfrak{E}$ **zu** $((0, \ldots, 0)|\, P_1, \ldots, P_n)$ **wobei** $\overrightarrow{0P_i} = v_i$

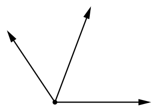

Abbildung VI-20: v_i im Raum

Die Orthonormalbasis, aus Eigenvektoren von A**, liefern die neuen Achsen des Koordinatensystems.**

6.2.4 Beispiel

Nun wollen wir aus unserem altbekannten Beispiel (6.1.3) **eine symmetrische Gestalt herstellen:**

$$\begin{aligned}
3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 - xy - yx - 4x - 4y &= 0
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = (-4, 4)$, $c = 0$.

Nun wollen wir die Eigenwerte von A **ausrechnen. Wir gehen wie bekannt vor:**

$$\chi_A = \begin{vmatrix} T-3 & 1 \\ 1 & T-3 \end{vmatrix} = (T-3)^2 - 1 = T^2 - 6T + 8 = (T-2) \cdot (T-4)$$

Es folgt: $Av_1 = 2v_1$ **und** $Av_2 = 4v_2$, $\lambda_1 = 2$ **und** $\lambda_2 = 4$. **Wir erhalten damit folgende Eigenvektoren:**

$$\begin{aligned}
A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die bereits bekannte Matrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Quadratische Ergänzung der ersten r Terme liefert:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot y_i^2+\sum_{i=1}^{n}b'_i\cdot y_i+c &= 0\\
\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot\left(y_i^2+\frac{b'_i}{\lambda_i}\cdot y_i\right)+\sum_{i=r+1}^{n}b'_i\cdot y_i+c &= 0\\
\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot\left(y_i+\frac{b'_i}{2y_i}\right)^2+\sum_{i=r+1}^{n}b'_i\cdot y_i\ \underbrace{+c-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot\left(\frac{b'_i}{2\lambda_i}\right)^2}_{\doteqdot c'} &= 0
\end{aligned}$$

6.2.5 Drei wichtige Quadriken

Zur Erinnerung: Eine Quadrik ist durch eine Gleichung der Form:

$$x\cdot A\cdot x^T+b\cdot x^T+c=0$$

gegeben wobei $A\in\mathbf{Sym}\,(n,\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^n$ und $c\in\mathbb{R}$
Nun unterscheiden wir drei verschiedene interessante Fälle:

(I) $b'_{r+1}=b'_{r+2}=\ldots=b'_n=c'=0$

(II) $b'_{r+1}=b'_{r+2}=\ldots=b'_n=0$ **und** $c'\neq 0$

(III) Ein $b'_j\neq 0$ **für** $j\in\{r+1,\ldots,n\}$

<u>Betrachtung Fall (I)</u>:

Koordinatenwechsel liefert: $z_i=y_i+\dfrac{b'_i}{2\lambda_i}$ **für** $i=1,\ldots,r$ **und** $z_j=y_j$ **für** $j=r+1,\ldots,n$.
Damit erhalten wir für den endgültigen Koordinatenwechsel:

$$z=(z_1,\ldots,z_n)=x\cdot\mathbf{S}+\left(\frac{b'_1}{2\lambda_1},\ldots,\frac{b'_r}{2\lambda_r},0,\ldots,0\right)=(x-a)\cdot\mathbf{S}$$

Es folgt: $a\cdot\mathbf{S}=-\left(\dfrac{b'_1}{2\lambda_1},\ldots,\dfrac{b'_r}{2\lambda_r},0,\ldots,0\right)$

Ergebnis: in neuen Koordinaten hat Q die Gleichung: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot z_i^2=0$.

Seien ohne Einschränkung $\lambda_1,\ldots,\lambda_k>0$ **und** $\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_{k+l}<0$ **wobei** $k+l=r$ **und** $|\lambda_i|=\dfrac{1}{a_i^2}$**. Nun erhalten wir die endgültige Normalform für Q:**

$$\mathbf{Q:}\quad\sum_{i=1}^{k}\frac{z_i^2}{a_i^2}-\sum_{i=k+1}^{k+l}\frac{z_i^2}{a_i^2}=0$$

wobei $k+l=r=\mathbf{rg}\,(A)$ **und** $k-l=\mathbf{sign}\,(A)$.

