Lineare Algebra I-II

Scriptum nach einer Vorlesung von Professor Becker

Universität Dortmund - WS 2000 & SS 2001

Letzte Änderung: 27. Juli 2001

Gesetzt mit LaTeX und LyX

Webseite

Das Skriptum ist auf `fsmath.mathematik.uni-dortmund.de/script` **erhältlich.**

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I: Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$ - eine Einführung

Kapitel II: Algebraische Strukturen

Kapitel III: Lineare Abbildungen und Matrizen

Kapitel IV: Normalenform und Eigenwerttheorie

Kapitel V: Bilineare Räume

Kapitel VI: Analytische Geometrie

Kapitel I: Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$ - eine Einführung

1.1 Kapitel (I.1): Definitionen

Charakter dieser Einführung:

- **Rückgriff auf Kenntnisse aus der Schule**
- **Weiterführung auf den $\mathbb{R}^n$, Ausblicke**
- **Beispiele für spätere Definitionen**
- **noch keine Systematik**

1.1.1 Ziele

In diesem Abschnitt wollen wir den $\mathbb{R}^n$ einmal als Punktmenge und einmal als Vektorraum definieren.

1.1.2 Vorbereitung: Mengenbegriff nach Cantor

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlverschiedenen Objekten (genannt "Elemente") unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.
Notation für Mengen: Große Buchstaben, oft $M, N, \ldots$.
Lies "$a \in M$" als "a ist Element von M".
Lies "$M \ni a$" als "M enthält a".
Beispiele für Mengen:

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{a\}, \phi$$

Der Menge ϕ kommt eine Sonderrolle zu, es handelt sich um die leere Menge. Die leere Menge enthält offensichtlich keine Elemente.
Schreibweise:

$$\{x \in M | x \text{ hat Eigenschaft}\}$$

Hier nun ein Beispiel für die Schreibweise:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$$

1.1.3 Definition (I.1.a): Teilmenge

M **ist Teilmenge von** N **wenn für jedes** $m \in M$ **gilt:** $m \in N$**.**
Schreibweise: $M \subseteq N$**oder**$M \subset N$
Falls $M \neq N$ **ist wird auch folgende Schreibweise benutzt:** $M \subsetneqq N$

Der $\mathbb{R}^n$ als Punktmenge

1.1.4 Für $n = 1$: $\mathbb{R}^1$ - die Zahlengerade

Die üblichen Rechengesetze (Addition, Multiplikation, etc.) gelten. Zum Beispiel das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Diese Operationen sind allerdings noch nicht für die Punktmenge definiert. Diese Definitionen kommen erst später.

Wir können uns den $\mathbb{R}^1$ geometrisch als Zahlenstrahl veranschaulichen:

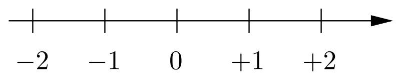

Abbildung I-1: Die geometrische Veranschaulichung des $\mathbb{R}^1$

1.1.5 Für $n = 2$: $\mathbb{R}^2$ - die Ebene

Wir können uns den $\mathbb{R}^2$ geometrisch als Ebene veranschaulichen:

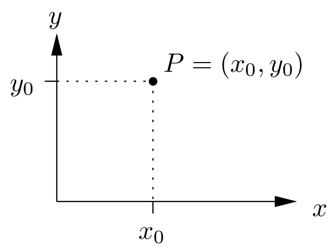

Abbildung I-2: Die geometrische Veranschaulichung des $\mathbb{R}^2$

Der $\mathbb{R}^2$ ist definiert als $\mathbb{R}^2 = \{\,(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dabei wird (x, y) als Paar bezeichnet.

1.1.6 Für $n = 3$: $\mathbb{R}^3$ - der Raum

Wir können uns den $\mathbb{R}^3$ geometrisch als Raum veranschaulichen:

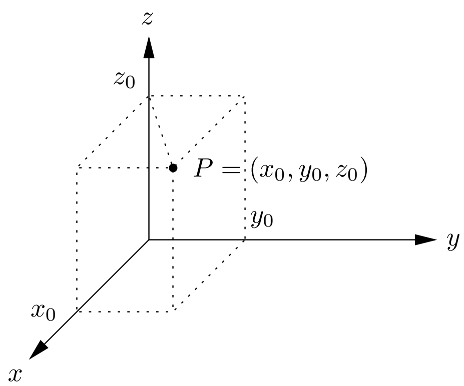

Abbildung I-3: Die geometrische Veranschaulichung des $\mathbb{R}^3$

Der $\mathbb{R}^3$ ist definiert als $\mathbb{R}^3 = \{\,(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$, (x, y, z) wird als Tripel bezeichnet.

1.1.7 Definition (I.1.b): $\mathbb{R}^n$

Der $\mathbb{R}^n$ ist definiert als:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **wird als n-Tupel bezeichnet. (manchmal auch als geordnetes n-Tupel). Zwei n-Tupel sind gleich wenn gilt:**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$$

Lies ":$\Leftrightarrow$" als "per Definitionem" oder "genau dann wenn".

1.1.8 Motivation für die Einführung des $\mathbb{R}^n$

- $n = 1, 2, 3$**: Gerade, Ebene und Raum (aus der Anschauung heraus).**
- $n = 4$**: Raum-Zeit-Kontinuum in der Physik.**
- n **beliebig: siehe Beispiele weiter unten**

1.1.9 Beispiele für die Nutzung des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$

1. Beispiel: Lager mit n Artikeln $A_1 \ldots A_n$. x_i sei die Maßeinheit des Artikels A_i auf Lager. Die möglichen Lagerzustände können nun folgendermaßen aussehen:

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{10} \,\middle|\, 0 \leq x_i \leq 150 \text{ **für** } i = 1, 2, \ldots, 6 \text{ **oder** } 0 \leq x_i \leq 60 \text{ **für** } i = 7, 8, \ldots, 10\right\}$$

2. Beispiel: Lineare Gleichungssysteme: Es sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 + x_8 &=& 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &=& 0 \end{array} \right.$$

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(*)$ gilt nun allgemein:

$$\mathbb{L} = \left\{(x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \,\middle|\, (x_1, \ldots, x_8) \textbf{ erfüllt } (*)\right\}$$

Es ist relativ einfach zu sehen, daß $\mathbb{L} \neq \phi$, da triviale Lösungen wie $x_1, \ldots, x_7 = 0$ und $x_8 = 1$ existieren.
Subtrahieren wir nun die beiden Gleichungen voneinander, so erhalten wir:

$$x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 + x_8 = 1$$

Lösen wir die Gleichung nach x_2 auf, so erhalten wir:

$$x_2 = -4x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_7 - x_8 + 1$$

Laut der zweiten Gleichung von $(*)$ gilt:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Setzen wir nun x_2 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= -(-4x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 - x_7 - x_8 + 1) + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 + x_8 - 1 + x_3 + x_4 + x_5 \\ &= 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 + x_7 + x_8 - 1 \end{aligned}$$

Somit ist $(x_1,\dots,x_8)$ Lösung von $(*)$. Es gilt:

$$(**)\begin{cases} x_1 &= 5x_3+3x_4+3x_5-x_6+x_7+x_8-1\\ x_2 &= -4x_3-2x_4-2x_5+x_6-x_7-x_8+1\end{cases}$$

Umgekehrt: Sind $x_3,\dots,x_8$ beliebig gewählte reelle Zahlen und berechnet man x_1 und x_2 gemäß $(**)$, so ist $(x_1,\dots,x_8)$ eine Lösung von $(*)$.
Beweis: Einsetzen und ausrechnen.
Also gilt für die Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}\mathbb{L} \;=\; &\{(x_1=5x_3+3x_4+3x_5-x_6+x_7+x_8-1,\\ &x_2=-4x_3-2x_4-2x_5+x_6-x_7-x_8+1,\\ &x_3,\dots,x_8)\in\mathbb{R}^8\}\end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft von $\mathbb{L}$:$\mathbb{L}\subseteq\mathbb{R}^8$
Allgemeines Gleichungssystem aus m Gleichungen und n Unbekannten:

$$(***)\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\end{cases}$$

$a_{ij},b_i\in\mathbb{R}$ mit $i=1\dots m$ und $j=1\dots n$.
Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt im allgemeinen:

$$\mathbb{L}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,(x_1,\dots,x_n)\quad\textbf{erfüllt}\quad(***)\}$$

Zudem gilt allgemein: $\mathbb{L}\subseteq\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ als Vektorraum

Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind Addition und skalare Multiplikation definiert.

1.1.10 Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^1$

Addition im $\mathbb{R}^1$:

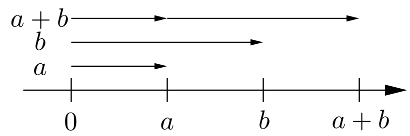

Abbildung I-4: Addition im $\mathbb{R}^1$

Multiplikation im $\mathbb{R}^1$:

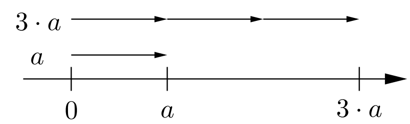

Abbildung I-5: Multiplikation im $\mathbb{R}^1$

Die Addition erfolgt mittels gerichteten Strecken. Die Multiplikation läßt sich auf die Addition von gerichteten Strecken zurückführen. Für die Addition und Multiplikation gelten die üblichen Rechengesetze.

1.1.11 Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2$

Ein Vektor ist eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{PQ}$ für $P, Q \in \mathbb{R}^2$

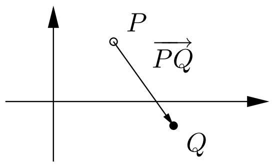

Abbildung I-6: Ein Vektor im $\mathbb{R}^2$

Wichtig: Vektoren haben eine Richtung und eine Länge.
Fundamental: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} :\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ haben die gleiche Richtung und Länge.
Behauptung: Seien $P = (a_1, b_1), Q = (a_2, b_2), R = (c_1, d_1), S = (c_2, d_2) \in \mathbb{R}^2$ dann gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \quad \Leftrightarrow \quad (a_2 - a_1, b_2 - b_1) = (c_2 - c_1, d_2 - d_1)$$

Wir wollen nun obige Behauptung beweisen. Da es sich um eine Äquivalenz handelt beweisen wir erst von links nach rechts und dann von rechts nach links.
"⇒": Zuerst fertigen wir eine Skizze an:

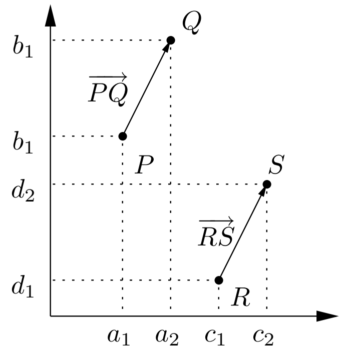

Abbildung I-7: Skizze der Vektoren

Nun ergänzen wir die Vektoren zu rechtwinkligen Dreiecken und benennen die neuen Eckpunkte:

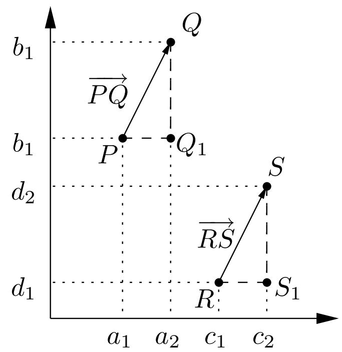

Abbildung I-8: Skizze nach Ergänzung der Vektoren zu Dreiecken

Durch Parallelverschiebung ergibt sich: $\triangle PQQ_1 \overset{PV}{\rightarrow} \triangle RSS_1$

Damit sind die Längen von $\overline{PQ}$ **und** $\overline{RS}$ **identisch.**

Zudem gilt: $\overline{PQ_1} = a_2 - a_1$ **und** $\overline{RS_1} = c_2 - c_1$

Setzen wir ein, so erhalten wir: $a_2 - a_1 = c_2 - c_1$**.**

Analog wird für $b_2 - b_1 = d_2 - d_1$ **verfahren.**

"⇐": $a_2 - a_1 = c_2 - c_1$**und**$b_2 - b_1 = d_2 - d_1$**. Betrachte wieder Dreiecke:** $\triangle PQQ_1$ **und** $\triangle RSS_1$**. Nach Voraussetzung gilt:** $\overline{PQ_1}$ **und** $\overline{RS_1}$ **sind gleich lang, sowie** $\overline{QQ_1}$ **und** $\overline{SS_1}$ **sind auch gleich lang. Zudem sind die von** $\overline{PQ_1}$ **und** $\overline{QQ_1}$ **beziehungsweise** $\overline{RS_1}$ **und** $\overline{SS_1}$ **eingeschlossenen Winkel gleich groß** (90^0)**. Also gilt nach Pythagoras:** $\overline{PQ}$ **hat die gleiche Länge wie** $\overline{RS}$**. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt:** $\overline{PQ}$ **und** $\overline{RS}$ **haben die gleiche Orientierung. Also:** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$**.** $\square$

Bisheriges Ergebnis: Die Vektoren in der Ebene lassen sich durch die Elemente des $\mathbb{R}^2$ **beschreiben. Wir schreiben** $x = (a, b)$**. In unserem Beispiel** $\overrightarrow{PQ} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$

1.1.12 Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ **sind gerichtete Strecken zwischen zwei Punkten. Zwei Vektoren sind gleich, falls deren Länge und Richtung identisch ist.**

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ **lassen sich durch Elemente des** $\mathbb{R}^2$ **beschreiben:**

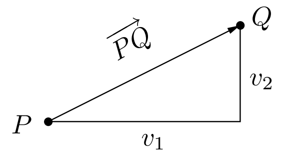

Abbildung I-9: Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Für $\overrightarrow{PQ}$ **gilt:** $\overrightarrow{PQ} = (v_1, v_2)$

Interpretation von Vektoraddition und skalarer Multiplikation

Addition:

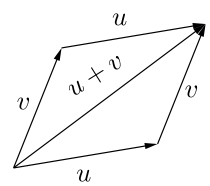

Abbildung I-10: Kommutativität der Vektoraddition

Vektoraddition mittels Addition der Komponenten:

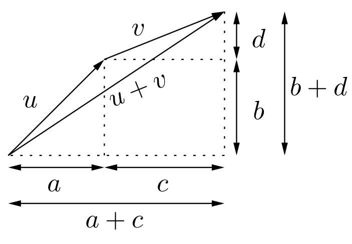

Abbildung I-11: komponentenweise Addition von Vektoren

Es sei $u = (a, b)$**,** $v = (c, d)$**. Es gilt:** $u + v = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
Skalare Multiplikation $\lambda \cdot u$ **mit** $\lambda \in \mathbb{R}$**.**
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

- $\lambda \geq 0$ **:** λu **hat dieselbe Orientierung wie** u **und hat die Länge ist** λ**·Länge von** u**.**
- $\lambda < 0$ **:** λu **hat die entgegengesetzte Orientierung von** u **und hat die Länge** $|\lambda|$ **·Länge** u**.**

Sei $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$**,** $\lambda \in \mathbb{R}$**.**
Behauptung: $\lambda \cdot u = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)$**.**
Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:
1.Fall: Strahlensätze oder Trigonometrie verwenden:

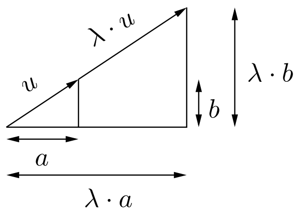

Abbildung I-12: Strahlensatz für $\lambda > 0$

2. Fall: Strahlensätze oder Trigonometrie verwenden:

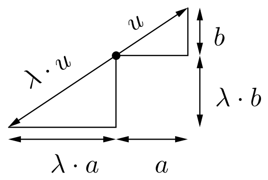

Abbildung I-13: Strahlensatz für $\lambda < 0$

1.1.13 Definition (I.1.c): Der n-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^n$

- **Der** n**-dimensionale Vektorraum über** $\mathbb{R}$ **ist der** $\mathbb{R}^n$ **versehen mit der Addition und der skalaren Multiplikation.**
- **Addition:** $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$**.**
- **Skalare Multiplikation:** $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ **.**
Betrachtet man den $\mathbb{R}^n$ **zusammen mit diesen Operatoren (= Verknüpfungen), so nennt man die Elemente des** $\mathbb{R}^n$ **auch Vektoren.**
Bemerkungen:

- $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$
  - **als** n**-dimensionaler Punktraum in Verallgemeinerung von Zahlengrade, Ebene und Raum.**
  - **als Raum von Vektoren.**
- **Verwendung von "+" und "·" in der Definition nicht einheitlich.**

1.1.14 Rechenregeln für Addition und skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^n$

Es gilt:

- **Assoziativität der Addition:** $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ **gilt:**

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

- **Neutrales Element: Für den Nullvektor** $0 := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ **und für jedes** $v \in \mathbb{R}^n$ **gilt:**

$$0+v = v+0 = v$$

- **Inverses Element: Für alle** $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ **und sein Inverses** $-v = (-v_1, \ldots, -v_n) \in \mathbb{R}^n$ **gilt:**

$$v+(-v) = (-v)+v = 0$$

- **Kommutativität: Für alle** $v, w \in \mathbb{R}^n$ **gilt:**

$$v+w = w+v$$

- **DistributivitätFür alle** $v, w \in \mathbb{R}^n$ **und** λ, μ **gilt:**

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot v &= \lambda\cdot v+\mu\cdot v\\ \lambda\cdot(v+w) &= \lambda\cdot v+\lambda\cdot w\end{aligned}$$

- **Assoziativität der Multiplikation:**

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(\mu\cdot v) &= (\lambda\cdot\mu)\cdot v\\ 1\cdot v &= v\end{aligned}$$

Beweise: hier kein Durchführung, dem interessierten Studenten überlassen.