Nun wollen wir für $n = 2$ die drei verschiedenen Typen von Quadriken betrachten:

<u>Fall (I.1)</u>: Seien λ_1 und λ_2 positiv. Dann erhalten wir eine Quadrik mit folgender Gleichung:

$$\textbf{Q:}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Diese Gleichung wird nur durch $x = y = 0$ gelöst und damit besteht diese Quadrik nur aus dem Punkt $(0, 0)$.

<u>Fall (I.2)</u>: Sei OE λ_1 positiv und λ_2 negativ. Dann erhalten wir eine Quadrik mit folgender Gleichung:

$$\textbf{Q:}\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Wir wollen nun die Lösungsmenge dieser Gleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a} \cdot x \quad \wedge \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge der Gleichung erhalten wir ein Paar von Geraden:

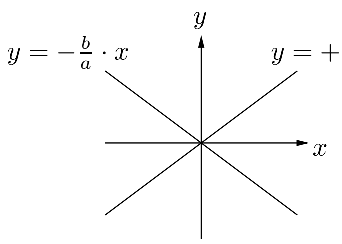

Abbildung VI-21: $y = \frac{b}{a} \cdot x$ und $y = -\frac{b}{a} \cdot x$

<u>Fall (I.3)</u>: Seien λ_1, λ_2 negativ. Wir erhalten eine Quadrik mit folgender Gleichung, die wir durch Multiplikation mit (-1) auf den Fall (I.1) zurückführen:

$$\textbf{Q:}\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{Q:}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

<u>Betrachtung Fall (II)</u>:

Nach analogem Koordinatenwechsel erhalten wir:

$$\textbf{Q:}\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot z_i^2 + c' \neq 0 \quad \textbf{wobei} \quad c' \neq 0$$

Wir spalten die Summe wiederum in positive und negative λ_i auf und erhalten:

$$\textbf{Q:}\ \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{z_i^2}{a_i^2} + c' = 0$$

wobei $k + l = r = \mathbf{rg}\,(A)$ und $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$.

Nun wollen wir für $n = 2$ die drei verschiedenen Quadriken-Typen betrachten:
<u>Fall (II.1)</u>: Seien λ_1 und λ_2 positiv. Wir erhalten eine Gleichung der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + c' = 0$$

Nun müssen wir eine weitere Fallunterscheidung für c' vornehmen:
<u>Fall (II.1.a)</u>: Für $c' > 0$ gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$. Damit $\mathbf{Q} = \phi$.
<u>Fall (II.1.b)</u>: Für $c' < 0$ gibt es Lösungen. Division durch $|c'|$ liefert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + c' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = |c'| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$$

In diesem Fall ist Q also eine Ellipse.
<u>Fall (II.2)</u>: Sei OE λ_1 positiv und λ_2 negativ. Wir erhalten:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c' = 0$$

Als erhalten unabhängig vom Vorzeichen des Skalars c' eine Hyperbel.
<u>Fall (II.3)</u>: Dieser Fall läßt sich analog zu Fall (I.3) durch eine Multiplikation mit (-1) auf den Fall (II.1) zurückführen.
<u>Betrachtung Fall (III)</u>:
Sei OE $b_{r+1} \neq 0$. Dann erhalten wir nach Koordinatenwechsel:

$$z_i = y_i + \frac{b'_i}{2\lambda_i} \quad \textbf{für } i = 1, \ldots, r \qquad z_{r+1} = \sum_{p=r+1}^{n} b'_p \cdot y_p + c' \qquad z_j = y_j \quad \textbf{für } j = r+2, \ldots, n$$

OE $\left\|\left(b'_{r+1}, \ldots, b'_n\right)\right\| = 1$ **Ergänze** $\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ **zu einer orthogonalen Matrix**

$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} b'_{r+1} & \\ \vdots & * \\ b'_n & \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n-r)$ **($*$orthogonale Ergänzung). Setze** $\overline{\mathbf{S}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{S}' \end{array}\right)$ **damit:**
$\overline{\mathbf{S}} \in \mathcal{O}(n)$ **und es gilt:**