Wichtige Notationen: $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$**:** $v - w := v + (-w)$
Geometrisch sieht die Subtraktion folgendermaßen aus:

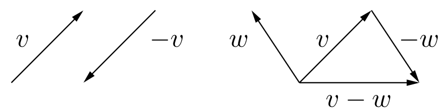

Abbildung I-14: Vektor und sein inverser Vektor. Subtraktion zweier Vektoren

1.2 Kapitel (I.2): Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^n$

1.2.1 geometrische Konstruktion einer Geraden

Die geometrische Konstruktion einer Geraden:

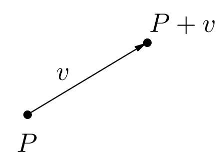

Abbildung I-15: geometrische Konstruktion einer Geraden

Analytisch: $P + (x_1, \dots, x_n)$.
Idee für eine Gerade $v \neq 0$**:** $g_{P;v}$

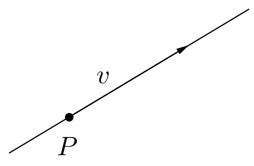

Abbildung I-16: Idee für eine Gerade

Die Schreibweise $g_{P;v}$ **beschreibt eine Gerade durch den Punkt** P **mit dem Richtungsvektor** v**.**
Liegt nun ein Punkt Q **auf der Geraden, so gilt:**

$$Q \in g_{P;v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot v$$

Für P **und** Q **soll gelten:**

$$\begin{aligned} P &= \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right) \\ Q &= (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Nun gilt für $\overrightarrow{PQ}$**:**

$$\overrightarrow{PQ} = \left(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0\right)$$

Zudem gilt für den Richtungsvektor v **der Geraden:**

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

Damit ergibt sich für die Gerade $g_{P;v}$ **folgende Definition:**

$$\begin{aligned} g_{P;v} &= \left\{ \left(x_1^0 + \lambda \cdot x_1, \dots, x_n^0 + \lambda \cdot x_n\right) \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ P + \lambda \cdot v \, | \, \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= P + \mathbb{R}\, v \end{aligned}$$

1.2.2 Satz (I.2.1)

Durch je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$ geht genau eine Gerade.
Wir wollen nun diesen Satz beweisen. Wir werden folgendermaßen vorgehen:

- **zuerst weisen wir die Existenz nach.**
- **anschließend zeigen wir die Eindeutigkeit.**

<u>Existenz der Gerade</u>: Wie betrachten die Gerade $g_{P;\overrightarrow{PQ}}$. Es gilt:

- **$g_{P;\overrightarrow{PQ}} \ni P$ für $\lambda = 0$, da P der Ortsvektor der Geraden ist.**
- **$g_{P;\overrightarrow{PQ}} \ni Q$ für $\lambda = 1$, da $\overrightarrow{PQ}$ der Richtungsvektor der Geraden ist; und die Summe des Ortsvektor zu P und des Richtungsvektors $\overrightarrow{PQ}$ den Vektor zu Q ergibt.**

<u>Eindeutigkeit der Geraden</u>: Angenommen es gibt eine weitere Gerade $g_{R;v} \neq g_{P;\overrightarrow{PQ}}$ mit $P, Q \in g_{R;v}$. Also gibt es $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 \neq \mu_0$. Da $P, Q \in g_{R;v}$ sind muß für diese beiden Punkte gelten: $P = R + \lambda_0 \cdot v$, $Q = R + \mu_0 \cdot v$. Bilden wir nun die Differenz der beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} P - Q &= R + \lambda_0 \cdot v - [R + \mu_0 \cdot v] \\ P - Q &= R - R + \lambda_0 \cdot v - \mu_0 \cdot v \\ P - Q &= \lambda_0 \cdot v - \mu_0 \cdot v \\ P - Q &= (\lambda_0 - \mu_0) \cdot v \end{aligned}$$

Nun ist laut Voraussetzung $\lambda_0 \neq \mu_0$. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach v auflösen:

$$v = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} \cdot (P - Q)$$

Eine äquivalente Schreibweise für $P - Q$ ist nun $\overrightarrow{QP}$. Zudem gilt: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$. Wir setzen ein und erhalten für v:

$$v = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} \cdot \overrightarrow{QP} = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} \cdot \left(-\overrightarrow{PQ}\right) = \frac{1}{-(\lambda_0 - \mu_0)} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

v ist also von $\overrightarrow{PQ}$ linear abhängig. Also sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden gleich. Nun müssen wir noch nachweisen, daß die beiden Geraden mindestens einen Punkt gemeinsam haben (Damit haben die beiden Geraden natürlich alle Punkte gemeinsam und sind identisch).
Weiter gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$R + \lambda \cdot v = R + \lambda \cdot v + 0 = R + \lambda \cdot v + \underbrace{\lambda_0 \cdot v - \lambda_0 \cdot v}_{=0} = R + \lambda_0 \cdot v + (\lambda - \lambda_0) \cdot v$$

Nun gilt für P laut Voraussetzung: $R + \lambda_0 \cdot v = P$
Wir setzen ein und erhalten: $R + \lambda \cdot v = P + (\lambda - \lambda_0) \cdot v$
Nun setzen wir noch unser Ergebnis für v ein und es ergibt sich:

$$R + \lambda \cdot v = P + (\lambda - \lambda_0) \cdot \left[\frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \cdot \overrightarrow{PQ}\right] = P + \frac{\lambda - \lambda_0}{\mu_0 - \lambda_0} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Also: $g_{R;v} = g_{P;\overrightarrow{PQ}}$. Wir erhalten also einen Widerspruch zu den Voraussetzungen. Die beiden Geraden $g_{R;v}$ und $g_{P;\overrightarrow{PQ}}$ sind identisch.

1.2.3 Satz (I.2.2): Eindeutige Beschreibung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$: $ax + b = c$

Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist g Gerade genau dann wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt mit:

- $(a, b) \neq (0, 0)$
- $g = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = c \}$

Genau dann wenn impliziert, daß wir beide Richtungen beweisen müssen.
Beweis: "$\Rightarrow$"
g **sei Gerade. Sei** $g = g_{P;v}$. **Wie finden wir nun** a, b, c? **Ansatz: Notwendige Bedingung ableiten. Alle Punkte von** g **sollen die Gleichung** $ax + by = c$ **erfüllen. Für** P **und** v **gilt:**$P = (p_1, p_2)$, $v = (v_1, v_2)$
Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ **gilt:** $ax + by = c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (p_1 + \lambda \cdot v_1) + b \cdot (p_2 + \lambda \cdot v_2) = c$
Wählen wir $\lambda = 0$ **so ergibt sich:**

$$a \cdot (p_1 + 0 \cdot v_1) + b \cdot (p_2 + 0 \cdot v_2) = c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \quad (*)$$

Wählen wir $\lambda = 1$ **so ergibt sich:**

$$a \cdot (p_1 + 1 \cdot v_1) + b \cdot (p_2 + 1 \cdot v_2) = c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot p_1 + a \cdot v_1 + b \cdot p_2 + b \cdot v_2 = c \quad (**)$$

Nun bilden wir die Differenz von $(**)$ **und** $(*)$:

$$a \cdot p_1 + a \cdot v_1 + b \cdot p_2 + b \cdot v_2 - [a \cdot p_1 + b \cdot p_2] = c - c \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0$$

Nun müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen:
1. Fall: $v_1 = 0, v_2 \neq 0$
Situation: Der Richtungsvektor v **der Geraden ist in diesem Fall:**

$$v = (0, v_2)$$

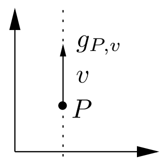

Abbildung I-17: Richtungsvektor $v = (0, v_2)$

Das heißt, für alle $Q = (x, y)$ **gilt:**

$$Q \in g \quad \Leftrightarrow \quad Q = (p_1 + \lambda \cdot 0, p_2 + \lambda \cdot v_2) = (p_1, p_2 + \lambda \cdot v_2) \quad \Leftrightarrow \quad x = p_1$$

Es ergibt sich eine Gleichung der Form $ax + by = c$ **mit** $a = 1$, $b = 0$, $c = p_1$.
Also: $1 \cdot x + 0 \cdot y = p_1 \quad \Leftrightarrow \quad x = p_1$
2. Fall: $v_1 \neq 0$
Zuerst noch einmal die aus den notwendigen Bedingungen abgeleiteten Gleichungen:

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \qquad a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0$$

Nun nehmen wir die zweite Gleichung und teilen durch v_1, **da** $v_1 \neq 0$ **laut Voraussetzung:**

$$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 = -b \cdot v_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

Jetzt setzen wir das Ergebnis in die erste Gleichung ein:

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \left[-b \cdot \frac{v_2}{v_1}\right] \cdot p_1 + b \cdot p_2 = c \quad \Leftrightarrow \quad -b \cdot p_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} + b \cdot p_2 = c$$

Anschließend wählen wir $b := v_1$. Es ergibt sich: $a = -v_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} = -v_2$
Nun nehmen wir die erste Gleichung der notwendigen Bedingungen und es ergibt sich für c:

$$c = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2$$

Bisher haben wir herausgefunden: $(x, y) \in g \quad \Rightarrow \quad ax + by = c$ **existiert.**
Umkehrung: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $ax + by = c$. Nun setzen wir a, b und c ein und es gilt:

$$-v_2 \cdot x + v_1 \cdot y \quad = \quad -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2$$

Nun lösen wir nach y auf und erhalten:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot y &= -v_2 \cdot p_1 + v_1 \cdot p_2 + v_2 \cdot x \\ y &= -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + \frac{v_1}{v_1} \cdot p_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x \\ y &= -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + p_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x \qquad (***) \end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, daß der Punkt P auf der Geraden g liegt:

$$(x, y) - (p_1, p_2) \quad = \quad (x - p_1, y - p_2)$$

Nun setzen wir y aus $(***)$ ein und es gilt:

$$\begin{aligned} (x - p_1, y - p_2) &= \left(x - p_1, -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + p_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x - p_2\right) \\ &= \left(x - p_1, -\frac{v_2}{v_1} \cdot p_1 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x\right) = \left(x - p_1, \frac{v_2}{v_1} \cdot (-p_1 + x)\right) \\ &= \left(x - p_1, \frac{v_2}{v_1} \cdot (x - p_1)\right) = \left(v_1 \cdot \frac{x - p_1}{v_1}, v_2 \cdot \frac{x - p_1}{v_1}\right) \\ &= \frac{x - p_1}{v_1} \cdot (v_1, v_2) \end{aligned}$$

Damit ist die Differenz eines beliebigen Punktes auf der Geraden g und eines Punktes P ein vielfaches des Richtungsvektors v der Geraden. Also liegt P auf der Geraden g.
“$\Leftarrow$”:
$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$ **mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Nun ist zu zeigen: g ist eine Gerade.**
Nun sei $b \neq 0$ oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit). (Wählen wir $a \neq 0$ müssen wir das folgende Argument umdrehen). Nun lösen wir nach y auf:

$$a \cdot x + b \cdot y = c \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot y = c - a \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x \qquad (A)$$

Sei (x_0, y_0) Lösung der Gleichung, dann gilt: $(x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$
Nun müssen y und y_0 die Gleichung (A) erfüllen. Es gilt: $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x$, $y_0 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_0$
Wir setzen ein und erhalten:

$$\begin{aligned} (x - x_0, y - y_0) &= \left(x - x_0, \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x - \left[\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_0\right]\right) = \left(x - x_0, \frac{c}{b} - \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x - x_0)\right) \\ &= \left(\frac{x - x_0}{b} \cdot b, -a \cdot \left(\frac{x - x_0}{b}\right)\right) = \frac{x - x_0}{b} \cdot (b, -a) \end{aligned}$$

Also ist $(x, y) \in g_{(x_0, y_0);(b, -a)}$, also eine Gerade.
Umgekehrt liefert $g_{(x_0, y_0);(b, -a)}$ wie im ersten Fall eine Gleichung und zwar $ax + by = c$
Hierzu setzen wir folgende Werte ein: $x_0 = p_1$, $y_0 = p_2$, $b = v_1$ **und** $-a = v_2$

1.2.4 Zusammenfassung: $\mathbb{R}^n$ als Punktmenge und Vektorraum

Es existieren zwei Interpretationen für dasselbe Symbol $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n : \begin{cases} \textbf{Punktemenge} \\ \textbf{Vektorraum: Vektoren}, +, \lambda \cdot v \end{cases}$$

Wir werden Vektoren nicht als $\vec{v}$ bezeichnen. Stattdessen:

- **Vektoren als kleine lateinische Buchstaben.**
- **Skalare als kleine griechische Buchstaben.**
- **Punkte als große lateinische Buchstaben**

Obige Notation gilt in der Regel. Wie immer wird es Ausnahmen geben.

1.2.5 An- beziehungsweise Abtragen von Vektoren

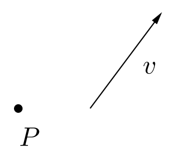

Abbildung I-18: Ein Punkt P und ein Vektor v

Um den Vektor v am Punkt P abzutragen verschieben wir ihn:

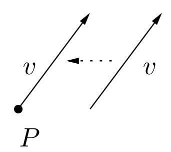

Abbildung I-19: Vektor v abgetragen am Punkt P

Formelmäßig:

$$\begin{aligned} P + v &= (p_1, \ldots, p_n) + (v_1, \ldots, v_n) \\ &= (p_1 + v_1, \ldots, p_n + v_n) \end{aligned}$$

P **ist ein Punkt,** v **ist ein Vektor,** $(p_1 + v_1, \ldots, p_n + v_n)$ **ist wiederum ein Punkt.**
Für den $\mathbb{R}^n$ ist auch folgende Schreibweise möglich:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese Variante wird auch als Spaltenraum bezeichnet. Der Spaltenraum hat dieselbe Bedeutung wie der Zeilenraum und ist nur eine schreibtechnische Variante.

1.2.6 Geraden im $\mathbb{R}^n$

Sei $v \neq 0$. Für die Gerade in der Parameterdastellung gilt:

$$g_{P;v} \quad = \quad \{P + \lambda \cdot v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} =: P + \mathbb{R}\, v$$

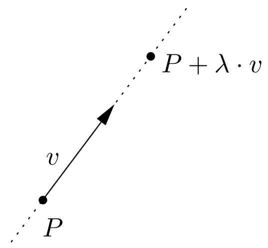

Abbildung I-20: Eine Gerade im $\mathbb{R}^n$

1.2.7 Satz (I.2.3): Durch P, Q, $P \neq Q$ geht genau eine Gerade.

<u>Beweis</u>: Analog zum Beweis von (I.2.5).

1.2.8 Satz (I.2.4)

$g \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Gerade genau dann, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$ gibt mit

$$g \quad = \quad \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, ax + by = c\right\}$$

Obige Geradengleichung wird als "Gleichungsform" bezeichnet.
<u>Beweis</u>: Analog zum Beweis von (I.2.6).

1.2.9 Anmerkung zur Notation von Mengen

$A \subseteq B$: Jedes $a \in A$ ist auch in B enthalten $\quad \Rightarrow \quad$ A ist eine Teilmenge von B.
$A \subset B$ hat zwei Bedeutungen: Teilmenge beziehungsweise echte Teilmenge: $A \subseteq B, A \neq B$
Aufgrund dieser Doppelbedeutung werden wir die Notation $A \subset B$ nicht verwenden. Für eine echte Teilmenge schreiben wir: $A \subsetneqq B$.

1.2.10 Ebenen im $\mathbb{R}^n$

Intuitiv: Eine Ebene benötigt zwei unabhängige Richtungsvektoren:

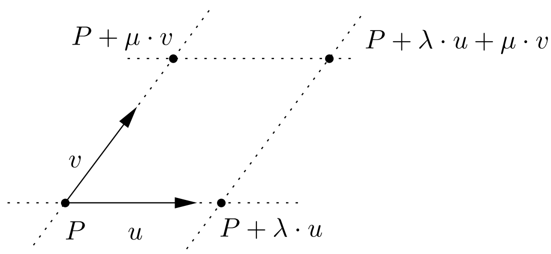

Abbildung I-21: Eine Ebene im $\mathbb{R}^n$

1.2.11 Definition (I.2.a): Ebene

Gegeben $P \in \mathbb{R}^n$, linear unabhängige Vektoren u, v. Dann heißt

$$E_{P;u,v} = \{P + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} = P + \mathbb{R}\, u + \mathbb{R}\, v$$

die Ebene welche durch u und v aufgespannt wird.

1.2.12 Definition (I.2.b): Die triviale Darstellung der Null

Die triviale Darstellung der Null lautet: $0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_k = 0$

1.2.13 Definiton (I.2.c): Begriff der linearen und nicht linearen Abhängigkeit

Begriff der linearen Abhängigkeit: $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn aus einer Relation $\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, k$ stets folgt: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
<u>1. Definition:</u> Gegeben $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. **u, v sind linear unabhängig (lin. unabh.) $:\Leftrightarrow u \neq 0, v \neq 0$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ gilt $v \neq \lambda \cdot u$.**
2. **Bessere Definition: u, v sind linear unabhängig $:\Leftrightarrow$ aus $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$ folgt stets $\alpha = \beta = 0$.**

Nun wollen wir die Äquivalenz dieser beiden Definitionen beweisen. Da wird die Äquivalenz zeigen wollen gehen wir folgendermaßen vor:

- **Aus 1. Definition $\Rightarrow$ 2. Definition. Aus 2. Definition $\Rightarrow$ 1. Definition.**
- **$\Rightarrow$ (1. Definition $\Leftrightarrow$ 2. Definition).**

"1. Definition $\Rightarrow$ 2. Definition":
Zu zeigen: sind Vektoren nach der 1. Definition linear unabhängig, so sind sie auch nach der 2. Definition linear unabhängig:
Seien u, v linear unabhängig gemäß 1. Definition, sei $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$. Zu zeigen: $\alpha = \beta = 0$.
Wir führen nun einen Beweis durch Widerspruch: Annahme: nicht $\alpha = \beta = 0$, also $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$.
Sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$. Daraus folgt:

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot u = -\beta \cdot v0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot v$$

Falls $\beta = 0$ folgt: $u = 0 \Rightarrow$ Widerspruch zur 1. Definition.
Falls $\beta \neq 0$ folgt: $u = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot v \Rightarrow$ Widerspruch zur 1. Definition.
Also bleibt der Fall $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Dann folgt: $\beta \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$
Situation: $v = 0$. $\Rightarrow$ Widerspruch zur 1. Definition.
"2. Definition $\Rightarrow$ 1. Definition": Selbst oder nie.
<u>2. Definition:</u> Gegeben: $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$. $u_1, \ldots, u_k$ heißen linear unabhängig, wenn aus (einer Relation) $\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$ stets folgt: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

3. Definition: $u_1, \ldots, u_k$ **sind linear abhängig** $\Leftrightarrow$ **es existieren** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$**, nicht alle** $\alpha_i = 0$ **mit**

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k \quad = \quad 0$$

(0 **ist nicht-trivial darstellbar als *L*inear*K*ombination von** $u_1, \ldots, u_k$**).**

$(*)$

$\Leftrightarrow$ **es gibt** i **mit** u_i **ist LK (Linearkombination) der Vektoren** $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k$**.**

Beweis von $(*)$**. Beweis der Äquivalenzaussage durch** $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$**.**

"$\Rightarrow$**":**

Nach Voraussetzung: $\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k = 0$ **und ein** $\alpha_i \neq 0$**. Nun gilt:**

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} + \alpha_i \cdot u_i + \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \ldots + \alpha_k \cdot u_k \\ a_i \cdot u_i &= -\alpha_1 \cdot u_1 - \ldots - \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} - \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} - \ldots - \alpha_k \cdot u_k \\ u_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot u_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot u_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot u_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \cdot u_k \end{aligned}$$

u_i **ist also eine LK der Vektoren** $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_k$**.** $\Rightarrow$ **Behauptung.**

"$\Leftarrow$**":**

Nach Voraussetzung gibt es u_i**, so daß** u_i **LK von** $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_k$**. Also:**

$$u_i \quad = \quad \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \ldots \alpha_k \cdot u_k$$

Addition von $(-u_i)$ **auf beiden Seiten ergibt:**

$$0 \quad = \quad \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot u_{i-1} + (-u_1) + \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \ldots \alpha_k \cdot u_k$$

Der Koeffizient $\alpha_i = -1 \neq 0$**. Das heißt: Null ist nicht trivial dargestellt.** $\Rightarrow$ **Behauptung.**

1.2.14 Beispiel: lineare Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Vektoren

Gegeben seien $u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 4), u_3 = (1, 5)$**.**

Fragen:

1. **Sind** u_1, u_3 **linear unabhängig?**
2. **Sind** u_1, u_2 **linear abhängig?**

zu 1) Sei $\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_3 = (0, 0)$**. Also:** $(\alpha, 2\alpha) + (\beta, 5\beta) = (0, 0)$**. Das heißt:**

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + 5\beta &= 0 \end{aligned}$$

Man hat die Lösungen dieses Gleichungssystems zu untersuchen. Die erste Gleichung liefert: $\alpha = -\beta$**. Einsetzen der Lösung der ersten Gleichung in die zweite Gleichung liefert:** $-2\beta + 5\beta = 0 \Rightarrow 3\beta = 0$**. Also folgt aus dem Gleichungssystem:** $\alpha = 0, \beta = 0$**. Das Gleichungssystem hat also nur die triviale Lösung. Damit sind** u_1, u_3 **linear unabhängig.**

zu 2) Es gilt: $\alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (2, 4) = (0, 0)$**. Dies ergibt folgendes Gleichungssystem:**

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 2\alpha + 4\beta &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nicht triviale Lösungen. Beispiel $\alpha = -2, \beta = 1$**.**

Nun wollen wir noch einmal Ebenen genauer betrachten:

$$E = E_{P;u,v} = P + \mathbb{R}\,u + \mathbb{R}\,v$$

Jetzt wollen wir wie in Satz (I.2.3) und (I.2.4) für die Gerade analoge Aussagen für die Ebene beweisen.

1.2.15 Satz (I.2.5)

Durch drei nicht kollineare Punkte gibt es genau eine Ebene.

1.2.16 Satz (I.2.6)

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ **ist Ebene genau dann, wenn es** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **gibt mit**

(i) $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

(ii) $E = \{\,(x, y, z)|\, ax + by + cz = d\}$

1.2.17 Satz (I.2.6)′

$g \subseteq \mathbb{R}^3$ **ist Gerade genau dann, wenn es** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **und** $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ **gibt mit:**

(i) $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ **und** $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$**.**

(ii) $g = \{\,(x, y, z)|\, ax + by + cz = d, a'x + b'y + c'z = d\}$

Wir werden Satz (I.2.6′) nicht beweisen. Eine Gerade im Raum wir durch zwei sich schneidende Ebenen definiert, die nicht parallel oder identisch sein dürfen.

1.2.18 Theorie zur linearen Unabhängigkeit von Basen

Vorbereitung: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$**. Die Determinante einer** 2×2**-Matrix ist definiert als:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Behauptung:

(i) $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ **sind linear unabhängig** $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$

(ii) $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ **sind linear unabhängig** $\Leftrightarrow$ $\exists i, j$ **mit** $i \neq j$**:**

$$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = a_i \cdot b_j - a_j \cdot b_i \neq 0$$

Beweis zu (i)**:**
"$\Leftarrow$"
Sei $\alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (c, d) = (0, 0)$ **Nun können wir folgendes Gleichungssystem aufstellen:**

$$\begin{aligned} I: \quad \alpha \cdot a + \beta \cdot c &= 0 \\ II: \quad \alpha \cdot b + \beta \cdot d &= 0 \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir I **mit** b **und** II **mit** a **und erhalten:**

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & 0 & |\cdot b \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & 0 & |\cdot a \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc & = & 0 & \\ \wedge & \alpha \cdot ab + \beta \cdot ad & = & 0 & \end{array}$$

Nun bilden wir die Differenz der beiden Gleichung:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \alpha\cdot ab+\beta\cdot bc-(\alpha\cdot ab+\beta\cdot ad) & = & 0-0 \\ \Leftrightarrow & \beta\cdot(bc-ad) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (-1)\cdot\beta\cdot(bc-ad) & = & (-1)\cdot 0 \\ \Leftrightarrow & \beta\cdot(ad-bc) & = & 0 \end{array}$$

Laut Voraussetzung ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \beta = 0.$

Für α **gehen wir nun analog vor:**
Nun multiplizieren wir I **mit** d **und** II **mit** c **und erhalten:**

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha\cdot a+\beta\cdot c & = & 0 & |\cdot d \\ II: & \alpha\cdot b+\beta\cdot d & = & 0 & |\cdot c \\ \Leftrightarrow & \alpha\cdot ad+\beta\cdot cd & = & 0 & \\ \wedge & \alpha\cdot bc+\beta\cdot cd & = & 0 & \end{array}$$

Nun bilden wir die Differenz der beiden Gleichung:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \alpha\cdot ad+\beta\cdot cd-(\alpha\cdot bc+\beta\cdot cd) & = & 0-0 \\ \Leftrightarrow & \alpha\cdot(ad-bc) & = & 0 \end{array}$$

Laut Voraussetzung ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0.$

Das Gleichungssystem hat nur eine triviale Lösung.
"$\Rightarrow$" (mittels Widerspruchbeweis)
Angenommen $a\cdot d-b\cdot c=0$**. Hieraus ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen zu zeigen.**
Nach der Voraussetzung gilt: $(a,b)\neq(0,0), (c,d)\neq(0,0)$**. Nun nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:**

- **Fall** $a\neq 0$**. Nun gilt für** d**:**

  $$a\cdot d-b\cdot c=0 \quad\Leftrightarrow\quad d=\frac{b}{a}\cdot c$$

  Nun setzen wir das d **in den Vektor** (c,d) **ein und erhalten:**

  $$(c,d)=\left(c,\frac{b}{a}\cdot c\right)=c\cdot\left(1,\frac{b}{a}\right)=\frac{c}{a}\cdot(a,b)$$

  Also sind die Vektoren linear abhängig. Widerspruch zur Voraussetzung.

- **Fall** $b\neq 0$**. Dito (Nach** c **auflösen).**

Beweis zu (ii)**:**
"$\Leftarrow$"
Gegeben sei $\alpha\cdot(a_1,\ldots,a_n)+\beta\cdot(b_1,\ldots,b_n)=0$**. Nun betrachten wir die** i**-te und** j**-te Position der Vektoren:**

$$\begin{array}{rcl} \alpha\cdot a_i+\beta\cdot b_i & = & 0 \\ \alpha\cdot a_j+\beta\cdot b_j & = & 0 \end{array}$$

Wir erhalten: $\alpha\cdot(a_i,a_j)+\beta\cdot(b_i,b_j)=0$
Nach (i) **gilt:** $\alpha=\beta=0$**.**
"$\Rightarrow$"
selbst, oder in den Übungen und Tutorien.

1.2.19 Beispiele für lineare Unabhängigkeit

Sei $i = 2, j = 10$. Also $\begin{vmatrix} a_2 & a_{10} \\ b_2 & b_{10} \end{vmatrix} \neq 0$

Insgesamt gibt es $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ **verschiedene** 2×2 **Determinanten.**

Beispiel: $\alpha_1 \cdot (1,2,3) + \alpha_2 \cdot (0,6,7) + \alpha_3 \cdot (6,1,4) = 0 = (0,0,0)$

Bemerkung: Aus dem Kontext heraus wird klar, daß mit der "0" ein Vektor gemeint ist.

Wir erhalten ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 6 \cdot \alpha_3 &= 0 \\ 2 \cdot \alpha_1 + 6 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 &= 0 \\ 3 \cdot \alpha_1 + 7 \cdot \alpha_2 + 4 \cdot \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Man hat nun das Gleichungssystem zu untersuchen; für lineare Unabhängigkeit ist zu zeigen, daß das Gleichungssystem nur eine triviale Lösung hat.

1.2.20 Definition (I.2.d): Basen im $\mathbb{R}^n$

Basen: u, v **Basen im** $\mathbb{R}^2 :\Leftrightarrow$

(i) u, v **sind linear unabhängig**

(ii) jedes $w \in \mathbb{R}^2$ **ist LK von** u, v**, das heißt es existieren** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **mit** $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$**.**

Beispiel: Seien $u = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ **und** $v = \mathbf{e}_2 = (0,1)$**.**

Für einen beliebigen Vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **gilt:** $(a,b) = a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}_2$**.**

Behauptung: Aus (i) **folgt** (ii)**.**

Gegeben: linear unabhängige Vektoren u, v **mit** $u = (a,b)$, $v = (c,d)$**. Zudem sei ein Vektor** w **gegeben mit** $w = (r,s)$**.**

Zu finden sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **mit** $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$ **gegeben.**

Das heißt: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a + \beta \cdot c &= r \\ \alpha \cdot b + \beta \cdot d &= s \end{aligned}$$

ist nach α, β **auflösbar unter der Voraussetzung, daß** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$**. Zuerst formen wir das Gleichungssystem um:**

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & r & |\cdot d \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & s & |\cdot c \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ad + \beta \cdot cd & = & rd & \\ \wedge & \alpha \cdot bc + \beta \cdot cd & = & sc & \end{array}$$

Nun subtrahieren wir die Gleichungen voneinander und erhalten:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \alpha \cdot ad + \beta \cdot cd - (\alpha \cdot bc + \beta \cdot cd) & = & rd - sc \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot (ad - bc) & = & rd - sc \end{array}$$

Nun schreiben wir die Terme als Determinanten um:

$$\alpha \cdot (ad - bc) = rd - sc \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ c & d \end{vmatrix}$$

Für α ergibt sich:$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} r & s \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$**, wobei laut Voraussetzung** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$**.**

Wir verfahren analog für β:

$$\begin{array}{rrcll} I: & \alpha \cdot a + \beta \cdot c & = & r & |\cdot b \\ II: & \alpha \cdot b + \beta \cdot d & = & s & |\cdot a \\ \Leftrightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc & = & br & \\ \wedge & \alpha \cdot ab + \beta \cdot ad & = & as & \end{array}$$

Nun subtrahieren wir die Gleichungen voneinander und erhalten:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \alpha \cdot ab + \beta \cdot bc - (\alpha \cdot ab + \beta \cdot ad) & = & br - as \\ \Leftrightarrow & \beta \cdot (bc - ad) & = & br - as \\ \Leftrightarrow & \beta \cdot (ad - bc) & = & as - br \end{array}$$

Nun schreiben wir die Terme als Determinanten um:

$$\Leftrightarrow \quad \beta \cdot (ad - bc) = as - br \quad \Leftrightarrow \quad \beta \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix}$$

Für β ergibt sich: $\beta = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$**, wobei laut Voraussetzung** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$**.**

Bisher: Gibt es eine Lösung α, β von $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$, so sind α, β eindeutig.
Durch nachrechnen ergibt sich, daß die angegebenen α, β die Lösung sind.
u, v, w **Basen im** $\mathbb{R}^3 :\Leftrightarrow$

(i) u, v, w **sind linear unabhängig**

(ii) jedes $z \in \mathbb{R}^3$ ist LK von u, v, w, das heißt es existieren $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$$

Beispiel: Seien $u = \mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $v = \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ und $w = \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$
Für einen beliebigen Vektor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ gilt: $(a,b,c) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3$.
Behauptung: Aus (i) folgt (ii) (Ohne Beweis $\Rightarrow$ später in allgemeiner Form).
Zusatz: $z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$, α, β, γ sind eindeutig.

1.2.21 Basisergänzung im $\mathbb{R}^3$

Seien u, v linear unabhängig, dann gibt es $w \in \mathbb{R}^3$, so daß u, v, w eine Basis bilden.
Beweis: Zur Verdeutlichung eine Illustration:

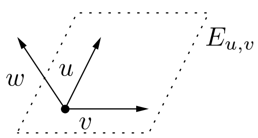

Abbildung I-22: u, v, w bilden eine Basis

Für w muß gelten: $w \notin E_{0;u,v}$.
Später werden wir noch systematisch an die Basisergänzung herangehen - dieses Beispiel ist nur ein Vorgeschmackt.

1.2.22 Beweis von Satz (I.2.5)

Zur Erinnerung: Durch 3 nicht kollineare Punkte P, Q, R geht genau eine Ebene E mit:

$$E = E_{P;\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}}$$

Beweis:

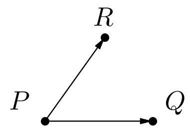

Abbildung I-23: P, Q, R sind nicht kollinear

P, Q, R sind nicht kollinear $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ sind linear unabhängig. Damit ist $E_{P;\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}}$ eine Ebene, die die Punkte P, Q, R enthält.

Die Eindeutigkeit der Ebene zeigt man ungefähr so wie bei der Gerade (Aufgabe auf Übungsblatt 3, Aufgabe 2).

1.2.23 Beweis von Satz (I.2.6)

Zur Erinnerung: Die Ebene ist in Gleichungsform gegeben durch:

$$ax + by + cz = d \quad \textbf{mit} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Beweis: Zuerst überführen wir die Gleichung in die Parameterdarstellung.

Da $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ laut Voraussetzung sei OE (*O*hne *E*inschränkung) $a \neq 0$. Lösen wir die Ebenengleichung nach x auf, so erhalten wir:

$$ax + by + cz = d \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z$$

Nun Setzen wir x für den Punkt $P = (x, y, z)$ ein. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= \left(\frac{d}{a} - \frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z, y, z\right) \\
&= \left(\frac{d}{a}, 0, 0\right) + y \cdot \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right) + z \cdot \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right) \\
&= \left(\frac{d}{a}, 0, 0\right) + \frac{y}{a} \cdot (-b, a, 0) + \frac{z}{a} \cdot (-c, 0, a)
\end{aligned}$$

y und z sind beliebig. Daher erfüllt P die Gleichung:

$$P \in E_{\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right);(-b, a, 0),(-c, 0, a)}$$

Notation: das Semikolon hinter dem Stützvektor trennt diesen von den Richtungsvektoren.

1.2.24 Wandlung der Parameterdarstellung einer Ebene in eine Gleichung

Es gibt mehrere Möglichkeiten:

- **Determinantengleichungen (später)**
- **Kreuzprodukt, Hesse Normalform ((I.3.2))**
- **unter Verwendung von Satz (I.2.6)**

Gegeben sei $E = E_{P;u,v}$ **und seien** u, v **linear unabhängig.**
Ergänze u, v **zu einer Basis im** $\mathbb{R}^3$**. Das heißt für jeden Vektor** z**:**

$$z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$$

Ist $Q \in E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$**, dann** $Q \in E \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_Q = 0$.
Sei $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$. **Nun gilt für** $\overrightarrow{PQ}$**:**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= Q - P \\ &= (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \\ &= (q_1 - p_1) \cdot e_1 + (q_2 - p_2) \cdot e_2 + (q_3 - p_3) \cdot e_3 \end{aligned}$$

Nun setzen wir für die Basen e_1, e_2, e_3 **folgendes ein:**

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 \cdot u + \beta_1 \cdot v + \gamma_1 \cdot w \\ e_2 &= \alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot v + \gamma_2 \cdot w \\ e_3 &= \alpha_3 \cdot u + \beta_3 \cdot v + \gamma_3 \cdot w \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (q_1 - p_1) \cdot e_1 + (q_2 - p_2) \cdot e_2 + (q_3 - p_3) \cdot e_3 \\ &= (q_1 - p_1) \cdot (\alpha_1 \cdot u + \beta_1 \cdot v + \gamma_1 \cdot w) + (q_2 - p_2) \cdot (\alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot v + \gamma_2 \cdot w) \\ &\quad + (q_3 - p_3) \cdot (\alpha_3 \cdot u + \beta_3 \cdot v + \gamma_3 \cdot w) \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir aus und erhalten:

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \underbrace{[(q_1 - p_1) \cdot \gamma_1 + (q_2 - p_2) \cdot \gamma_2 + (q_3 - p_3) \cdot \gamma_3]}_{\gamma_Q} \cdot w$$

$Q \in E \Leftrightarrow \gamma_Q = 0$.
Unbekannt sind q_1, q_2, q_3. **Es gilt:**

$$q_1 \cdot \gamma_1 + q_2 \cdot \gamma_2 + q_3 \cdot \gamma_3 = p_1 \cdot \gamma_1 + p_2 \cdot \gamma_2 + p_3 \cdot \gamma_3$$

1.2.25 Definition (I.2.e): k-dimensionaler affinen Unterraum

Wir definieren einen k**-dimensionaler affinen Unterraum als**

$$P + \mathbb{R}u_1 + \ldots + \mathbb{R}u_k \quad \textbf{wobei} \quad u_1, \ldots, u_k \ \textbf{linear unabhängig sind}$$

Die beiden einfachsten Fälle sind uns schon unter anderen Namen bekannt:

- **1-dimensional: Gerade:** $P + \mathbb{R}\,u$, $u \neq 0$ ($\Leftrightarrow u$ **linear unabhängig).**
- **2-dimensional: Ebene:** $P + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, u, v **linear unabhängig.**

1.3 Kapitel (I.3): Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Definition (I.3.a): Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$**:** $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ **dabei** $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

1.3.2 Definition (I.3.b): Norm eines Vektors

Die Norm eines Vektors x **definieren wir mit Hilfe des Skalarproduktes:** $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **Eigenschaften der Norm:**

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(ii) $\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$ **und** $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$

(iii) $\langle \alpha \cdot x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$ **und** $\langle x, \alpha \cdot y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$

(iv) Ungleichung von Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x, y\rangle| \quad \leq \quad \|x\| \cdot \|y\|$$

Zusatz: Gleichheit gilt in der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung (CSU) **falls die Vektoren linear abhängig sind.**

(v) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

(vi) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(vii) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Die Beweise für (i)-(iii) **erfolgten auf dem Übungsblatt 1.**
Zu (iv)**: Beweis der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung. Behauptung**

$$|\langle (x, y), (x', y')\rangle| = |x \cdot x' + y \cdot y'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Zuerst wollen wir einfach mal ein paar Werte ausprobieren:
Wähle $x = (2, 7)$, $y = (1, -4)$. **Einsetzen liefert:**

$$|\langle (2, 7), (1, -4)\rangle| = |2 - 28| = 26 \leq \sqrt{53} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{2^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^1 + (-4)^2}$$

In diesem Fall ist die Ungleichung erfüllt.
Hier nun der allgemeine Beweis:
Wir nehmen zuerst eine Fallunterscheidung vor:
1. Fall $y = 0$ **(**0 **ist Vektor!):**

$$|\langle x, 0\rangle| \leq \|x\| \cdot \|0\| \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 0 \leq \|x\| \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 0$$

2. Fall $y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|y\| \neq 0$
Nun berechnen wir folgendes Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle &\overset{(ii)}{=} \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\ &\overset{(iii)}{=} \langle x, x\rangle + 2\lambda \cdot \langle x, y\rangle + \lambda^2 \cdot \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

λ ist beliebig. Wir erhalten eine Gleichung, die große Ähnlichkeit zu einer quadratischen Gleichung aufweist. Wir nehmen nun eine quadratische Ergänzung vor:

$$\begin{aligned}
& \langle x,x\rangle + 2\lambda\cdot\langle x,y\rangle + \lambda^2\cdot\langle y,y\rangle \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right] + \langle x,x\rangle \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2 - \left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2\right] + \langle x,x\rangle \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda^2 + 2\lambda\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2\right] + \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\cdot\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)^2 \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right]^2 + \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \\
= \; & \langle y,y\rangle\cdot\left[\lambda + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right]^2 + \frac{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}
\end{aligned}$$

Nun wählen wir λ mit $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Wir setzen ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
& 0 && \le \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle y,y\rangle\cdot \underbrace{\left[-\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right]^2}_{=0} + \frac{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \\
\Leftrightarrow\; & 0 && \le \frac{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \\
\Leftrightarrow\; & 0 && \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2 \\
\Leftrightarrow\; & \langle x,y\rangle^2 && \le \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \\
\Leftrightarrow\; & |\langle x,y\rangle| && \le \|x\|\cdot\|y\|
\end{aligned}$$

Anmerkung: Eine Norm ist immer positiv. Daher können wir den Betrag weglassen.

Noch zu zeigen: "Gleichheit" $\Leftrightarrow x,y$ sind linear abhängig.

"$\Leftarrow$" (Leicht)

Wähle $x = 0$. Einsetzen liefert:

$$|\langle 0,y\rangle| \le \|0\|\cdot\|y\| \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n} 0\cdot y_i \le 0\cdot\|y\| \quad\Leftrightarrow\quad 0 \le 0$$

Wähle $x \neq 0$. Dann folgt aufgrund der linearen Abhängigkeit: $y = \alpha\cdot x$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
& |\langle x,y\rangle| && \le && \|x\|\cdot\|y\| \\
\Leftrightarrow\; & |\langle x,\alpha\cdot x\rangle| && \le && \|x\|\cdot\|\alpha\cdot x\| \\
\Leftrightarrow\; & |\alpha\cdot\langle x,x\rangle| && \le && \|x\|\cdot|\alpha|\cdot\|x\| \\
\Leftrightarrow\; & |\alpha|\cdot|\langle x,x\rangle| && \le && |\alpha|\cdot\|x\|\cdot\|x\| \\
\Leftrightarrow\; & |\alpha|\cdot\|x\|^2 && \le && |\alpha|\cdot\|x\|^2
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$"

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1. Fall $y = 0 \quad\Rightarrow\quad x,y$ sind linear abhängig nach Definition der linearen Abhängigkeit.