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \ldots, z_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) + \underbrace{\left(\frac{b'_1}{2\lambda_1}, \ldots, \frac{b'_r}{2\lambda_r}, 0, \ldots, 0\right)}_{\doteqdot \widetilde{b}} \\ &= x \cdot \underbrace{\overline{\mathbf{S}} \cdot \left(\begin{array}{c|cc} \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{(\#)} + \widetilde{b} \end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage, ob $(\#) \in \mathcal{O}(n)$ **ist.**
Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall. Wir können die Situation aber retten, indem wir Teile der Gleichung modifizieren. Hierzu dividieren wir $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i' \cdot y_i + c'$ **durch** $\left\|\left(0,\ldots,0,b_{r+1}',\ldots,b_n\right)\right\|$**. Das Ergebnis ist Fall III mit modifzierten** λ_i', b_i' **und** c'**.**
Dann ist $(\#) \in \mathcal{O}(n)$**.**
Damit erhalten wir den folgenden Koordinatenwechsel:

$$z = x \cdot (\#) + \widetilde{b} = (x-a) \cdot \widetilde{S} \quad \textbf{wobei} \quad \widetilde{S} \in \mathcal{O}(n)$$

Im neuen Koordinatensystem hat Q folgende beschreibende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{z_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{l+k} \frac{z_i^2}{a_i^2} + z_{k+l+1} = 0$$

Betrachtung für $n = 2$**. Wir erhalten folgende Gleichung:**

$$\pm\frac{x^2}{a^2} - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{a^2} \quad \vee \quad y = -\frac{x^2}{a^2}$$

In beiden Fällen handelt es sich um eine Parabel.

6.2.6 Definition (VI.2.b): Herstellung der euklidischen Normalenform

Die Transformation der ursprünglichen Gleichung für Q auf die endgültige Gestalt (im Koordinatensystem $z_1,\ldots,z_n$**) heißt Herstellung der euklidischen Normalenform.**

6.2.7 Definition (VI.2.c): Erweiterte Matrix einer Quadrik

Sei eine Quadrik gegeben mit $x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = 0$**. Die erweitere Matrix** A' **ist definiert mit:**

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2}b \\ \hline \frac{1}{2}b^T & A \end{array}\right)$$

6.2.8 Erkennung der Art der Quadrik anhand der erweiterten Matrix

Problem: Wie erkenne man nun anhand gegebener A, b, c **in welchem Fall man sich befindet.**
Hierzu wird die Erweiterte Matrix einer Quadrik betrachtet:

$$\mathbf{Q} : (1,x) \cdot A' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x^T \end{pmatrix} = 0$$

<u>1. Schritt</u>: Berechnung der erweiterten Matrix

$$A' \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathbf{S} \end{array}\right)^T \cdot A' \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathbf{S} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2}b\mathbf{S} \\ \hline \frac{1}{2}(b\mathbf{S})^T & \mathbf{S}^T A \mathbf{S} \end{array}\right)$$

$$
= \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2}b' \\ \hline \frac{1}{2}\left(b'\right)^T & \mathbf{D} \end{array}\right)
= \left(\begin{array}{c|cccccc} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \cdots & & & \frac{1}{2}b'_n \\ \hline \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \lambda_r & & & \\ \vdots & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ \frac{1}{2}b'_n & & & & & & 0 \end{array}\right)
$$

<u>2. Schritt</u>: Betrachtung der drei Fälle

<u>Fall I/II</u>

$$
\left(\begin{array}{c|ccccccc} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \frac{1}{2}b'_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \frac{1}{2}b'_r & & & \lambda_r & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right)
\overset{(*)}{\rightsquigarrow}
\left(\begin{array}{c|cccccc} c' & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & \lambda_r & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right)
$$

<u>Bemerkung</u>: $(*)$ Symmetrische Gauß Jordan Umformung

$c' = c - \left(\frac{1}{2}b'_1\right)^2 \frac{1}{\lambda_1} - \ldots - \left(\frac{1}{2}b'_r\right)^2 \frac{1}{\lambda_r}$

<u>Fall I</u>: $k + l = \mathbf{rg}\,(A)$, $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$, $\mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{rg}\,(A') = k + l$, $=0$

<u>Fall II</u>: $k + l = \mathbf{rg}\,(A)$, $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$, $\mathbf{rg}\,(A') = k + l + 1$

$c' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{sign}\,(A') = 1 + \mathbf{sign}\,(A)$, $c' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{sign}\,(A') = \mathbf{sign}\,(A) - 1$

<u>Fall III</u>:

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \frac{1}{2}b'_r & \neq 0 & \cdots & \neq 0 \\ \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \frac{1}{2}b'_r & & & \lambda_r & & & \\ \hline \neq 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 & \\ \neq 0 & & & & & & \end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|ccc} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \frac{1}{2}b'_r & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \frac{1}{2}b'_r & & & \lambda_r & & & \\ \hline 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 & \\ 1 & & & & & & \end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & \lambda_r & & & \\ \hline 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & \end{array}\right)
$$

Umformungen der Matrizen erfolgten mittels symmetrischen Gauß Jordan Algorithmus

$\mathbf{rg}\,(A') = 2 + \mathbf{rg}\,(A) = k + l + 2$, $\mathbf{sign}\,(A') = \mathbf{sign}\,(A) = k - l$

6.3 Affine Unterräume des $\mathbb{A}^n$

$\mathbb{A}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in K \}$
<u>Objekte</u>: Punkte, Geraden, Ebenen, ...

6.3.1 Definition (VI.3.a): Gerade

Seien $P \in \mathbb{A}^n$, $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, dann ist die Gerade definiert als

$$g_{P;v} = P + \mathbb{K} \cdot v = \{ P + t \cdot v | \, t \in \mathbb{K} \}$$

Wichtig: $\mathbb{K} \cdot v = \left\{ \overrightarrow{P_1 P_2} \, \middle| P_1, P_2 \in g_{P;v} \right\}$
$g_{P;a} = g_{P;\lambda \cdot a}$ **für** ein $\lambda \neq 0$

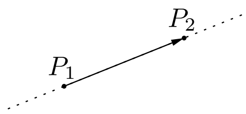

Abbildung VI-22: Gerade durch P_1 und P_2

6.3.2 Beispiel: $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, $n = 2$

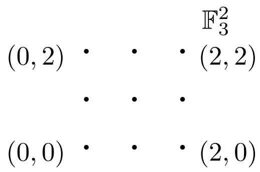

Abbildung VI-23: Visualisierung von $\mathbb{F}_3^2$

1. Gerade: $P = (1,1)$, $v = (2,1)$, $2, 1 \in \mathbb{F}_3 \quad \Rightarrow \quad g_{P;v} = \{(1,1), (0,2), (2,0)\}$

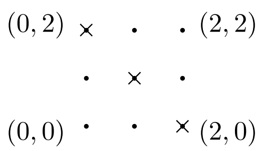

Abbildung VI-24: Visualisierung der 1. Gerade

2. Gerade: $Q = (1,0)$, $v = (2,1)$, $2, 1 \in \mathbb{F}_3 \quad \Rightarrow \quad g_{Q;v} = \{(1,0), (0,1), (2,2)\}$

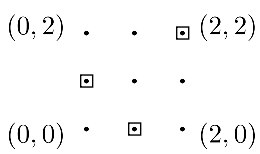

Abbildung VI-25: Visualisierung der 2. Gerade

3. Gerade: $R=(1,2)$, $w=(1,2)$, $2,1\in\mathbb{F}_3 \quad\Rightarrow\quad g_{R;w}=\{(1,2),(2,1),(0,0)\}$
Diese Gerade ist parallele zu den vorigen Geraden, da in $\mathbb{F}_3$ $(2,1)=2\cdot(1,2)$ **ist, also ist** $g_{R;w}=g_{R;v}$

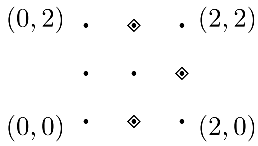

Abbildung VI-26: Visualisierung der 3. Gerade

4. Gerade: $R=(1,2)$, $u=(1,1)$, $2,1\in\mathbb{F}_3 \quad\Rightarrow\quad g_{R;u}=\{(1,2),(2,0),(0,1)\}$

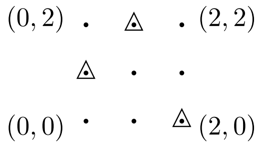

Abbildung VI-27: Visualisierung der 4. Gerade

$g_{R;u}$ **hat jeweils mit** $g_{P;v}$, $g_{Q;v}$, $g_{R;w}$ **genau einen Schnittpunkt gemeinsam.**

6.3.3 Folgerung:

$g_{P;a}=g_{P;b} \quad\Rightarrow\quad \exists\lambda=0: b\neq\lambda\cdot a$

6.3.4 Definition (VI.3.b): Parallelität von Geraden

Sei $g=g_{P;v}$, $h=g_{Q;w}$. **Zwei Geraden heißen parallel wenn gilt:** $b=\lambda\cdot v$ **für ein** $\lambda\neq 0$.
Notation für parallele Geraden g **und** h**:** $g\parallel h$.