2. Fall $y \neq 0$. Zudem wird Gleichheit angenommen. Nach $(*)$ folgt (Wurzel ziehen!):

$$\|x + \lambda y\| \quad = \quad \|y\| \cdot \left[\lambda + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right]$$

Anmerkung: $\dfrac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} = \dfrac{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}$

Ist nun die Gleichheit von $\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = \langle x, y\rangle^2 \Leftrightarrow \|x\| \cdot \|y\| = |\langle x, y\rangle|$ angenommen, so gilt:

$$\frac{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} \quad = \quad 0$$

λ ist beliebig.Wir setzen $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ und erhalten:

$$\|x + \lambda y\| = \|y\| \cdot \left[\lambda + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right] = \|y\| \cdot \underbrace{\left[-\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right]}_{=0} = 0$$

Wir haben (v), (vi), da diese direkt aus den Definitionen folgen.
Zu (vii) folgt aus der CSU. Idee:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2 \cdot \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

Ergebnis der obigen Umformung in die CSU einsetzen.

Praktische Bedeutung des Skalarproduktes und der Norm

1.3.3 Abstand von $P, Q \in \mathbb{R}^n$

Hier am Beispiel für $n = 2$:

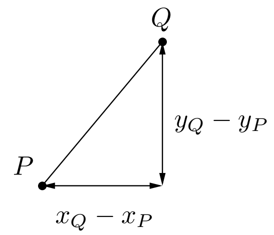

Abbildung I-24: Abstand zweier Punkte im $\mathbb{R}^2$

In diesem Fall gilt für den Abstand von P und Q (nach Pythagoras):

$$\mathbf{d}(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

1.3.4 Winkel zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$: $\measuredangle(u,v)$

Es gilt: $\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\measuredangle(u,v)$

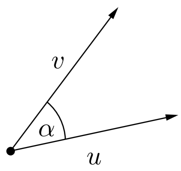

Abbildung I-25: Winkel zwischen u und v

(gilt laut Schule)
Nun Ausdehnung auf den $\mathbb{R}^n$: Nach CSU gilt:

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\| \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|}\le 1$$

Nun definieren wir:

$$\cos(\measuredangle(u,v)) := \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \textbf{wobei} \quad \measuredangle(u,v)\in[0,\pi]$$

1.3.5 Satz (I.3.1): Der Cosinussatz $c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$

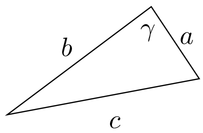

Abbildung I-26: Der Cosinussatz im $\mathbb{R}^2$

Beweis für den $\mathbb{R}^n$:

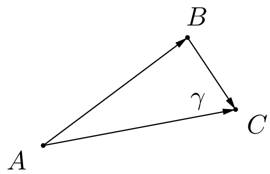

Abbildung I-27: Der Cosinussatz im $\mathbb{R}^n$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\
\Rightarrow\quad c^2 &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\
&= \left\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right\rangle^2 = \left\langle \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right\rangle^2\\
&= \underbrace{\left\langle \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\right\rangle}_{=a^2} + 2\cdot\left\langle \overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right\rangle + \underbrace{\left\langle \overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB}\right\rangle}_{=b^2}\\
&= a^2+b^2+2\cdot ab\cdot\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)
\end{aligned}$$

Betrachtung des Winkels:

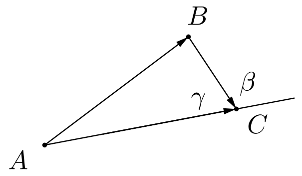

Abbildung I-28: $\beta = \measuredangle\,(AC, CB)$

Es gilt $(\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha))$**:**

$$\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\cos\gamma$$

Wir setzen ein und erhalten:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos\gamma$$

1.3.6 Orthogonalität von Vektoren

Seien $u, v \neq 0$. **Nun gilt:** $\langle u, v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \perp v$.
Grundaufgabe: Zu gegebenen $u, v, \ldots$ **finde** x **mit** $u \perp x, v \perp x, \ldots$

1.3.7 Definition (I.3.c): Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$

Das Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ **definiert. Gegeben seien** $x = (a_1, a_2, a_3)$, $y = (b_1, b_2, b_3)$.
Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist definiert als:

$$x \times y = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Wir gehen bei den Determinanten zyklisch vor. Beachte die zweite Position.

1.3.8 Satz (I.3.2):

Seien x, y linear unabhängig. Dann gilt:

- **(i)** $v \perp x, y \quad \Leftrightarrow \quad v = \alpha \cdot (x \times y)$ **für ein** $\alpha \in \mathbb{R}$
- **(ii)** $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin\left(\measuredangle\,(x, y)\right)$

Die geometrische Bedeutung von (ii): Die Fläche des Parallelogramms, das durch x und y aufgespannt wird:

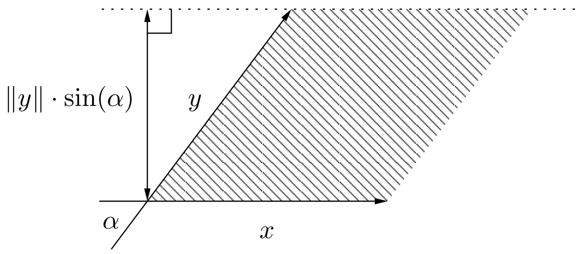

Abbildung I-29: $\|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin\measuredangle\,(x, y)$

1.3.9 Hessesche Normalenform der Ebene

Betrachtung der Ebene gegeben in Parameterdarstellung:

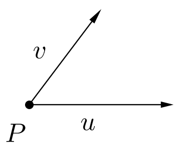

Abbildung I-30: Parameterform der Ebene: $E = P + \mathbb{R} \cdot u + \mathbb{R} \cdot v$

Idee: Wir ersetzen u und v durch einen auf ihnen senkrecht stehenden Vektor:

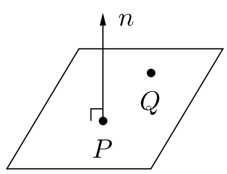

Abbildung I-31: Hessesche Normalform der Ebene: $E : \langle x, n \rangle = d$

Der Normalenvektor der Ebene n_E steht senkrecht auf u, v: $n \perp u, v$. Das heißt:

$$\langle n, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \rangle = \alpha \cdot \langle n, u \rangle + \beta \cdot \langle n, v \rangle = 0$$

Eine Möglichkeit n_E zu berechnen ist $n = u \times v$.
Nun betrachten wir einen Punkt $Q = (x, y, z)$. Für P gilt: $P\,(a, b, c)$. Nun gilt:

$$Q \in E \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \perp n \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle n, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

Man erhält die Hessesche Normalform der Ebene:

$$\langle n, P \rangle = \langle n, Q \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle n, (a, b, c) \rangle = \langle n, (x, y, z) \rangle$$

Kapitel II: Algebraische Strukturen

Wir werden in diesem Kapitel folgende algebraische Strukturen betrachten:

- **Gruppen**
- **Ringe und Körper**
- **Vektorräume.**

2.1 Kapitel (II.1): Gruppen

2.1.1 Definition (II.1.a): Verknüpfungen

Sei M eine nicht leere Menge, (sei $M \times M = \{(a,b) | \, a,b \in M\}$). Eine Verknüpfung (Komposition) auf M ist eine Abbildung $f : M \times M \to M$.
Beispiele:

(a) $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, (a,b) \mapsto a + b$

(b) $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, (a,b) \mapsto a \cdot b$

(c) $f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto a^b$

(d) $\mathbf{max} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \mathbf{max}\{a,b\}$

(e) $\mathbf{min} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \mathbf{min}\{a,b\}$

(f) $\mathbf{ggT} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \mathbf{ggT}\{a,b\}$

(g) $\mathbf{kgV} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto \mathbf{kgV}\{a,b\}$

2.1.2 Definition (II.1.b): Abbildungen Abb (M,M)

Wir definieren: Abb $(M,M) = \{f : M \to M\}$ (Menge der Abbildungen von M nach M)
Hier ein Beispiel für Verknüpfungen:
$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ **liefert** $g \circ f : M \to P$, $m \mapsto g(f(m))$**.**
Lies "$g \circ f$" als "Verknüpfung von f, g", "Komposition von f, g" oder als "Hintereinanderausführung von f, g".
Standardverknüpfung auf Abb (M,M):

$$\begin{aligned} \mathbf{Abb}(M,M) \times \mathbf{Abb}(M,M) &\to \mathbf{Abb}(M,M) \\ (f,g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}$ und f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ und g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2$
Nun gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(x^3\right) = \left(x^3 + 1\right)^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(x^2 + 1\right) = \left(x^2 + 1\right)^3 \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht spielt die Reihenfolge eine Rolle.

2.1.3 Definition (II.1.c): Assoziativität

Eine Verknüpfung auf M heißt assoziativ, wenn gilt:

$$\forall a,b,c \in M : (ab)\,c = a\,(bc)$$

Anmerkung: Wir verwenden keine Operatoren im allgemeinen Fall, es gilt: $(a,b) \mapsto ab$**.**
Beispiel für Assoziativität: $+ : (a+b)+c = a+(b+c)$**.**
Sei f_1 **gegeben mit** $f_1(x,y) = x^y$
Nun wollen wir f_1 **auf Assoziativität untersuchen. Allgemein ergibt sich:**

- **für die linke Seite:** $f_1(f_1(a,b),c) = \left(a^b\right)^c$**.**
- **für die rechte Seite:** $f_1(a, f_1(b,c)) = a^{b^c}$**.**

Wir vermuten, daß die Assoziativität nicht gegeben ist. Deshalb probieren wir aus:

$$\begin{aligned}\left(2^3\right)^4 &= 4096\\ 2^{3^4} &= 2^{81} \approx 10^{0.3\cdot 81} \approx 10^{24.3} \ggg 4096\end{aligned}$$

Wir haben ein Gegenbeispiel für eine Aussage gefunden die allgemein gültig sein soll. Also ist f_1 **nicht assoziativ.**
Wichtig: Verknüpfungen auf Abb (M,M) **sind assoziativ.**
Gegeben: $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{h} Q$**. Nun gilt:** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$**.**
Beweis: Auf der linken Seite:

$$h \circ (g \circ f)(m) \overset{\textbf{Def.}}{=} h\left((g \circ f)(m)\right) \overset{\textbf{Def.}}{=} h\left(g\left(f(m)\right)\right)$$

Auf der rechten Seite ergibt sich:

$$\left((h \circ g) \circ f\right)(m) \overset{\textbf{Def.}}{=} (h \circ g)\left(f(m)\right) \overset{\textbf{Def.}}{=} h\left(g\left(f(m)\right)\right)$$

2.1.4 Definition (II.1.d): Symmetrische Gruppe S_n, Permutation

Wir definieren die Gruppe S_n **als:**

$$S_n = \{\textbf{invertierbare Abb}\left(\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,n\}\right), \circ\}$$

Es gilt: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$**, dabei stehen in der oberen Zeile die Elemente und in der unteren Zeile die Bilder.** σ **ist invertierbar** $:\Leftrightarrow \exists$ **Umkehrabbildung (**$\Leftrightarrow \sigma$ **ist bijektiv).**
Ist eine Abbildung bijektiv, so ist diese injektiv und surjektiv:

$$\begin{aligned} f : M \to N : \textbf{surjektiv} &:\Leftrightarrow \forall y \in N\, \exists x \in M : y = f(x)\\ f : M \to N : \textbf{injektiv} &:\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)\end{aligned}$$

σ **bijektiv** $\Leftrightarrow$ **alle** i_j **sind paarweise verschieden** $\Leftrightarrow$ **"2. Zeile ist eine Permutation der 1. Zeile".**

Definition und Notation:

$$\mathbf{S}_n \quad := \quad (\{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}, \sigma\, \textbf{bijektiv}\}, \circ)$$

$\mathbf{S}_n$ nennt man die symmetrische Gruppe von n Ziffern. Elemente von $\mathbf{S}_n$ werden als Permutationen bezeichnet.

Man benötigt für die Definition der symmetrischen Gruppe S_n folgende Tatsache: f, g bijektiv $\Rightarrow f \circ g$ bijektiv.

Genereller Sachverhalt:

$$\begin{aligned} f, g\, \textbf{injektiv} \quad &\Rightarrow \quad f \circ g\, \textbf{injektiv} \\ f, g\, \textbf{surjektiv} \quad &\Rightarrow \quad f \circ g\, \textbf{surjektiv} \end{aligned}$$

Anmerkung: Bei einer Komposition von Abbildungen zuerst immer die letzte Anwenden.

Beweis:

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} P$$

Zuerst die Injektivität: $\forall m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 \Rightarrow g(m_1) \neq g(m_2) \Rightarrow f(g(m_1)) \neq f(g(m_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(m_1) \neq (f \circ g)(m_2)$. **Die erste Folgerung beruht auf der Injektivität von g, die zweite Folgerung beruht auf der Injektivität von f.**

Nun die Surjektivität: Zu zeigen: $\forall p \in P\, \exists m \in M : p = (f \circ g)(m)$.

Sei $p \in P$ gegeben, dann gibt es wegen der Surjektivität von f ein $n \in N : p = f(n)$. Weil g surjektiv ist $\exists m \in M : n = g(m)$. Einsetzen liefert:

$$p = f(g(m)) \overset{\textbf{Def.}}{=} (f \circ g)(m)$$

Beispiel für $\mathbf{S}_n$, $n = 4$:

$$\underset{g}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \underset{\circ}{\circ} \underset{f}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

a, b, c, d ergeben sich nun folgendermaßen:

$$1 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 3 = a, \quad 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 2 = b, \quad 3 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 4 = c, \quad 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 1 = d$$

2.1.5 Definition (II.1.e): Halbgruppe, Neutrales Element

(i) Eine Menge mit assoziativer Verknüpfung heißt Halbgruppe.

(ii) Gegeben $(M, \circ)$. $e \in M$ heißt neutrales Element (Einselement, Nullelement, etc), wenn gilt: $\forall a \in M : a \cdot e = e \cdot a = a$.

Anmerkung: Bei "$\circ$" handelt es sich um eine Verknüpfung und nicht um die Multiplikation im Speziellen.

Beispiele:

- $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$: **neutrales Element** 0.
- $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$: **neutrales Element** 1.
- $(\mathbf{Abb}(M, M), \circ)$: **neutrales Element** $e : M \to M$, $e \circ f = f \circ e = f = id_M$

$\mathbf{id}_M$ ist die Identität. Sie besitzt folgende nützliche Eigenschaft: $\mathbf{id}_M(m) = m\, \forall m \in M$

Verknüpfung: $f : M \times M \to M$.
Abstrakt: $(a,b) \mapsto ab$. **Konkret für die Multiplikation:** $(a,b) \mapsto a \cdot b$.
Eigenschaften einer Halbgruppe:

(i) Assoziativität: $(ab)\,c = a\,(bc)$. **Beispiel:** $\mathbf{max}\,(\mathbf{max}\,(a,b)\,,c) = \mathbf{max}\,(a, \mathbf{max}\,(b,c))$.

(ii) neutrales Element e **(auch "Nullelement" oder "Einselement")** $\forall a : ea = ae = a$.

Beispiele für Halbgruppen:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ **ist assoziativ,** 0 **ist neutrales Element.**

(b) $(\mathbb{N}, \cdot)$ **ist assoziativ,** 1 **ist neutrales Element.**

(c) $(\mathbf{Abb}\,(X,X)\,, \circ)$ **ist assoziativ,** $\mathbf{id}_X$ **ist neutrales Element.**

(d) $\mathbf{S}_n = (\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} |\, \sigma$ **bijektiv** $, \circ)$ **ist assoziativ, id ist das neutrale Element.**

Spezielle Notation für σ**:**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{wird als Permutation bezeichnet}$$

Beispiel: $M = \{n \in \mathbb{N} |\, n \geq 2\}$. $(M, \cdot)$ **und** $(M, +)$ **sind assoziativ, enthalten aber kein neutrales Element.**

2.1.6 Satz (II.1.1): Eindeutigkeit des neutralen Elements in einer Halbgruppe

In einer Halbgruppe gibt es höchstens ein neutrales Element.
Beweis: Seinen e, e' **neutrale Elemente in der Halbgruppe** H.
Zu zeigen: $e = e'$.
Es ist:

$$e \overset{(*)}{=} e \cdot e' \overset{(**)}{=} e'$$

Anmerkung: $(*) : e'$ **ist neutrales Element,** $(**) : e$ **ist neutrales Element.**

2.1.7 Definition (II.1.f): Monoid, Invertierbarkeit

Definitionen:

(i) Monoid $:=$ **Halbgruppe mit neutralem Element.**

(ii) Invertierbarkeit: Sei H **eine Halbgruppe mit neutralem Element** e. **Dann heißt** $a \in H$ **invertierbar, wenn es** $b \in H$ **gibt mit** $ab = ba = e$.

Beispiele:

(a) Gegeben sei $(\mathbb{N}, \cdot)$. a **ist invertierbar (bezüglich der Multiplikation)**
$\Leftrightarrow \quad \exists b \in \mathbb{N} : a \cdot b = b \cdot a = 1$ **(in** $\mathbb{N}$ **ist** $a = 1$ **das einzig invertierbare Element).**

(b) Gegeben sei $(\mathbb{R}, \cdot)$. a **ist invertierbar**
$\Leftrightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0$.

(c) Gegeben sei $(Abb\,(X,X)\,, \circ)$. $f : X \to X$ **ist invertierbar**
$\Leftrightarrow \quad \exists g : X \to X$ **mit** $f \circ g = \mathbf{id}_X$ **und** $g \circ f = \mathbf{id}_X$.

Behauptung: f **ist invertierbar** $\Leftrightarrow f$ **ist bijektiv.**
Beweis:
"$\Leftarrow$":
f **ist bijektiv** $\Rightarrow$ **Es existiert die Umkehrfunktion** $f^{-1}: X \to X,\, f(x) \mapsto x$.
Setze $g := f^{-1}$**:** $(f \circ g)(x) = \left(f \circ f^{-1}\right)(x) \overset{\textbf{Def.}}{=} f\left(f^{-1}(x)\right) \overset{!}{=} x$.
Zum Beweis: Setze $x := f(a)$ **für ein** $a \in X$ **(**f **ist surjektiv), da** $f^{-1}(f(a)) = a$.
Weiter: $f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(f^{-1}(f(a))\right) = f(a) = x$.
Nun betrachten wir $(g \circ f)(x)$**:**
$(g \circ f)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) \overset{(*)}{=} x$. **Wir verwenden bei** $(*)$ **die Eigenschaften der Definition der Umkehrfunktion.**
Insgesamt haben wir bisher gezeigt: $f \circ f^{-1} = id$ **und** $f^{-1} \circ f = id$.
"$\Rightarrow$":
Zu zeigen: $f \circ g = id \overset{(1)}{\Rightarrow} f$ **surjektive,** $g \circ f = \mathbf{id} \overset{(2)}{\Rightarrow} f$ **injektive,**
<u>**Beweis für** (1)</u>**:**
Sei $y \in X$. **Zu zeigen:** $\exists x \in X : f(x) = y$.
Es ist $y = \mathbf{id}_X(y) = f \circ g(y) = f(g(y))$.
Also mit $g(y) = x$ **ergibt sich:** $f(g(y)) = f(x) = y$.
<u>**Beweis für** (2)</u>**:**
Zu zeigen: $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
In diesem Fall zu zeigen: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Sei $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$.
Das heißt nach Definition: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.
Nach Voraussetzung gilt: $(g \circ f) = id_X$. **Daher:**

$$\begin{aligned} \mathbf{id}_X(x) &= \mathbf{id}_X(x') \\ x &= x' \end{aligned}$$

2.1.8 Satz (**II**.1.2)

Sei H **eine Halbgruppe mit neutralem Element. Dann gilt:**

$$ab = ab' = ba = b'a = e \Rightarrow b = b'$$

Umgangssprachlich: Das Inverse ist eindeutig.
Beweis:

$$b \overset{(N_\circ)}{=} b \circ e \overset{\textbf{Vor.}}{=} b \circ (a \circ b') \overset{(A_\circ)}{=} (b \circ a) \circ b' \overset{\textbf{Vor.}}{=} e \circ b' \overset{(N_\circ)}{=} b'$$

2.1.9 Definition (II.1.g): Das inverse Element

$ab = ba = e$. **Wir bezeichnen b als das Inverse zu a.**
Notation: $b = a^{-1}$.
Beispiele:

(a) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ $a^{-1} = a^{-1} \doteqdot \frac{1}{a}$.