6.3.5 Satz (VI.3.1): Eindeutigkeit der Gerade, Parallelenaxiom

(i) **Durch zwei Punkte** $P\neq Q$ **gibt es genau eine Gerade** g**, und zwar gilt:** $g=\overline{PQ}=P+K\cdot\overrightarrow{PQ}$

(ii) **(Parallelenaxiom) Zu einer Geraden** g **und einem Punkt** $P\notin g$ **gibt es genau eine Parallele** h **zu** g **durch** P.

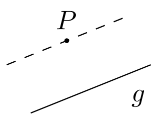

Abbildung VI-28: Illustration für Parallelenaxiom

__Beweis__: Wir zeigen zuerst die Existenz, dann die Eindeutigkeit der Geraden
__Zu__ __(i)__**:**
__Existenz__: $g:=g_{P;\overrightarrow{PQ}}=\left\{P+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ}\,\middle|\,\lambda\in K\right\}\ni P,Q$, **da für**
$\lambda=0: P+0\cdot\overrightarrow{PQ}=P$ **und** $\lambda=1: P+1\cdot\overrightarrow{PQ}=Q$.
__Eindeutigkeit__: Sei g' **eine Gerade, die** P **und** Q **enthält.**

<u>Behauptung</u>: $g = g'$
<u>Beweis</u>: $g' = g_{R;v}$, $P = R + \lambda_0 \cdot v$, $Q = R + \mu_0 \cdot v$, $P \neq Q \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \neq \mu_0$
Es folgt:

$$\begin{array}{rcl} v & = & (\mu_0 - \lambda_0)^{-1} \, \overrightarrow{PQ} \\ \Rightarrow \quad g' & = & \{R + \lambda \cdot v \, | \lambda \in K\} \\ & = & \{\, P + (-\lambda_0) \cdot v + \lambda \cdot v | \, \lambda \in K\} \\ & = & \{\, P + \lambda' \cdot v | \, \lambda \in K\} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad g' = g_{P;\overrightarrow{PQ}}$, **da** $v = \alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$, **mit** $\alpha \neq 0$
<u>Zu (ii)</u>:
<u>Existenz</u>: Sei $g = g_{R;v}$, **setze** $h := g_{P;v}$, **dann ist (nach Definition (VI.3.b))** $h \parallel g$, $h \ni P$.
<u>Eindeutigkeit</u>: Analog zu (i).

6.3.6 Definition (VI.3.c): Affiner Unterraum

$\mathbf{L} \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ **heißt affiner Unterraum, wenn folgendes gilt:**

(i) $\mathbf{L} \neq \emptyset$, $\forall P, Q \in \mathbf{L}$, $P \neq Q \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \in \mathbf{L}$

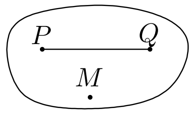

Abbildung VI-29: $\overline{PQ} \in \mathbf{L}$

(ii) $\forall$ **Geraden** $g \subseteq \mathbf{L}$, $\forall P \in \mathbf{L} \setminus g$: **die Parallele zu** g **durch** M **ist in L enthalten**

6.3.7 Beispiel: Affine Unterräume zu $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$

$$\begin{array}{cc} (0,1)\bullet & \bullet(1,1) \\ (0,0)\bullet & \bullet(1,0) \end{array}$$

Abbildung VI-30: $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$

<u>Frage</u>: Ist $\mathbf{L} = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ **affiner Unterraum?**
Jede Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Gerade.

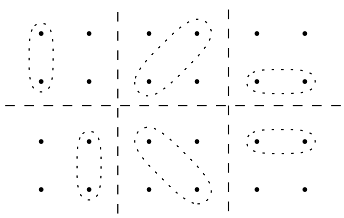

Abbildung VI-31: Alle Geraden in $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$

L erfüllt (i) **aber nicht** (ii).
<u>Konzequenz</u>: ein affiner Unterraum, der $(0,0), (1,0), (0,1)$ **enthält ist** $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$.