(b) $(\mathbf{Abb}(X, X), \circ)$. f^{-1} **ist das Inverse** (f^{-1} **ist die Umkehrfunktion).**

(c) $(\mathbb{Z}, +)$. **Das Inverse zu** a **ist** $-a$, **da** $a + (-a) = 0$.

(d) $\sigma \in \mathbf{S}_n$, σ **ist bijektiv, also existiert** σ^{-1}

Beispiel für $\sigma, \sigma^{-1} \in \mathbf{S}_5$ **:**

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um σ^{-1} zu erhalten haben wir die Werte und Bilder vertauscht und abschließend die neuen Werte der Größe nach sortiert.

2.1.10 Definition (II.1.h): Gruppe

Eine Gruppe G ist eine Halbgruppe mit neutralem Element, in der jedes Element invertierbar ist. Mit Quantoren:

(i) Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (ab)\, c = a\, (bc)$.

(ii) Neutrales Element: $\exists e \in G\, \forall a \in G : ae = ea = a$.

(iii) Inverses Element: $\forall a \in G\, \exists b \in G : ab = ba = e$

Beispiele:

(a) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ **sind Gruppen. Hier** $e = 0$, **Inverses Element** $-a$.

(b) $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ **sind Gruppen. Hier** $e = 1$.
Inverses Element: $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

(c) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ **ist eine Gruppe mit zwei Elementen.**

(d) $(\{0\}, +)$ **ist eine Gruppe mit einem Element.**

2.1.11 Satz (II.1.3)

S_n ist eine Gruppe mit $n!$ Elementen.

Beweis: S_n ist Halbgruppe mit neutralem Element. Bereits bewiesen: jedes Element in S_n ist invertierbar weil die Elemente von S_n bijektiv sind.

Behauptung: $|S_n| = n!$ ($|S_n| :=$ Anzahl der Elemente in S_n.)

Möglichkeiten für die Bilder einer Permutation: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

Für den ersten Wert gibt es n Möglichkeiten für die Position von i_1.

Bei gewähltem i_1 gibt es $(n-1)$ Möglichkeiten für die Position von i_2. (σ injektiv $\Rightarrow i_2 = \sigma(2) \neq \sigma(1) = i_1$).

Bei gewählten i_1, i_2 gibt es $(n-2)$ Möglichkeiten für die Position von i_3.

Weiter so bis wir alle i_j durchlaufen haben.

Insgesamt: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung.

2.1.12 Notation: r-Zyklen

Es gilt: $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \right\}, \quad |S_n| = n!$

Spezielle Permutationen: r-Zyklen (haben r Ziffern):

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet:

(I) $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \ldots \mapsto i_{r-1} \mapsto i_r \mapsto i_1$

(II) $k \neq i_1, \ldots, i_r \Rightarrow \sigma(k) = k$.

Man kann sich dies auch anhand eines Kreises vorstellen:

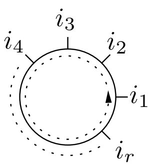

Abbildung II-1: ein r-Zyklus an einem Kreis

Hier nun ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\
\sigma^2 &= \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \\
\sigma^3 &= \sigma \circ \sigma \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma^4 &= \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{id}
\end{aligned}$$

Generell gilt: $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}^r = \mathbf{id}$. **Nun gilt:**

$$\sigma^{7541} = \sigma^{4 \cdot 1885 + 1} = \left(\sigma^4\right)^{1885} \circ \sigma^1 = id^{1885} \circ \sigma = \sigma$$

2.1.13 Satz (II.1.4): Rechengesetze in Gruppen

In jeder Gruppe sind bei gegebenen $a, b \in$ G die folgenden Gleichungen eindeutig lösbar:

$$\mathbf{I}: a \cdot x = b \quad \mathbf{II}: y \cdot a = b \quad \textbf{und zwar} \quad \mathbf{I}: x = a^{-1} \cdot b \quad \mathbf{II}: y = b \cdot a^{-1}$$

Beweis für Gleichung I:
Wir müssen sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der Lösung zeigen.
Existenz: Wir setzen unsere Vermutung in die linke Seite ein und erhalten:

$$a \cdot x = a \cdot \left(a^{-1} \cdot b\right) \overset{\textbf{Ass.}}{=} \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot b \overset{\textbf{Inv.}}{=} e \cdot b = b$$

Wir erhalten die rechte Seite.
Eindeutigkeit der Lösung: Sei $x \in G$, das heißt $a \cdot x = b$. Nun multiplizieren wir mit a^{-1} auf beiden Seiten von links und erhalten: $a^{-1}(a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$
Das heißt (Assoziativgesetz): $\left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot x = a^{-1} \cdot b$
Das heißt (Neutrales Element): $e \cdot x = a^{-1} \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{-1} \cdot b$
Der Beweis für II erfolgt analog, wobei mir a^{-1} von rechts multipliziert wird.

2.1.14 Definition (II.1.i): Kommutative Verknüpfung

Eine Verknüpfung heißt kommutativ (abelsch) wenn gilt:

$$\forall a, b: \ ab = ba$$

Beispiele:

(a) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), \ldots, (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}, \cdot)$ **sind kommutativ.**

(b) $u, v \in \mathbb{R}: u, v \mapsto u \times v$ **ist nicht kommutativ.**

(c) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ **sind kommutativ .**

(d) $\mathbf{S}_n$, $n \geq 3$ **sind nicht kommutativ.**

Behauptung: $u \times v = -v \times u$
Beweis: $u = (a_1, a_2, a_3)\,,\ v = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\begin{aligned}
u \times v &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(- \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= - \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= -v \times u
\end{aligned}$$

Behauptung: $\mathbf{S}_n$ **fuer** $n \geq 3$ **ist nicht kommutativ.**
Das es sich um eine Aussage für alle handelt reicht ein Gegenbeispiel um zu zeigen, daß $S_n, n \geq 3$ nicht kommutativ ist.
Sei $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_3$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
Nun gilt: $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \tau \circ \sigma$

2.1.15 Mehrfache Produkte von Gruppen (Halbgruppen)

Eine Verknüpfung ist binär. Das heißt: es können nur zwei Elemente auf einmal verknüpft werden.
Gegeben seien drei Elemente: $a, b, c \in G$. **Nun gibt es mehrere Möglichkeiten diese Elemente zu verknüpfen:** $(ab)\,c$, $a\,(bc)$, $(ba)\,c$, ...

Gegeben seien $a_1, \ldots, a_n \in G$. **Nun gilt:** $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i := (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \ldots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n$

Als rekursiven Definition: $\prod\limits_{i=1}^{1} a_i := a_1$ **und** $\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}$

Wir wollen nun den Fall für $n = 4$ **betrachten:** $\prod\limits_{i=1}^{4} a_i = ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4$

Es ist aber auch eine andere Klammerung möglich: $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4)$.

Behauptung: In einer Halbgruppe gilt: $\prod\limits_{i=1}^{4} a_i = (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4)$

Beweis: $((\underbrace{a_1 \cdot a_2}_{x}) \cdot \underbrace{a_3}_{y}) \cdot \underbrace{a_4}_{z} \overset{A}{=} (\underbrace{a_1 \cdot a_2}_{x}) \cdot (\underbrace{a_3}_{y} \cdot \underbrace{a_4}_{z})$

Zudem gelten nach dem Assoziativgesetz auch:

$$((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4 \overset{A}{=} (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4) \overset{A}{=} a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \cdot a_4)) \overset{A}{=} a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4) \overset{A}{=} (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \cdot a_4$$

2.1.16 Satz (II.1.5): Allgemeines Assoziativgesetz

Gegeben: H **sei Halbgruppe, mit** $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_m \in H$. **Dann gilt:**

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j=1}^{m} a_{n+j} = \prod_{i=1}^{n+m} a_i$$

Beweis nun per vollständiger Induktion nach $n + m$.
Induktionsverankerung: $n + m = 2$. **Das heißt** $n = m = 1$, **da** $n, m \in \mathbb{N}$.

Betrachtung der linken Seite: $\prod\limits_{i=1}^{1} a_i \cdot \prod\limits_{j=1}^{1} a_{n+j} = a_1 \cdot a_2$

Betrachtung der rechten Seite: $\prod\limits_{i=1}^{2} a_i = a_1 \cdot a_2$

Induktionsschluß: Es gibt zwei Möglichkeiten: $n + m \rightsquigarrow n + m + 1 = \begin{cases} (n+1) + m \\ n + (m+1) \end{cases}$

Hier wollen wir nur den unteren Fall betrachten:
$n + m \rightsquigarrow n + (m+1)$: **Wir starten auf der linken Seite:**

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j=1}^{m+1} a_{n+j} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{m+1} a_{n+j}\right) \overset{\textbf{Def.}}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\left(\prod_{j=1}^{m} a_{n+j}\right) \cdot a_{n+m+1}\right)$$

$$\overset{\textbf{Ass.}}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j=1}^{m} a_{n+j}\right) \cdot a_{n+m+1} \overset{\textbf{IA}}{=} \left(\prod_{i=1}^{n+m} a_i\right) \cdot a_{n+m+1} \overset{\textbf{Def.}}{=} \prod_{i=1}^{n+m+1} a_i$$

2.1.17 Satz (II.1.6): Allgemeines Kommutativgesetz

Gegeben: H sei kommutative Halbgruppe, mit $a_1, \dots, a_n \in H$, $\sigma \in S_n$. Dann gilt:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad = \quad a_{\sigma(1)} \cdot a_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)}$$

Hier kein Beweis. Es wird auf die Literatur verwiesen (Im Prinzip wie Beweis des allgemeinen Assoziativgesetz).

2.1.18 Anwendung: Potenzgesetze in Gruppen

Sei G eine Gruppe, $a \in G, n \in \mathbb{N}$ $a^n := \prod_{i=1}^{n} a_i$ **für** $a_i = a$ $\qquad a^0 := e$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $n \geq 0$: siehe oben, $n < 0$: $a^n = \left(a^{|n|}\right)^{-1}$

2.1.19 Satz (II.1.7): Potenzgesetze

Sei G Gruppe, $a, b \in G, n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

(i) Multiplikation:

$$\begin{aligned} a^n a^m &= \prod_{i=1}^{n} a \cdot \prod_{i=1}^{m} a \overset{(\mathbf{II}.1.5)}{=} \prod_{i=1}^{n+m} a = a^{n+m} \\ (a^n)^m &= \prod_{j=1}^{m} a^n = a^n \cdot \ldots \cdot a^n = a^{\sum_{j=1}^{m} n} = a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} a^{10} \cdot a^{-14} &= a^{10} \cdot \left(a^{14}\right)^{-1} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{14}}_{=a^{10}} \cdot \left(a^{14}\right)^{-1} \\ &= a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \underbrace{a^{14} \cdot \left(a^{14}\right)^{-1}}_{=e} = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot e \\ &= \left(a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 \cdot a^1\right)^{-1} = \left(a^4\right)^{-1} = a^{-4} a^{-4} \end{aligned}$$

(ii) Das Inverse Element einer Produktes: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
Zu zeigen: $(ab)\left(a^{-1}b^{-1}\right) = \left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) = e$.
Nun gilt für die linke Seite: $(ab)\left(a^{-1}b^{-1}\right) = \left(abb^{-1}\right)a^{-1} = (ae)\,a^{-1} = aa^{-1} = e$
Auf der rechten Seite gilt: $\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) = b^{-1}\left(a^{-1}ab\right) = b^{-1}(eb) = b^{-1}b = e$
Damit ist $\left(b^{-1}a^{-1}\right)$ **das inverse Element zu** (ab).

(iii) G **abelsch:** $(ab)^n = \prod_{i=1}^{n} (ab) \overset{\textbf{Kom.}}{=} \prod_{i=1}^{n} a \cdot \prod_{i=1}^{n} b = a^n b^n$

2.1.20 Definition (II.1.j): Äquivalenzrelation auf einer Menge M:

(i) $\forall x \in M : x \sim x$ **(Eigenschaft der Reflexivität)**

(ii) $\forall x, y \in M; x \sim y \Rightarrow y \sim x$ **(Eigenschaft der Symmetrie)**

(iii) $\forall x, y, z : x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ **(Eigenschaft der Transitivität)**

Die Äquivalenzrelation ist eine Abschwächung der Identitätsrelation.
Definition: Äquivalenzklasse: $[x] := \{y \in M | \, y \sim x\}$
Es gilt: $M = \dot{\bigcup}$ **verschiedene Äquivalenzklassen**

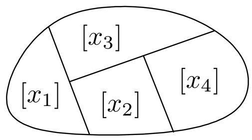

Abbildung II-2: Skizze für M

<u>**Definition**</u>**: Menge der Äquivalenzklassen wird als** $M/_\sim$ **bezeichnet. Die Elemente der Menge sind wiederum Mengen.**

2.1.21 Definition (II.1.k): Kongruenzrelation $\bmod n$ **auf** $\mathbb{Z}$**.**

Lies "modulo n **auf** $\mathbb{Z}$**". Für** $a, b \in \mathbb{Z}$ **und ein festes** $n \in \mathbb{N}$ **gilt:**$a \equiv b \bmod n \Leftrightarrow n | a - b$**Bemerkungen:**

- $n \in \mathbb{N}$, **Division mit Rest:** $a = q \cdot n + r$ **mit** $0 \leq r \leq n - 1$.
- $a \equiv b \bmod n \Leftrightarrow a, b$ **lassen bei Division mit Rest durch** n **denselben Rest.**

Definition für Teiler: $x | y \Leftrightarrow \exists z : x \cdot z = y$.

2.1.22 Satz (II.1.8): $\equiv \bmod n$ **ist eine Äquivalentrelation**

Beweis:
Reflexivität: $a \equiv a | n$, **denn** $n | a - a = 0$.
Symmetrie: Sei $a \equiv b \bmod n$, **Zu zeigen:** $b \equiv a \bmod n$. **Das heißt** $n | b - a$.
Nach Voraussetzung gilt: $n | a - b \Leftrightarrow a - b = k \cdot n \quad \Leftrightarrow \quad b - a = (-k) \cdot n \quad \Leftrightarrow \quad b - a = l \cdot n$
Transitivität: Sei $a \equiv b \bmod n$ **und** $b \equiv c \bmod n$.
Zu zeigen: $a \equiv b \bmod n$, $b \equiv c \bmod n \quad \Rightarrow \quad a \equiv c \bmod n$.
Es gilt: $a - c = (a - b) + (b - c) = k \cdot n + l \cdot n = (k + l) \cdot n$

2.1.23 Definition (II.1.l): $\overline{a}$

$\overline{a}$ =**Kongruenzklasse von** $a = \{b \in \mathbb{Z} | \, a \equiv b \bmod n\} = \{b \in \mathbb{Z} | \, (n | a - b)\}$.
Die Kongruenzklasse ist eigentlich eine Äquivalenzklasse.

2.1.24 Definition (II.1.m): Restklassenringe $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$:=**Menge der Kongruenzklassen** $\bmod n = \{\overline{a} | \, a \in \mathbb{Z}\}$.

2.1.25 Satz (II.1.9):

Es gilt:

(i) $\overline{a} = a + n \cdot \mathbb{Z} = \{a, a+n, a-n, a+2n, a-2n, \ldots\}$

(ii) Es gibt genau $|n|$ verschiedene Kongruenzklassen für $n \neq 0$.

<u>**Beweise**</u>**:**

zu (i)**:** $b \in \overline{a} \quad \overset{\textbf{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad a \equiv b \bmod n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n$

$\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : b = a + (-k) \cdot n \Leftrightarrow l \in \mathbb{Z} : b = a + l \cdot n$

zu (ii)**:** $n = 0 : a \equiv b \bmod 0 \quad \overset{\textbf{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad 0|a - b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 \cdot k = a - b \Leftrightarrow a = b$**.**

Also: $\equiv \text{mod} 0$ **ist die Identität. Das heißt** $\overline{a} = a$**.**

$n \neq 0$**: Division mit Rest bezüglich** $n : b = q \cdot n + r$ **für** $0 \leq r \leq |n| - 1$

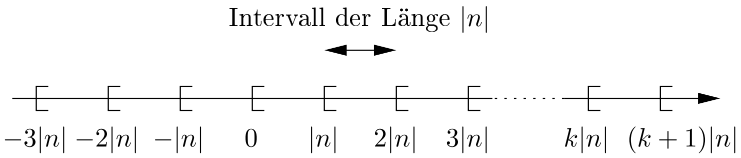

Abbildung II-3: Skizze für $n < 0$

Das heißt: $b \equiv r \bmod n$ **mit** $0 \leq r \leq |n| - 1 \Rightarrow \overline{b} = \overline{r}$ **für ein** $r \in \mathbb{N}_0$ **mit** $0 \leq r \leq |n| - 1$**.**
Es gibt also $|n|$ **viele Klassen.**
Noch zu zeigen: Die Klassen $\overline{r}$ **für** $0 \leq r \leq |n| - 1$ **sind paarweise verschieden.**
Sei $\overline{r} = \overline{s}$ **mit** $0 \leq s \leq |n| - 1$**. Das heißt** $r \equiv s \bmod n \Leftrightarrow n|s - r \Leftrightarrow s - r = k \cdot n \Rightarrow |s - r| = 0$ **oder** $|s - r| \geq |n|$**. Weil** $r, s \in [0, |n| - 1[$ **sind kann nur gelten:** $|s - r| = 0 \Rightarrow s = r$ $\square$**.**
Beispiele:

(a) $n = 2$: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$**. Es gilt:**

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (2|x - 0)\} = \{\textbf{alle geraden Zahlen}\} \\ \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (2|x - 1)\} = \{\textbf{alle ungeraden Zahlen}\} \end{aligned}$$

(b) $n = 3$: $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$**. Es gilt:**<u>**t**</u>

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (3\,|x - 0)\} \\ &= \{\textbf{alle durch drei teilbaren Zahlen}\} \\ \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (3\,|x - 1)\} \\ &= \{\textbf{Zahlen, die bei Division durch 3 Rest 1 zurücklassen}\} \\ \overline{2} &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (3\,|x - 2)\} \\ &= \{\textbf{Zahlen, die bei Division durch 3 Rest 2 zurücklassen}\} \end{aligned}$$

(c) $n \in \mathbb{N}$**:** $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$

2.1.26 Rechengesetze auf $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$:

- $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$
- **Für** $n \neq 0$: $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\} = \{\overline{x} | \, x \in \mathbb{Z}\}$.