Beschreibung affiner Unterräume

6.3.8 Satz (VI.3.2): Äquivalente Beschreibungen für affine Unterräume

Sei $\mathbf{L} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$, $\mathbf{L} \neq \emptyset$.
Dann sind äquivalent:

(i) $\mathbf{L}$ **ist affiner Unterraum.**

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{L}) := \left\{ \overline{PQ} \middle| P, Q \in \mathbf{L} \right\} < K^n$ **und** $\mathbf{L} = P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$ **für jeden Punkt** $P \in \mathbf{L}$.

(iii) $\mathbf{L} = R + U$, **für ein** $R \in \mathbb{A}^n$, $U < K^n$.

(iv) $\exists A \in \mathbf{M}_{m,n}(K)$, $b \in K^n$: $\mathbf{L} = \mathbb{L}(A, b)$, $\mathbf{L} \neq \phi$.

6.3.9 Bemerkung

- **Unterräume des Vektorraums** $\mathbb{K}^n$ $\leftrightarrow$ **homogene Gleichungssysteme** $A \cdot x = 0$
- **affine Unterraume des** $\mathbb{A}^n(K)$ $\leftrightarrow$ **inhomogene Gleichungssysteme** $A \cdot x = b$ **(**b **darf** $= 0$ **sein!)**
- **Die affinen Unterräume des** $\mathbb{K}^n$ **sind Spezialfälle der affinen Unterräume von** $\mathbb{A}^n$.

6.3.10 Vorbemerkungen zum Beweis von (VI.3.2)

(a) K^n **Standardbilinearform** $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, **nicht ausgeartet**

Sei $U < \mathbb{K}^n$, **dann** $U^\perp = \{u \in \mathbb{K}^n | \langle u, U \rangle = 0\}$, $\mathbf{dim}(U^\perp) = n - \mathbf{dim}(U)$ **und** $\left(U^\perp\right)^\perp = U$,

da $U \subseteq \left(U^\perp\right)^\perp = U^{\perp\perp}$ **und** $\mathbf{dim}(U) = \mathbf{dim}\left(U^{\perp\perp}\right) = n - \mathbf{dim}\left(U^\perp\right) = \mathbf{dim}(U)$

(b) $A \cdot x = \begin{pmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow v_m \rightarrow \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \langle v_1, x^T \rangle \\ \vdots \\ \langle v_m, x^T \rangle \end{pmatrix}$

6.3.11 Beweis von Satz (VI.3.2):

$(i) \quad \Rightarrow \quad (ii)$: $u = \overrightarrow{PQ}$, $v = \overrightarrow{RS}$, $P, Q, R, S \in \mathbf{L}$
Zu Zeigen: $u + v = \overrightarrow{AB}$, $A, B \in \mathbf{L}$

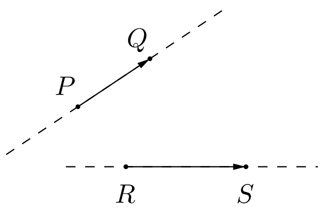

Abbildung VI-32: Geometrische Konstruktion des Beweises - I

Nach Anwendung der Parallelenaxiom folgt:

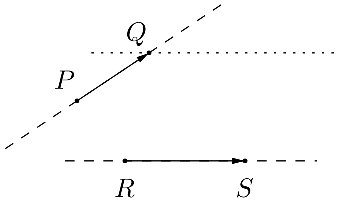

Abbildung VI-33: Geometrische Konstruktion des Beweises - II

Nun tragen wir $\overrightarrow{RS}$ ab und erhalten B:

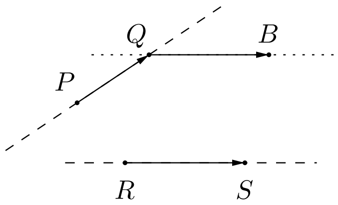

Abbildung VI-34: Geometrische Konstruktion des Beweises - III

Konstruktion der Geraden k:

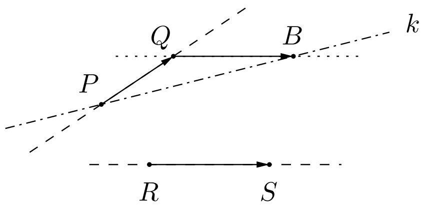

Abbildung VI-35: Geometrische Konstruktion des Beweises - IV

$K = \overline{PB} \subseteq \mathbf{L}$, **da** $P, B \in \mathbf{L}$ **und** $\overrightarrow{PB} = u + v$
Noch zu Zeigen: $\lambda \cdot u \in \mathbf{T}(\mathbf{L})$