Gleichheit: $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow n | x - y \Leftrightarrow x \equiv y \bmod n$
Addition: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$
Multiplikation: $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$
Wohldefiniertheit: Ziel: "Klassen" zu addieren und multiplizieren.
Gegeben seinen K_1, K_2. Nun:

(a) **Wähle** x_1, x_2 **mit** $K_1 = \overline{x_1}$ **und** $K_2 = \overline{x_2}$

(b) **Addiere** $x_1 + x_2$

(c) **Definiere** $K_1 + K_2 := \overline{x_1 + x_2}$

Nun stellt sich das Problem der Wohldefiniertheit: Zeige, daß der Wert $K_1 + K_2$ unabhängig von der Auswahl der x_i mit $i = 1, 2$ ist.
Vor dem allgemeinen Beweis zuerst ein Beispiel:
Sei $n = 15$. Nun gilt: $\overline{1} = \overline{46}$ und $\overline{-6} = \overline{84}$ (In beiden Fällen handelt es sich um Repräsentanten derselben Kongruenzklasse). Führen wie eine Addition durch, so ergibt sich:

$$\overline{1 + (-6)} = \overline{-5} = \overline{10} = \overline{130} = \overline{46 + 84}$$

Die Auswahl spielt also in diesem Beispiel keine Rolle.
Allgemeiner Beweis: Sei $\overline{x_1} = \overline{x_1'}$ und $\overline{x_2} = \overline{x_2'}$.
Zu zeigen: $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1' + x_2'}$. Das heißt: $n | \underbrace{(x_1 + x_2) - (x_1' + x_2')}_{\doteqdot \Delta}$

Bemerkung: In diesem Fall ist alles womit wir arbeiten können $n | x_1 - x_1'$ und $n | x_2 - x_2'$.
Nun gilt für Δ:

$$\Delta = (x_1 + x_2) - (x_1' + x_2') \overset{\textbf{Vor.}}{=} n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = n \cdot (l_1 + l_2)$$

Also ist n ein Teiler von Δ.
Weiter ist zu zeigen: $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1' \cdot x_2'}$. Das heißt $n | \underbrace{x_1 \cdot x_2 - x_1' \cdot x_2'}_{\doteqdot \delta}$

Nun gilt für δ:

$$\begin{aligned} \delta &= x_1 \cdot x_2 - x_1' \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 \underbrace{- x_1' \cdot x_2 + x_1' \cdot x_2}_{=0} - x_1' \cdot x_2' \\ &= (x_1 - x_1') \cdot x_2 + x_1' \cdot (x_2 - x_2') = n \cdot l_1 \cdot x_2 + x_1' \cdot n \cdot l_2 = n \cdot (l_1 \cdot x_2 + l_2 \cdot x_1') \end{aligned}$$

Also ist n ein Teiler von δ.
Beispiele: Sei $n = 10$:

- $\overline{6} + \overline{9} = \overline{15} = \overline{5}$
- $\overline{6} \cdot \overline{9} = \overline{54} = \overline{4}$
- $\overline{4} \cdot \overline{5} = \overline{20} = \overline{0}$
- $\overline{7}^3 = \overline{343} = \overline{3}$
- $\overline{9}^{343461} = \left(\overline{9}^2\right)^{171730} \cdot \overline{9} = \left(\overline{1}\right)^{171730} \cdot \overline{9} = \overline{9}$

2.1.27 Satz (II.1.10)

Es gilt:

(i) $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)$ **ist abelsche Gruppe mit neutralem Element** $\overline{0}$. **Das additive Inverse zu** $\overline{a}$ **ist** $\overline{-a}$.

(ii) $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \cdot)$ **ist eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element** $\overline{1}$.

Beweis:
zu (i): **Assoziativität. Zu zeigen:** $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c} = \overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$.

Linke Seite: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c} \overset{\textbf{Def.}}{=} \overline{a+b}+\overline{c} \overset{\textbf{Def.}}{=} \overline{(a+b)+c}$.

Rechte Seite: $\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right) \overset{\textbf{Def.}}{=} \overline{a}+\overline{b+c} \overset{\textbf{Def.}}{=} \overline{a+(b+c)}$.

Da die Addition in $\mathbb{Z}$ **assoziativ ist folgt, daß die linke und die rechten Seite äquivalent sind.**

Betrachtung des neutralen Elements: $\overline{a}+\overline{0} = \overline{a+0} = \overline{a} = \overline{0+a} = \overline{0}+\overline{a}$

Betrachtung der Kommutativität: $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b} \overset{\mathbb{Z}}{=} \overline{b+a} = \overline{b}+\overline{a}$

Betrachtung des inversen Elements: $\overline{a}+\overline{-a} \overset{\textbf{Def.}}{=} \overline{a+(-a)} \overset{\mathbb{Z}}{=} \overline{0}$

zu (ii): **Beweis erfolgt analog.**

2.1.28 Eigenschaften von $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$:

- $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)$ **ist abelsche Gruppe**
  - **Neutrales Element:** $\overline{0} = \overline{n} = \overline{-2n} = \ldots$
  - **Inverses Element:** $-\left(\overline{a}\right) = \overline{-a} = \overline{n-a} = \ldots$
- $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \cdot)$ **ist kommutative Halbgruppe**
  - **Neutrales Element:** $\overline{1} = \overline{n+1} = \overline{-6n+1} = \ldots$
  - **Keine Gruppe, da** $\overline{0}\cdot\overline{x} = \overline{0\cdot x} = \overline{0} \neq \overline{1}$ **(Es existiert kein inverses Element für** $|n| > 1$**)**

Eine Anmerkung zur Notation: $\overline{a}-\overline{b} = \overline{a}+\left(\overline{-b}\right) = \overline{a-b}$.

2.1.29 Rechenbeispiele für Kongruenzklassen

Sei $n = 10$. **Berechnen Sie** $\overline{16}^3 - \overline{2}^6 + \overline{22}$. **Nun gilt:**
$\overline{16}^3 = \overline{16}^2\cdot\overline{16} = \overline{6}^2\cdot\overline{16} = \overline{(-4)}^2\cdot\overline{16} = \overline{16}\cdot\overline{16} = \overline{(-4)}^2 = \overline{16} = \overline{6}$
$\overline{2}^6 = \overline{2}^3\cdot\overline{2}^3 = \overline{8}\cdot\overline{8} = \overline{-2}\cdot\overline{-2} = \overline{4}$
$\overline{22} = \overline{2}$
Setzen wir nun ein, so erhalten wir: $\overline{16}^3 - \overline{2}^6 + \overline{22} = \overline{6}-\overline{4}+\overline{2} = \overline{8}-\overline{4} = \overline{4}$.
Sei $n = 10$. **Was ist** $\overline{9}^k$**?**
Der schlechte, da aufwendige Weg: $\overline{9}^k = \overline{9^k}$.
Der gute Weg: $\overline{9}^k = \overline{-1}^k$. **Nun gilt:**

$$\overline{-1}^k = \begin{cases} \overline{1} & k \textbf{ gerade} \\ \overline{-1} & k \textbf{ ungerade} \end{cases}$$

2.1.30 Invertierbarkeit von $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$

$\overline{a}$ ist invertierbar in $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \cdot)$ $\Leftrightarrow$ $\exists \overline{b} \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} : \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{1}$
Sind die Klassen in $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ invertierbar?

Element:	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
Dazugehöriges inverses Element	–	$\overline{1}$	–	$\overline{3}$	–	$\overline{5}$	–	$\overline{7}$

Die ungeraden Elemente sind leicht zu berechnen.
Warum gibt es keine inverses Element für $\overline{2}$?
Es gilt: $\overline{2} \cdot \overline{x} = \overline{2x} = \overline{y}$. $\overline{y}$ müßte nun $\overline{1}$ sein. Aber $\overline{y}$ ist gerade, weil $8|y - 2x$. Daher existiert für $\overline{2}$ kein inverses Element. Das Argument läßt sich analog auf alle anderen geraden Kongruenzklassen in $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ anwenden.

2.1.31 Der ggT (a, b)

ggT $(a, b) =$ größte natürliche Zahl, die a und b teilt.
Welche Inputs sind möglich: $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$.
Definition Teiler: $x|y \Leftrightarrow \exists k = k \cdot x = y$.
Anmerkung zur Null:

- **$x|0$, denn $0 \cdot x = 0$, wobei die erste Null k ist und die zweite Null y.**
- **$0|x \Rightarrow x = 0$.**

Wichtige Eigenschaften des ggT (a, b):

(i) **ggT** $(a, b) =$ **ggT** $(a, b - a \cdot q)$ **mit $a \neq 0, q \in \mathbb{Z}$.**

(ii) **ggT** $(a, 0) = |a|$

(iii) **ggT** $(a, b) =$ **ggT** (b, a)

Beweise:
Zu (iii): Klar, da a und b symmetrisch in die Definition eingehen.
Zu (ii): Klar, da alle Zahlen Null teilen. Der größte Teiler von a und Null ist $|a|$
Zu (i): Sei $d =$ ggT (a, b), $e =$ ggT $(a, b - q \cdot a)$. $d|a, b$.
Das heißt $a = x \cdot d$ und $b = y \cdot d \Rightarrow d|a, (b - a \cdot q = y \cdot d - (x \cdot d) \cdot q = (y - x \cdot q) \cdot d)$.
Das heißt: $d|a, a - b \cdot q \overset{\textbf{Def.}}{\Rightarrow} d \leq e$.
Nun bleibt zu zeigen: $e \leq d$ (dann folgt $e = d$).
Es ist $b = (b - a \cdot q) + a \cdot q = (b - a \cdot q) - a \cdot (-q)$. Also $b = b' - a \cdot (-q)$.
Hier noch einmal eine Verdeutlichung:

$$\begin{array}{ccccc} a, b & \rightarrow & a, b' & \rightarrow & a, b \\ d & \leq & e & \leq & d \end{array}$$

Division mit Rest: $a \neq 0, b = a \cdot q + r$ mit $0 \leq r \leq |a| - 1$. $r = b - a \cdot q$.
Nach Eigenschaft (i) folgt: ggT $(a, b) =$ ggT (a, r).

2.1.32 Euklidscher Algorithmus

Berechnen Sie den $\mathbf{ggT}(196, 217)$. Nun gilt:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \mathbf{ggT}(196,217) & = & \mathbf{ggT}(196,?) & ? : 217 = 196\cdot 1 + 21 \\
\Rightarrow & \mathbf{ggT}(196,217) & = & \mathbf{ggT}(196,21) = \mathbf{ggT}(21,?) & ? : 196 = 21\cdot 9 + 7 \\
\Rightarrow & \mathbf{ggT}(196,21) & = & \mathbf{ggT}(21,7) = \mathbf{ggT}(7,?) & ? : 21 = 7\cdot 3 + 0 \\
\Rightarrow & \mathbf{ggT}(7,21) & = & \mathbf{ggT}(7,0) = |7| = 7 &
\end{array}$$

$\mathbf{ggT}(a, b)$ liefert den größten gemeinesamen Teiler von a und b.
Seien $a, b \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rll}
a_0 = b\cdot q_1 + a_2 & 0 \le a_2 \le b-1 & \\
b = a_2\cdot q_2 + a_3 & 0 \le a_3 \le a_2 - 1 & \\
a_2 = a_3\cdot q_3 + a_4 & 0 \le a_4 \le a_3 - 1 & \\
a_3 = a_4\cdot q_4 + a_5 & 0 \le a_5 \le a_4 - 1 & \\
\vdots & \vdots & \\
a_{i-1} = a_i\cdot q_i + a_{i+1} & 0 \le a_{i+1} \le a_i - 1 & a_{i+1} \neq 0 \\
a_i = a_{i+1}\cdot q_{i+1} + 0 & &
\end{array}$$

Dann ist a_{i+1} der $\mathbf{ggT}(a, b)$.
Der Euklidische Algorithmus liefert $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbf{ggT}(a, b) = x\cdot a + y\cdot b$.

2.1.33 Beispiel: Berechnung von $\mathbf{ggT}(471, 113)$

Es gilt:

$$\begin{array}{rcl}
471 & = & 113\cdot 4 + 19 \\
113 & = & 19\cdot 5 + 18 \\
19 & = & 18\cdot 1 + 1 \\
18 & = & 1\cdot 18 + 0 \\
 & & \\
\Rightarrow \mathbf{ggT}(471,113) & = & 19 - 18\cdot 1 \\
 & = & 19 - (113 - 19\cdot 5)\cdot 1 \\
 & = & 19\cdot 6 - 113\cdot 1 \\
 & = & (471 - 113\cdot 4)\cdot 6 - 113\cdot 1 \\
 & = & 471\cdot 6 - 113\cdot 25
\end{array}$$

Damit ergibt sich: $\mathbf{ggT}(471, 113) = 1 = 471\cdot 6 - 113\cdot 25$

2.1.34 Satz (II.1.11): Invertierbarkeit in$(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \cdot)$

Sei $\overline{a} \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ gegeben. Dann besitzt $\overline{a}$ ein (multiplikatives) Inverses genau dann, wenn $\mathbf{ggT}(a, n) = 1$. Aus der Darstellung $1 = x\cdot a + y\cdot n$ ergibt sich:

$$(\overline{a})^{-1} \quad = \quad \overline{x}$$

Nicht vollständiger Beweis:

$$1 = x\cdot a + y\cdot n \quad \Rightarrow \quad \overline{1} = \overline{x\cdot a + y\cdot n} = \overline{x\cdot a} + \underbrace{\overline{y\cdot n}}_{=0} = \overline{x}\cdot\overline{a}$$

Also: $\overline{1} = \overline{x}\cdot\overline{a}$.

2.1.35 Erweiterter Euklidscher Algorithmus

ggT (a, b)**,** $a_1 = a, a_2 = b$**. Für** $i \geq 2 : a_{i-1} = a_i \cdot q_i + a_{i+1}$ **mit** $0 \leq a_{i+1} \leq |a_i| - 1$**.**
STOP: $a_{i+1} = 0$**. OUTPUT: ggT** $(a, b) = a_i$**.**
In der i**-ten Schleife: ggT** $(a_{i-1}, a_i) =$ **ggT** (a_{i+1}, a_i)**. Eventuell: ggT** $(a, 0) = |a|$**.**
Hier nun der erweiterte euklidische Algorithmus:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \cdot q_2 + a_3 \\ a_2 &= a_3 \cdot q_3 + a_4 \\ \vdots \; &\vdots \; \vdots \\ a_{i-3} &= a_{i-2} \cdot q_{i-2} + a_{i-1} \\ a_{i-2} &= a_{i-1} \cdot q_{i-1} + a_i \\ a_{i-1} &= a_i \cdot q_i + 0 \end{aligned}$$

Aus der vorletzten Zeile folgt:

$$d = a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \cdot (-q_{i-1})$$

Aus der drittletzten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} d &= a_{i-2} + (a_{i-3} + a_{i-2} \cdot (-q_{i-2})) \cdot (-q_{i-1}) \\ &= a_{i-3} + a_{i-2} \cdot (1 + q_{i-2} \cdot q_{i-1}) \end{aligned}$$

Eventuell erhalten wir:

$$\begin{aligned} d &= a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \\ &= a \cdot x + b \cdot y \end{aligned}$$

Noch eine Anmerkung zur Effizienz des erweiterten Euklidischen Algorithmus
$a, b < N \Rightarrow$ **dann läßt sich der ggT** (a, b) **in höchstens** $2 \cdot \ln N$ **Runden berechnen. Eine Runde ist dabei eine Division mit Rest.**
Annahme $N = 10^{100}$**. Nun müssen wir nur noch** $2 \cdot \ln 10^{100}$ **berechnen um die maximale Anzahl der Runden zu erhalten:**

$$2 \cdot \ln 10^{100} = 100 \cdot 2 \cdot \ln 2 \approx 200 \cdot 2.3 = 460$$

Man braucht also maximal 460 Divisionen mit Rest um den ggT zweier 100-stelliger Zahlen zu berechnen.
Behauptung: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1} \Leftrightarrow$ **ggT** $(a, n) = 1$
"$\Leftarrow$**":** $1 = ax + ny \Rightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$**.**
"$\Rightarrow$**":** $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1} \Rightarrow a \cdot b = 1 + l \cdot n$ **für ein** l**.** $d | a, n \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$**.**

2.1.36 $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$ ist Gruppe bezüglich der Multiplikation

Es gilt: $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \cdot) \supseteq \{\overline{a} | \, \overline{a} \text{ ist invertierbar}\} \overset{(\mathbf{II}.1.11)}{=} \{\overline{a} | \, \mathbf{ggT}\,(a,n) = 1\}$
Nun definieren wir: $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^* := \{\overline{a} \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} | \, \overline{a} \text{ ist invertierbar}\}$
Beweis:

- **Assoziativität: klar, denn die Multiplikation in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ist assoziativ.**
- **neutrales Element:** $1 \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$, $\overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a}$.
- **Inverses Element in $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$: Zu $\overline{a}$ ist ein $\overline{b}$ zu finden mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{1}$.**
  Nach Definition ($\overline{a}$ ist invertierbar) $\exists \overline{b}$ mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{1}$.
  Nach Definition der Invertierbarkeit ist auch $\overline{b}$ invertierbar.
- **Noch zu zeigen: Multiplikation liefert Verknüpfung auf $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$.**
  Zu zeigen: $\overline{a}, \overline{b}$ sind invertierbar $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\overline{a} \cdot \overline{b}$ ist invertierbar.