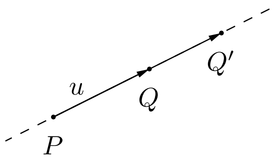

Abbildung VI-36: Geometrische Zusatzskonstruktion des Beweises

$\overrightarrow{PQ'} = \lambda \cdot u$, **da** $\overline{PQ} \in \mathbf{L}$ folgt $Q' \in \mathbf{L}$, **d.h.** $\lambda \cdot u = \overrightarrow{PQ'} \in \mathbf{T}(\mathbf{L})$.
Wähle $P \in \mathbf{L}$. **Dann gilt für beliebeige** $Q \in \mathbf{L}$:
$Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$. **Damit** $\mathbf{L} \subseteq P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$

Umkehrung: $u = \overrightarrow{RS}$, $R, S \in \mathbf{L}$
Zu Zeigen: $P + u \in \mathbf{L}$

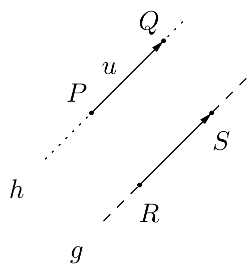

Abbildung VI-37: Geometrische Konstruktion zu $\mathbf{L} = P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$

$h \subseteq \mathbf{L}$, $Q = P + u \in h \subseteq \mathbf{L}$
Insgesamt: $\mathbf{L} \subseteq P + \mathbf{T}(\mathbf{L}) \subseteq \mathbf{L}$ **also** $\mathbf{L} = P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$
$(ii) \quad \Rightarrow \quad (iii)$**: klar.**
$(iii) \quad \Rightarrow \quad (iv)$**: Nach Vorraussetzung gilt:** $\mathbf{L} = R + U$.
Wahle $(v_1, \ldots, v_{n-r})$ **Basis von** $U^\perp$. **Setze** $A = \begin{pmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow v_{n-r} \rightarrow \end{pmatrix}$.
Dann:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{L} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle v_1, x^\perp \right\rangle = \ldots = \left\langle v_{n-r}, x^\perp \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot x^\perp \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{L} \quad &\Leftrightarrow \quad x - R \in U \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot (x - R)^\perp = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot x^\perp = A \cdot R^\perp =: b \end{aligned}$$

Sogar: $m = n - \mathbf{dim}(U)$
$(iv) \quad \Rightarrow \quad (i)$**:** $\mathbf{L} = \mathbb{L}(A, b) = x_0 + \mathbb{L}(A, 0) = x_0 + U, \quad U < \mathbb{K}^n$
Nachweis der Eigenschaften eines affinen Unterraumes:

(i) $P = x_o + u_1$, $Q = x_0 + u_2$**:**
$\overline{PQ} = P + \mathbb{K} \cdot \overrightarrow{PQ} = x_0 + \underbrace{u_1 + \mathbb{K} \cdot (u_2 - u_1)}_{\subseteq U} \subseteq x_0 + U = \mathbf{L}$

(ii) g **Gerade in L:** $g = P + \mathbb{K} \cdot u, \quad u \in U$.
Sei $Q \notin g$, $Q \in \mathbf{L}$, **dann ist die Parallele** h **zu** g**, durch** Q**, zu Zeigen.**
Es ist $h = Q + \mathbb{K} \cdot u = x_0 + \underbrace{u_1 \cdot \mathbb{K} \cdot u}_{\subseteq U} \subseteq \mathbf{L}$

<u>**Bedeutung von (ii)**</u>**:** **L affiner Unterraum,** $\mathbf{L} = R + U \quad \Rightarrow \quad U$ **eindeutig und zwar** $U = \mathbf{T}(\mathbf{L})$ **(Translationsvektorraum zu L)**

6.3.12 Definition (VI.3.d): Dimension affiner Unterräume

Sei L affiner Unterraum:

$$\mathbf{dim}\,(\mathbf{L}) \quad := \quad \mathbf{dim}\,(\mathbf{T}\,(\mathbf{L}))$$

denn: $\mathbf{dim}\,(\mathbb{A}^n) = n, \quad \mathbf{T}\,(\mathbf{L}) = \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{dim}\,(\mathbf{Gerade}) = 1$

6.3.13 Definition (VI.3.e): Hyperebene

Die $(n-1)$-dimensionalen affinen Unterräume des $\mathbb{A}^n$ heißen Hyperebenen.