Beweis von $(*)$. Zu zeigen $\exists \overline{c}$ mit $\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{c} \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = 1$.
[Uns steht zur Verfügung: $\overline{a}, \overline{b}$ sind invertierbar: $\overline{a} \cdot \overline{a_1} = \overline{a_1} \cdot \overline{a} = 1$ und $\overline{b} \cdot \overline{b_1} = \overline{b_1} \cdot \overline{b} = 1$]
Es folgt:

$$\begin{aligned} \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) \cdot \left(\overline{a_1} \cdot \overline{b_1}\right) &= \left(\overline{a} \cdot \overline{a_1}\right) \cdot \left(\overline{b} \cdot \overline{b_1}\right) = 1 \cdot 1 = 1 \\ \left(\overline{a_1} \cdot \overline{b_1}\right) \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) &= \left(\overline{a_1} \cdot \overline{a}\right) \cdot \left(\overline{b_1} \cdot \overline{b}\right) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Also $\overline{c} = \left(\overline{a_1} \cdot \overline{b_1}\right) = \left(\overline{b_1} \cdot \overline{a_1}\right)$.
Bemerkungen:

(i) $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$ **ist eine abelsche Gruppe**

(ii) $\left|\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*\right| =: \varphi(n)$. $\varphi(n)$ **ist die Eulersche φ-Funktion.**

2.1.37 Eulersche φ-Funktion

Für die Eulersche φ-Funktion gilt:

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} p^{\alpha_p - 1}(p-1) \quad \textbf{bei } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$$

2.1.38 Zusammenfassung von Kapitel (II.1)

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ **sind abelsch.**
- $\mathbf{S}_n$ **mit** $|\mathbf{S}_n| = n!$ **ist nicht abelsch für** $n \geq 3$.
- $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)$ **mit** $|(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)| = n$ **ist abelsch.**
- $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$ **mit** $\left|\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*\right| = \varphi(n)$ **ist abelsch.**

2.2 Kapitel (II.2): Ringe und Körper

2.2.1 Definition (II.2.a): Ring

Eine Menge $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ mit zwei Verknüpfungen ("$+$": Addition genannt, "$\cdot$": Multiplikation genannt) heißt Ring, wenn sie folgende Axiome erfüllt sind:

- **$(\mathbf{R}, +)$ ist abelsche Gruppe**
- **$(\mathbf{R}, \cdot)$ ist Halbgruppe**
- **Die Distributivgesetze gelten: $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$:**

$$a\,(b+c) = ab + ac \qquad (a+b)\,c = ac + bc$$

  (ausdrücklich: Nichtkommutativität von "$\cdot$")

Anmerkungen zur Notation:

- **Neutrales Element bezüglich der Addition: 0, Nullelement mit**

$$0 + a = a + 0 = a$$

- **Inverses Element bezüglich der Addition: $(-a)$ mit**

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

- **Die Subtraktion ist die Addition des inversen Elements bezüglich der Addition:**

$$a - b := a + (-b)$$

- **Neutrales Element bezüglich der Multiplikation (falls vorhanden): 1, Einselement mit:**

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

2.2.2 Beispiele für Ringe

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)\,, (\mathbb{Q}, +, \cdot)\,, (\mathbb{R}, +, \cdot)$ **(aus der Schule bekannt)**
- $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ **(aus der Vorlesung bekannt)**

Nachweis, daß $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ ein Ring ist:

- **Additive Gruppe: schon erledigt.**
- **Multiplikative Halbgruppe: schon erledigt.**
- **Untersuchung ob die Distributivgesetze gelten:**

<u>1. Distributivgesetz</u>:

$$\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \left(\overline{b+c}\right) = \overline{a \cdot (b+c)} = \overline{ab + ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$$

Der Trick: Wir führen Operationen in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ auf Operationen in $\mathbb{Z}$ zurück.
<u>2. Distributivgesetz</u>: Das 2. Distributivgesetz gilt, da die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ kommutativ ist und das 1. Distributivgesetz gilt. $\square$
<u>Einselemet</u>: $\overline{1}$ ist das Einselement in $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$:

$$\overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{1 \cdot a} = \overline{a} = \overline{a \cdot 1} = \overline{a} \cdot \overline{1}$$

2.2.3 Definition (II.2.b): kommutativer Ring mit 1

$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ heißt kommutativer Ring mit 1 (Einselement) falls gilt:

- **$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ ist ein Ring.**
- **Die Multiplikation ist kommutativ.**
- **$\exists 1$ (Es existiert ein Einselement)**

Es existiert aber ein kleines Problem: additive und multiplikative "Vielfachheit" eines Elements:
Sei $(\mathbf{H}, \cdot)$ eine Halbgruppe:
Multiplikative Vielfachheit: $a^n :=$ n-fache Verknüpfung von a mit sich selbst für $n \geq 1$.
Additive Vielfachheit:

- **Für** $n \in \mathbb{N}$ $\underbrace{a + \ldots + a}_{n-\text{mal}} =: n \cdot a$
- $n = 0$**:** $\underset{\in \mathbb{Z}}{0} \cdot a = \underset{\in \mathbb{R}}{0}$
- $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$**:** $n \cdot a := |n| \cdot (-a) = \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{|n|\,\textbf{-mal}}$

Es gelten die Vielfachengesetze (früher: Potenzgesetze siehe (II.1.7)) in Gruppen für $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} n \cdot a + m \cdot a &= (n+m) \cdot a \\ n \cdot (m \cdot a) &= (n \cdot m) \cdot a \\ -(-a) &= a \\ -(a+b) &= (-a) + (-b) \\ n \cdot (a+b) &= n \cdot a + n \cdot b, \quad \textbf{falls} \quad a + b = b + a \end{aligned}$$

Die Vielfachengesetze bezüglich der Multiplikation mibt $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\textbf{-mal}} \quad \textbf{mit} \quad n \geq 1 a^0, \qquad := 1 \;\; \textbf{falls} \;\; 1 \in \mathbf{R}$$

Es gelten die altbekannten Potenzgesetze bezüglich der Multiplikation:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

2.2.4 Satz (II.2.1): Rechenregeln auf Ringen

Sei $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ Ring, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Nun gilt:

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$**,** $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(iii) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$**,** $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Beweise:
Zu (i): Es gilt : $0 \cdot a + 0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a$. Nun addieren wir $-(0 \cdot a)$ auf beiden Seiten der Gleichung und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 \cdot a + \underbrace{0 \cdot a + (-(0 \cdot a))}_{=0} &= \underbrace{0 \cdot a + (-(0 \cdot a))}_{=0} \\ a \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Wir verfahren analog für $a \cdot 0 = 0$.
Zu (ii): Es gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) + a \cdot (b) &= a \cdot \underbrace{((-b)+b)}_{=0} = a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot (b) + a \cdot (-b) &= a \cdot \underbrace{(b+(-b))}_{=0} = a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Also folgt: $a \cdot (-b) = -a \cdot b$. Wir verfahren analog für $(-a) \cdot b = -a \cdot b$.
Wenden wir nun die obige Regel an, so erhalten wir für $(-a) \cdot (-b)$:

$$(-a) \cdot (-b) = [-(-a)] \cdot b = a \cdot b$$

Wir nutzen die Tatsache aus, daß $-(-a) = a$ ist. (Siehe Vielfachengesetze).
Zu (iii): Es gilt:

$$(a-b) \cdot c = (a + (-b)) \cdot c = a \cdot c + (-b) \cdot c = a \cdot c + (-b \cdot c) = a \cdot c - b \cdot c$$

Wir verfahren analog für $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$.

2.2.5 Definition (II.2.c): Körper

<u>Bemerkung</u>: R sei Ring mit 1. $x \in \mathbf{R}$ sei invertierbar wenn gilt: $\exists y \in \mathbf{R} : x \cdot y = y \cdot x = 1$.
Voraussetzung: $1 \neq 0$. Die Null ist nicht invertierbar, denn $0 \cdot x = 0 \neq 1$.
$\Rightarrow \{x \in \mathbf{R} | \, x \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

<u>Definition</u>: Eine kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ heißt Körper, wenn jedes Element in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ invertierbar ist (bezüglich der Multiplikation).
Bemerkung (der pathologische Fall): Eine Ring mit $1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R} = \{0\}$.

<u>Beweis</u>:
"$\Rightarrow$": $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$
"$\Leftarrow$": $\mathbf{R} = \{0\} : 0 + 0 = 0,\ 0 \cdot 0 = 0$ ist Ring mit $1 = 0$.
Von nun an soll für alle betrachteten Ringe gelten $1 \neq 0$.

2.2.6 Beispiele für Körper

Beispiele:

(a) **$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da es inverse Elemente gibt, die nicht in $\mathbb{Z}$ enthalten sind.**

(b) **$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Es ist der kleinste Körper $\supseteq \mathbb{Z}$.**

(c) **$(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.**

(d) **$(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ ist Körper, wenn p Primzahl ist Beweis siehe (II.2.2).**

2.2.7 Satz(II.2.2): $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ ist Körper $\Leftrightarrow n$ ist Primzahl.

"$\Rightarrow$" Sei $n = r \cdot s$, $1 < r, s < n$. Es folgt: $\overline{n} = \overline{r} \cdot \overline{s}$. Also $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{0}$. Es ist $\overline{r} \neq 0$. Wäre $\overline{r}$ invertierbar, so $\exists \overline{t} : \overline{t} \cdot \overline{r} = \overline{1}$. Es folgt: $\underbrace{\overline{t} \cdot \overline{0}}_{=\overline{0}} = \underbrace{\overline{t} \cdot \overline{r}}_{=\overline{1}} \cdot \overline{s} = \overline{1} \cdot \overline{s}$. Also: $n|s \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $\overline{n} = \overline{r} \cdot \overline{s}$. Also ist n eine Primzahl.

"$\Leftarrow$": Schon früher bewiesen: $\overline{a}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ ggT$(a, n) = 1$. Betrachtung der Elemente in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$. Für $a = 1, 2, \ldots, n-1$ ist der ggT$(a, n) = 1$, da n eine Primzahl ist. Damit ist jedes Element in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$ invertierbar.

2.2.8 Definition (II.2.c): Alternative Definition für Körper

$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ heißt Körper :$\Leftrightarrow$

- **(i)** **$(\mathbf{R}, +)$ ist abelsche Gruppe (0 ist neutrales Element)**
- **(ii)** **$(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe**
- **(iii)** $\forall a, b, c \in \mathbf{R} : a \cdot (b + c) = ab + ac$

Bemerkung: 1. Definition $\Leftrightarrow$ 2. Definition
Beweis:
"$\Rightarrow$" Noch zu zeigen:

- **(a)** $\forall a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : a \cdot b \neq 0$ **(Wohldefiniertheit)**
- **(b)** **Assoziativität**
- **(c)** **Einselement**
- **(d)** **Invertierbarkeit**

Zu (a): Angenommen: $a \cdot b = 0, a \neq 0$. Multiplikation von links mit a^{-1} ergibt:

$$\begin{aligned} a^{-1} \cdot (a \cdot b) &= a^{-1} \cdot 0 \\ \left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot b &= 0 \\ 1 \cdot b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Aber: $b = 0$ ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Zu (b): klar, weil $(\mathbf{R}, \cdot)$ assoziativ.
Zu (c): $1 \neq 0$, also $1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$: $1 \cdot a = a = a \cdot 1$
Zu (d): $a \neq 0$. Zu zeigen: $\exists b \neq 0$ mit $a \cdot b = 1$
$\exists b$ mit $a \cdot b = 1$ nach der 1. Definition. $b \neq 0$, sonst $a \cdot b = a \cdot 0 = 0 \neq 1$.
"$\Leftarrow$": Selbst oder nie.

Der Körper $\mathbb{C}$

2.2.9 Gründe für ein Studium weiterer Körper:

(a) $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$:

- **Gleichungen lösen wie zum Beispiel:** $x^2 - 2 = 0$.
- **Längen in der Geometrie: Nach den Vorstellungen der Griechen sind alle Strecken kommensummerable (haben ein rationales Streckenverhältnis). Nach Pythagoras ist aber die Hypothenuse eines rechtewinkligen Dreiecks mit den Katheten der Länge Eins nicht kommensummerable, da die Hypothenuse die Länge** $\sqrt{2}$ **hat.**
- **Kreisumfang:** πr^2. **Es gibt keine algebraische Gleichung der Form**

$$\pi^k + \alpha_1 \cdot \pi^{k-1} + \ldots + \alpha_k = 0$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. **Eine andere transzendentale Zahl ist zum Beispiel** e.

(b) Endliche Körper:

- **Teilbarkeitslehre (**$\Rightarrow$ **Kongruenzrelation)**
- **Kodierungstheorie**
- **Kryptographie**

(c) $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$**:**

- **Studium <u>weiterer</u> Gleichungen. Zum Beispiel:**

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 + 4x + 9 &= 0 \\ x^{27} + 22x^{13} + x^6 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

2.2.10 Herleitung von $\mathbb{C}$

Angenommen $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{R}, \exists i : i^2 + 1 = 0$. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad a + ib \in \mathbf{K}\, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
Gleichheit zweier Elemente:
Behauptung: $a + bi = a' + b'i$ **mit** $a, a', b, b' \in \mathbb{R} \Rightarrow a = a', b = b'$.
Beweis:

$$\begin{aligned} (a - a') &= (b' - b) \cdot i && \mid \textbf{quadrieren} \\ (a - a')^2 &= (b' - b)^2 \cdot i^2 \\ (a - a')^2 &= -(b' - b)^2 \\ (a - a')^2 + (b' - b)^2 &= 0 && \textbf{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Daher: $(a' - a)^2 = 0 \wedge (b' - b)^2 = 0 \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$
Multiplikation zweier Elemente:

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &\overset{D}{=} a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di) \\ &\overset{D}{=} ac + adi + bic + bidi \\ &\overset{A+K}{=} ac + adi + bci + bdi^2 \\ &\overset{A+K}{=} (ac - bd) + i \cdot (ad + bc) \end{aligned}$$

Aus der Annahme $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$, **Körper,** $i^2 + 1 = 0, i \in \mathbb{K}$ **folgt:** $\mathbb{K} \supseteq \{a + bi | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ **ist Ring.**

Behauptung: $a + bi \neq 0 \Rightarrow a + bi$ **ist invertierbar.**
Ohne dies jetzt im Detail herzuleiten glauben wir:

$$(a+bi)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i\right)$$

Beweis:

$$(a+bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i\right) = \frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

$\Rightarrow \mathbf{K} \supseteq \{a + bi | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ **ist sogar Körper.**

2.2.11 Konstruktion von $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$
Addition: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ **(komponentenweise)**
Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

2.2.12 Satz (II.2.3)

$\mathbb{C}$ **ist ein Körper:**

- **Nullelement:** $(0, 0)$
- **Einselement:** $(1, 0)$
- **Inverses Element für** $(a, b) \neq (0, 0)$**:**

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

Beweise: Nachrechnen. Beispiele dazu:
Assoziativität bezüglich der Multiplikation: Seinen $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$**:**
Behauptung: $[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, d) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$**.**
Auf der linken Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned}
[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,d) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) \\
&= ((ac-bd)\cdot e - (ad+bc)\cdot f, (ac-bd)\cdot f + (ad+bc)\cdot e) \\
&= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] &= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) \\
&= (a\cdot(ce-df) - b\cdot(cf+de)\,, a\cdot(cf+de) + b\cdot(ce-df)) \\
&= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)
\end{aligned}$$

Da in $\mathbb{R}$ Addition und Multiplikation kommutativ sind, erhalten wir dasselbe Ergebnis für die linke und rechte Seite.
Neutrales Element:

$$(1,0)\cdot(a,b) = (1\cdot a - 0\cdot b, 1\cdot b + 0\cdot a) = (a,b)$$
$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$$

Inverses Element:

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= \left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2},a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}+b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\right)\\
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{-a\cdot b+a\cdot b}{a^2+b^2}\right)\\
&= (1,0)\\
\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\cdot(a,b) &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\cdot a-\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot b,\frac{a}{a^2+b^2}\cdot b+\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot a\right)\\
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{a\cdot b-a\cdot b}{a^2+b^2}\right)\\
&= (1,0)
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die Lösung der Gleichung: $x^2+1=0$ **untersuchen.**
Genauer: $\exists\,(a,b)$ **mit** $(a,b)^2+(1,0)=(0,0)$**?**
Das heißt: $\left(a^2-b^2+1,2a\cdot b\right)=(0,0)$. **Wir erhalten also ein Gleichungssystem in** $\mathbb{R}$**:**

$$\begin{aligned}
a^2-b^2+1 &= 0\\
\wedge\qquad 2ab &= 0
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert: $a=0$ **oder** $b=0$**.**
Für $a=0$ **ergibt sich:** $-b^2+1=0\Rightarrow b=\pm1$**.**
Für $b=0$ **ergibt sich:** $a^2+1=0$**. Diese Gleichung hat keine Lösung in** $\mathbb{R}$**.**
Falls eine Lösung vorhanden ist muß gelten: $a=0,b=\pm1$**.**
Nachrechnen liefert $(0,\pm1)$ **als die beiden Lösungen.**
Die Gleichung $x^2+1=0$ **hat also genau zwei Lösungen in** $\mathbb{C}$**.**

2.2.13 Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$

Wir konstruieren nun eine Funktion φ **mit:** $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}:a\mapsto(a,0)$**.**
Eigenschaften von φ**:**

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)\qquad \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

$\varphi:\mathbb{R}\to\{(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\},\varphi$ **ist bijektiv.**
Stichwort: Isomorphismus.
Beweise (hier nur für "·", "+" ist analog):

$$\begin{aligned}
\varphi(a\cdot b) &= (a\cdot b,0)\\
\varphi(a)\cdot\varphi(b) &= (a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0)
\end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung: $\mathbb{R}^2$ ist eine Ebene:

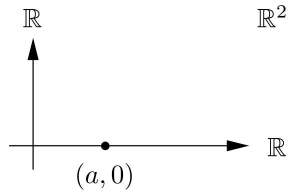

Abbildung II-4: $\mathbb{R}$ eingebettet als "x-Achse"

Anmerkung: Bei der "x-Achse" spricht man auch von der reellen Achse.
Nun die komplexe 1 und 0; i und $-i$ im $\mathbb{C}$:

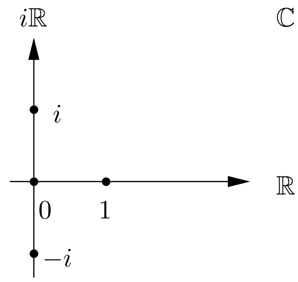

Abbildung II-5: Komplexe 1 und 0, i und $-i$ im Körper $\mathbb{C}$

Wichtig: $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot i$**, da**

$$(a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Also folgt: $(a, b) \mapsto a + ib$**. Dies läßt sich geometrisch folgendermaßen darstellen:**

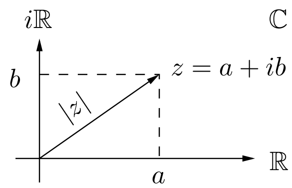

Abbildung II-6: geometrische Darstellung von $a + ib$

2.2.14 Rechenregeln für komplexe Zahlen

- **Gleichheit zweier komplexer Zahlen:** $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$
- **Addition zweier komplexer Zahlen:** $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i \cdot (b + d)$
- **Multiplikation:** $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i \cdot (ad + bc)$
- **Inverse Element:** $a + bi \neq 0 \Rightarrow (a + ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i \cdot \dfrac{b}{a^2 + b^2}$
- **Zusätzlich gilt:** $i^2 = -1$

2.2.15 Beispiele für das Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^4 - 4 = 0$ in $\mathbb{C}$.
Nun gilt:

$$(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = \left(1+2i+i^2\right)^2 = (1-1+2i)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$$

Das heißt $(1+i)^4$ ist eine Lösung der Gleichung $x^4 - 4 = 0$. Wieviele Lösungen hat nun die Gleichung $x^4 + 4 = 0$ in $\mathbb{C}$?

Sei $x^4 + 4 = 0$, dann $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{2} = \pm i$. **Also** $x^2 = 2i \vee x^2 = -2i$.

Anmerkung: $y^2 = 1 \Rightarrow (y+1)\cdot(y-1) = 0 \Rightarrow y = \pm 1$.

Aus $x^2 = 2i$ folgt: $x^2 = (1+i)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{x}{1+i}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm(1+i)$.

Aus $x^2 = -2i$ folgt: $x^2 = -(1+i)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{x}{1+i}\right)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{1+i} = \pm i$. **Nun gilt:**

$$x = i\cdot(1+i) = i - 1 = -1 + i$$
$$\vee \qquad x = -i\cdot(1+i) = 1 - i$$

Also ergeben sich folgende Kandidaten für Lösungen der Gleichung $x^4 + 4 = 0$:

$$\pm(1+i), -1+i, 1-i$$

Durch einsetzen und ausrechnen ergibt sich, daß alle vier Kandidaten Lösungen sind.

2.2.16 Satz (II.2.4): Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Dann besitzt $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots + x_n \cdot x^n$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

2.2.17 Satz (II.2.5): Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(i) $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{z}$

(ii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

(iii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(iv) $z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$

(v) $\overline{w} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

(vi) $\overline{\overline{z}} = z$

Beweise: Seien $z = a + i\cdot b$, $w = c + i \cdot d$ **mit** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
Zu (i):

$$z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a - ib \quad \Leftrightarrow \quad ib = -ib \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$$

Zu (ii):

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad \textbf{da} \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ **folgt direkt, indem wir die Wurzel ziehen.**

Zu (iii)**: Für die Addition:**

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i\cdot(b+d)}\\ &= (a+c)-i\cdot(b+d) = (a-ib)+(c-id) = \overline{z}+\overline{w}\end{aligned}$$

Für die Multiplikation:

$$\begin{aligned}\overline{z\cdot w} &= \overline{(a+ib)\cdot(c+id)} = \overline{ac-bd+i\cdot(bc+ad)}\\ &= ac-bd-i\cdot(bc+ad) = ac-bd-ibc-iad\\ &= (a-ib)\cdot(c-id) = \overline{(a+ib)}\cdot\overline{(c+id)} = \overline{z}\cdot\overline{w}\end{aligned}$$

Zu (iv)**: folgt aus** (ii)**.**
Zu (v): $\overline{w}\neq 0$. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}\cdot\overline{w} = \overline{\frac{z}{w}\cdot w} = \overline{z} \quad\Rightarrow\quad$ **Behauptung.**
Zu (vi): $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$

2.2.18 Satz (**II**.2.6)

Seien $z,w\in\mathbb{C}$. **Dann gilt:**

(i) $|z|\geq 0$, $|z|=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=0$

(ii) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(iii) $|z+w|\leq|z|+|w|$ **(Dreiecksungleichung)**

(i) **und** (iii) **folgen aus den entsprechenden Sätzen für die Normen im** $\mathbb{R}^2$**.**
Beweis zu (ii)**: Seien** $z=a+i\cdot b$, $w=c+i\cdot d$ **mit** $a,b,c,d\in\mathbb{R}$
Nun gilt:

$$\begin{aligned}|z\cdot w| &= |(a+ib)\cdot(c+id)| = |ac-bd+i\cdot(ab+cd)| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ab+cd)^2}\\ &= \sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2b^2+2abcd+c^2d^2}\\ &= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2b^2+c^2d^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} = |z|\cdot|w|\end{aligned}$$

2.2.19 Die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

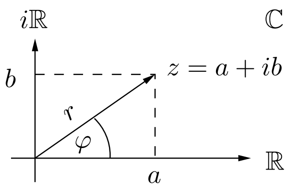

Abbildung II-7: Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Die Polarkoordinatendarstellung für $z\neq 0$ **ist bestimmt durch** (r,φ)**.**
Dabei $r\in\mathbb{R}_+$, $\varphi\in[0,2\pi[$. **Es ist** $r=|z|$.
Definition: $\varphi = \arg(z)$ **(Lies "das Argument von** z**")**

2.2.20 Satz (II.2.7): Umrechnungsformeln

(i) Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. Dann ist $z = a + ib = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

(ii) Sei $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Dann ist $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

Beweise sollten in der Analysis erfolgen.