$n = 2$**: Hyperebene $\hat{=}$ Gerade**

$n = 3$**: Hyperebene $\hat{=}$ Ebene**

Beschreibung von Hyperebenen

6.3.14 Satz (VI.3.3): Eindeutigkeit der Hyperebene

Gegeben seien $P_0, \ldots, P_{n-1} \in \mathbb{A}^n$ mit der Eigenschaft, daß $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}}$ linear unabhängig sind.

Dann gibt es genau eine Hyperebene H durch $P_0, \ldots, P_{n-1}$ und sie wird, auf folgende äquivalente Weisen, beschrieben:

(i) Parameterdarstellung:

$$\mathbf{H} = P_0 + \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right\rangle$$

(ii) Gleichungsdarstellung:

$$P \in \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & \leftarrow & P & \rightarrow \\ 1 & \leftarrow & P_0 & \rightarrow \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & \leftarrow & P_{n-1} & \rightarrow \end{vmatrix} = 0$$

Im $\mathbb{R}^3$: $P_i = (x_i, y_i, z_i)$**,** $P = (x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Beweis</u>:

<u>Zu (i)</u>: Selbst oder nie!

Zu (ii)**:**

$$P \in \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P_1} \in \underbrace{\left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right\rangle}_{n-1\ \textbf{Vektoren}} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{det} \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_0P} \\ \overrightarrow{P_0P_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} P - P_0 \\ P_1 - P_0 \\ \vdots \\ P_{n-1} - P_0 \end{vmatrix}}_{n \times n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & P_0 \\ 0 & P - P_0 \\ 0 & P_1 - P_0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & P_{n-1} - P_0 \end{vmatrix}}_{(n+1) \times (n+1)} = 0$$

Laplace-Rückwärts angewandt liefert:

$$\begin{vmatrix} 1 & P_0 \\ 1 & P \\ 1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & P \\ 1 & P_0 \\ 1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{vmatrix} 1 & P \\ 1 & P_0 \\ 1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Bemerkung zu $(*)$**: Vertauschung liefert** (-1)**, aber** $(-1) \cdot 0 = 0$**.**

6.3.15 Bemerkung: Deutung von (ii) als "Hessesche Normalform"

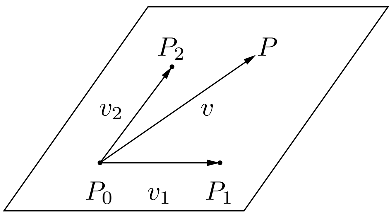

Abbildung VI-38: $\mathbf{H}$: Hier $\mathbb{R}^3$

Seien $v := \overrightarrow{P_0P}$, $v_i = \overrightarrow{P_0P_i}$, $i = 1, \ldots, n-1 \quad v = (a_1, \ldots, a_n)$ **und** $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$
Für die Determinate gilt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \overset{(\#)}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \widehat{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \widehat{a_{n-1,i}} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$
$$= \langle (a_1, \ldots, a_n), (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \rangle$$

wobei die $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ **aus den** $P_0, \ldots, P_{n-1}$ **berechenbar sind.**
Bemerkung zu $(\#)$**: Lapace-Entwicklung nach der** 1**. Zeile.**
Damit folgt: $P \in \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{P_0P}, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \right\rangle = 0$

Interpretation von $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$**:**

<u>Behauptung</u>: $\mathbb{K} \cdot (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right\rangle^\perp$

Damit: $\left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right\rangle \perp \mathbf{T}\,(\mathbf{L})$

<u>Beweis</u>: $0 = \langle v_i, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \rangle$**, denn**

$$\langle v_i, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \rangle = \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

da zwei Zeilen identisch sind.

<u>Hessesche Normalform</u>: Situation wie in $(\mathbf{VI}.3.3)$

$n = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ **wie oben, dann gilt:**

$$\begin{aligned} P \in \mathbf{H} &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{P_0P}, n \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle P, n \rangle = \langle P_0, n \rangle \end{aligned}$$

unter Umständen ist $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$**:** $n \to \frac{1}{\|n\|} n$ **(normierte Hessesche Normalenform)**