2.2.21 Geometrische Bedeutung der Addition in $\mathbb{C}$

Seien z_1, z_2 in der Form $z_k = a_k + ib_k$, $k = 1, 2$ gegeben.
Die Adiition in $\mathbb{C}$ geht auf die Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$ zurück.

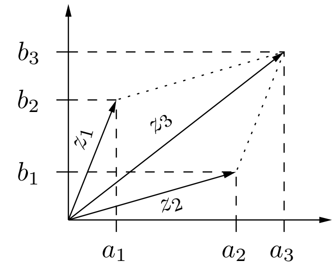

Abbildung II-8: Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

2.2.22 Satz (II.2.8) Multiplikation in $\mathbb{C}$

Seien zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinaten gegeben mit $|z_j| = r_j \cdot (\cos\varphi_j + i \cdot \sin\varphi_j)$ für $j = 1, 2$. Dann gilt: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

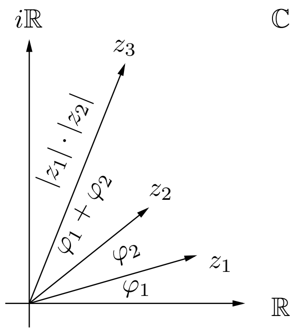

Abbildung II-9: Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Beweis: Vorgriff auf die Analysis:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \\
\sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2
\end{aligned}$$

Also gilt für $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)] \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))
\end{aligned}$$

2.2.23 Satz (II.2.9): Formel von De Moivre

Ist $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$.
Beachte: $n \cdot \varphi$ oder $\varphi_1 + \varphi_2$ ist immer als $\bmod 2\pi$ beziehungsweise Modulo 360^0 zu verstehen.
In der Analysis: $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$ (komplexe Exponentialfunktion)
Dann: $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, $z = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^n \cdot e^{n \cdot i\varphi}$
Anwendung: Ziehen der n-ten Wurzel aus einer komplexen Zahl
(Vergleiche Aufgabe ? auf Übungsblatt 7)
Fazit: 3 Deutungen von $\mathbb{C}$:

(1) **$(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nützlich für Addition, Betrag, etc.**

(2) **$a + ib$. Nützlich für Rechnungen $(i^2 = -1)$.**

(3) **Polarkoordinaten. Nützlich für Multiplikation, Wurzel ziehen, etc.**

Warnung: Oft wird geschrieben: $i = \sqrt{-1}$.
Zum einen: $i = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = -1\}$. Wenn $i = \sqrt{-1}$, so ist auch $-i = \sqrt{-1}$, aber $i \neq -i$.
Zum Beispiel:

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Wir erhalten einen Widerspruch.

2.2.24 Definition (II.2.d): Charakteristik eines Körpers $\mathbb{K}$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die Charakteristik eines Körpers $\mathbb{K}$ ist endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}$, so daß

$$n \times 1_{\mathbb{K}} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \ldots + 1_{\mathbb{K}}}_{n - \textbf{mal}} = 0_{\mathbb{K}}$$

Beispiele:

(a) **Die Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben keine Charakteristik.**

(b) **Der endliche Körper $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_p$ hat die Charakteristik p.**

Allgemein gilt für endliche Körper: char $(\mathbb{K}) = \min\{n \in \mathbb{N} : n \times 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\} \overset{!}{=}$ Primzahl
Anmerkungen:

- **char $(\mathbb{K}) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \times 1_{\mathbb{K}} = 0$ (pathologischer Fall - geht nicht)**
- **char $(\mathbb{K}) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 \times 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \quad \Rightarrow \quad \forall a \in \mathbb{K}$: $a + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -a$.**
  Ein Beispiel: $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_2$
- **Umgekehrt: $\forall a \in \mathbb{K}$: $a + a = 0 \quad \Rightarrow \quad$ char $(\mathbb{K}) = 2$**

2.3 Kapitel (II.3): Vektorräume

2.3.1 Definition (II.3.a): Vektorraum:

$\mathbb{K}$ sei ein Körper. $\mathbf{V} = (\mathbf{V}, +, \cdot)$ mit:

- **Addition: $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$**
- **skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.**

Das Tripel $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ wird als $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K}$-VR) bezeihnet.
Nun müssen folgende Axiome erfüllt sein:

(V1) $(\mathbf{V}, +)$ **ist abelsche Gruppe, das neutrale Element** 0 **heißt Nullvektor.**
(V2) Für alle $v, w \in \mathbf{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **soll gelten (Distributivgesetze)**
- **(a)** $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ **(Verträglichkeit der Multiplikation)**
- **(b)** $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
- **(c)** $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
- **(d)** $1 \cdot v = v$

2.3.2 Beispiele für Vektorräume

(a) Standard n-dimensionaler Vektorraum:
$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ **ist $\mathbb{K}$-Vektorraum mit**

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

Nun prüfen wir nach, ob die Axiome erfüllt sind:
Abelsche Gruppe (Stichworte):

- **Assoziativität: auf $+$ in $\mathbb{K}$ zurückführen**
- $0 = (0, \ldots, 0)$
- **Inverses Element bezüglich der Addition:** $-(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$

Anmerkung: Man muß sich von der Vorstellung verabschieden, daß die Elemente eines Vektorraums ("Vektoren") eine Richtung und Länge haben, wie zum Beispiel der $\mathbb{R}^n$. Ein Beispiel für einen Vektorraum, dessen Objekte keine Länge oder Richtung mehr haben ist $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.
(b) $M \neq \phi, \mathbf{V} = \{f : M \to \mathbb{K}\}$. Nun müssen Addition und skalare Multiplikation erklärt sein. Deshalb definieren wir:

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m) \qquad (\alpha \cdot f)(m) = \alpha \cdot f(m)$$

Für die Null gilt: $0_{\mathbf{V}} : \begin{cases} M \to \mathbb{K} \\ m \mapsto 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$
Für das additive Inverse in V gilt: $(-f)(m) = -f(m)$.
Beweis: Zu zeigen: $f + (-f) = 0_{\mathbf{V}}$.
Genauer zu zeigen: $\forall m \in \mathbf{M} : (f + (-f))(m) = 0_{\mathbf{V}}(m) = 0_{\mathbb{K}}$.
Linke Seite: $(f + (-f))(m) \overset{\textbf{Def.}}{=} f(m) + (-f)(m) \overset{\textbf{Def.}}{=} f(m) - f(m) = 0_{\mathbb{K}}$
Rechte Seite: $0_{\mathbf{V}}(m) \overset{\textbf{Def.}}{=} 0_{\mathbb{K}}$. **Es folgt die Behauptung.**

(c) $\mathbf{M} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbf{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
(d) $\mathbf{M} = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbf{V} = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}\}$.
Nun gilt: $\mathbf{V} = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}\} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$.
Also: $f \leftrightarrow \{x_i = f(i), i = 1, \ldots, n\}$. **Wir definieren:**

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i) \qquad (\alpha \cdot f)(i) = \alpha \cdot f(i)$$

Ergebnis: $\{f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}\}$ **ist Standardvektorraum** $\mathbb{R}^n$. **Anstatt** $\mathbb{R}$ **wird auch oft** $\mathbb{K}$ **verwendet.**
(e) $\mathbb{R}$ **ist auf natürliche Art und Weise** $\mathbb{Q}$**-Vektorraum mit:**

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} \qquad + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \qquad \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Hier nun der Nachweiß in Stichworten:

- $(\mathbb{R}, +)$ **ist Abelsche Gruppe (klar)**
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot r = \alpha \cdot (\beta \cdot r)$: **Assoziativität der Multiplikation in** $\mathbb{R}$
- $\alpha \cdot (r+s) = \alpha \cdot r + \alpha \cdot s$ **und** $(\alpha + \beta) \cdot r = \alpha \cdot r + \beta \cdot r$: **Distributivität in** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $1 \cdot r = r$ **(die Eins in** $\mathbb{R}$**)**

2.3.3 Satz (II.3.1): Rechenregeln über Vektorräumen

Rechenregeln: Sei $v \in \mathbf{V}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. **Es gelten:**

(i) $0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_{\mathbf{V}}$

(ii) $\lambda \cdot 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}$

(iii) $\lambda \cdot v = 0_{\mathbf{V}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0_{\mathbb{K}} \vee v = 0_{\mathbf{V}}$

(iv) $(-1) \cdot v = -v$

(v) $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$

Die Beweise erfolgen wie in der Ringtheorie.
Hier als Beispiel (i) **und** (iii)
Zu (i)**: Es gilt:**

$$0_{\mathbb{K}} \cdot v + 0_{\mathbb{K}} \cdot v \;=\; (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot v = 0_{\mathbb{K}} \cdot v$$

Nun addieren wir das Inverse zu $0_{\mathbb{K}} \cdot v$**:**

$$\begin{aligned}
(-0_{\mathbb{K}} \cdot v) + (0_{\mathbb{K}} \cdot v + 0_{\mathbb{K}} \cdot v) &= (-0_{\mathbb{K}} \cdot v)\,(0_{\mathbb{K}} \cdot v) \\
(-0_{\mathbb{K}} \cdot v + 0_{\mathbb{K}} \cdot v) + (0_{\mathbb{K}} \cdot v) &= 0_{\mathbf{V}} \\
0_{\mathbf{V}} + (0_{\mathbb{K}} \cdot v) &= 0_{\mathbf{V}} \\
0_{\mathbb{K}} \cdot v &= 0_{\mathbf{V}}
\end{aligned}$$

Zu (iii)**: Zu zeigen** $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$.
Sei $\lambda \neq 0$. **Dann multiplizieren wir die Gleichung mit** λ^{-1} **von links.**
$\Rightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0$.
Nun ergibt sich auf der linken Seite: $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \left(\lambda^{-1} \cdot \lambda\right) \cdot v = 1 \cdot v = v$.
Für die rechte Seite gilt: $\lambda^{-1} \cdot 0 = 0$
Also $\Rightarrow v = 0$. **Analog ergibt sich** $\lambda = 0$.

2.3.4 Satz (II.3.2)

Allgemeines Distributivgesetze

$$(i)\ \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\cdot v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot v\quad \textbf{und}\quad (ii)\ \lambda\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot v_i$$

Die Beweise für (i) und (ii) erfolgen per Induktion. Für den Induktionsschritt gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)+\lambda_n,\qquad \sum_{i=1}^{n}v_i=\left(\sum_{i=1}^{n-1}v_i\right)+v_n$$

Der Rest des Beweises ist klar, da die Axiome für binäre Summen gelten.

2.3.5 Definition (II.3.b): Untervektorraum

U heißt Untervektorraum von V (Notation: U $<$ V) wenn U bezüglich der Einschränkung der Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist.

2.3.6 Beispiel für Untervektorräume

Beispiele:
(a) U $=\{x,y,0\}$ bezüglich der Einschränkung der Addition und skalaren Multiplikation ist ein Vektorraum. Damit ist U ein Untervektorraum: U $=\{(x,y,0):x,y\in\mathbb{K}\}<\mathbb{K}^3$

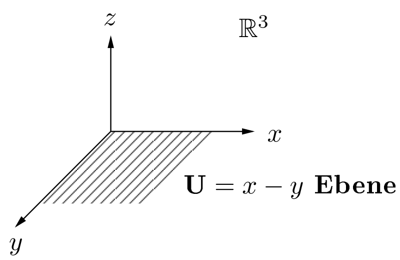

Abbildung II-10: Beispiel für einen Untervektorraum

(b) U $:=\{(x,1):x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$

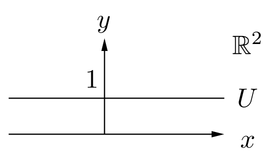

Abbildung II-11: **U** im $\mathbb{R}^2$

Ist $+|_{\mathbf{U}}$ eine Verknüpfung auf U?
Nein, denn $(x,1)+(y,1)=(x+y,1+1)=(x+y,2)\notin$ **U**
(c) U $:=\left\{(x,y):x,y\in\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}},\ x^3+y^3=0\right\}\subseteq(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})^2$
Nun wenden wir einen Trick an: Für $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ gilt: $x^3=x\,\forall x$.
Beweis: Durch Ausprobieren ergibt sich:

$$\overline{0}^3=\overline{0}\qquad\overline{1}^3=\overline{1}\qquad\overline{2}^3=\overline{2}$$

Damit ergibt sich für U:

$$\mathbf{U} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}},\ x + y = 0\}$$

Nun gilt für x und y: $y = -x$. Damit ergibt sich endgültig für U:

$$\mathbf{U} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\}$$

Abschließend müssen wir zeigen, daß U bezüglich der Einschränkungen von Addition und skalarer Multiplikation ein Vektorraum ist.
Addition: $(x, -x) + (y, -y) = (x + y, -x + (-y)) = (x + y, -(x + y))$. **Anmerkung: In der Gruppentheorie haben wir folgende Rechenregel kennengelernt:** $-(a + b) = -a + (-b)$.
Skalare Multiplikation: $\alpha \cdot (x, -x) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot (-x)) = (\alpha \cdot x, -\alpha \cdot x)$. **Anmerkung: In der Ringtheorie haben wir folgende Rechenregel kennengelernt:** $a \cdot (-b) = -a \cdot b = (-a) \cdot b$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned} + &: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \to \mathbf{U} \\ \cdot &: \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbf{U} \to \mathbf{U} \end{aligned}$$

Alle anderen Axiome sind schon in $\left(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\right)^2$ erfüllt. Damit ist U ein Untervektorraum.
(d) $\mathbb{L}$ sei der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & a_{13} \cdot x_3 & + & \ldots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & a_{23} \cdot x_3 & + & \ldots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & a_{33} \cdot x_3 & + & \ldots & + & a_{3n} \cdot x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & a_{m3} \cdot x_3 & + & \ldots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

$x_1, \ldots, x_n$ **sind die Unbekannten. Die a_{ij} sind (bekannte) Koeffizienten des Gleichungssystems. $(b_1, \ldots, b_m)$ ist die Lösungsspalte.**
Nun gilt für den Lösungsraum:

$$\mathbb{L}(a_{ij}, b_k) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \right\}$$

wobei $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$, $k = 1 \ldots m$.
Zu zeigen: $\mathbb{L}(a_{ij}, b_k) < \mathbb{K}^n$.

2.3.7 Konstruktion von Vektorräumen

(a) $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 < \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 < \mathbf{V}$. Wir definieren:

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathbf{U}_1, u_2 \in \mathbf{U}_2\} < \mathbf{V}$$

Warnung: im allgemeinen: $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \not< \mathbf{V}$
(b) $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ seinen $\mathbb{K}$-Vektorräume $\Rightarrow \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \{(v_1, v_2) : v_i \in \mathbf{V}_i\}$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum bezüglich:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (v_1', v_2') &= (v_1 + v_1', v_2 + v_2') \\ \alpha \cdot (v_1, v_2) &= (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2) \end{aligned}$$

Allgemein: $\mathbf{U}_i < \mathbf{V}_i \Rightarrow \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 < \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$

2.3.8 Satz (II.3.3):

Sei $(\mathbf{V},+,\cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
$\mathbf{U}\subseteq\mathbf{V}$ heißt Untervektorraum, wenn gilt:

(i) $\mathbf{U}\neq\phi$

(ii) $\forall u,v\in\mathbf{U}: u+v\in\mathbf{U}$

(iii) $\forall\alpha\in\mathbf{K},\forall u\in\mathbf{U}:\alpha\cdot u\in\mathbf{U}$

Bedeutung: $(\mathbf{U},+,\cdot)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
Beweis: Selbst oder Buch
Diese drei Kriterien werden im Allgemeinen für den Nachweis verwandt. Die anderen Axiome sind in der Regel für U erfüllt, da diese Axiome schon für V erfüllt sind.
Es gibt mindestens zwei Untervektorräume für einen Vektorraum V: $\mathbf{V}<\mathbf{V}\quad\{0\}<\mathbf{V}$

2.3.9 Beispiele für Untervektorräume und deren Konstruktion

(a) Gegeben sei der $\mathbb{R}^3$. Eine Ebene ist gegeben durch $\mathbf{E}: ax+by+cz=d$.
Behauptung: $\mathbf{E}<\mathbb{R}^3\Leftrightarrow d=0$
Beweis:
"$\Leftarrow$": Gegeben: $ax+by+cz=0$.
Zu Zeigen: $(i)-(iii)$ gelten.
Zu (i): $(0,0,0)\in\mathbf{E}$ (klar)
Zu (ii): Addition ist abgeschlossen:
Sei $ax+by+cz=0$ und $ax'+by'+cz'=0\Leftrightarrow(x,y,z)+(x',y',z')\in\mathbf{E}$.
Addition der Gleichungen liefert:

$$ax+by+cz+ax'+by'+cz'=a\cdot(x+x')+b\cdot(y+y')+c\cdot(z+z')$$

Also: $(x,y,z)+(x',y',z')\in\mathbf{E}$.
Zu (iii): Multiplikation mit einem Skalar ist abgeschlossen:
Sei $ax+by+cz=0$ und $\alpha\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha\cdot(x,y,z)\in\mathbf{E}$. Nun gilt:

$$0=\alpha\cdot(ax+by+cz)=\alpha\cdot ax+\alpha\cdot by+\alpha\cdot cz=a\cdot(\alpha x)+a\cdot(by)+a\cdot(cz)\quad\Rightarrow\quad\alpha\cdot(x,y,z)\in\mathbf{E}$$

(b): Wir befinden uns im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten folgende Konstruktion:

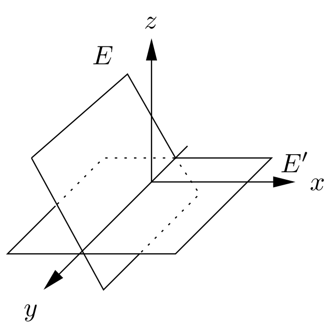

Abbildung II-12: Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$

$E\cap E'$ ist eine Gerade durch den Ursprung.
(c): Weitere Konstruktionen für Untervektorräume sind: $\mathbf{U}_1\cap\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1+\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1\times\mathbf{U}_2$.

(d): Welche Geraden sind Untervektorräume im $\mathbb{R}^3$?
Eine Gerade g im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{aligned}$$

Behauptung: $g < \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow d = d' = 0$.
(e): Seien $\mathbf{U}_1 = \mathbb{R}v_1$ und $\mathbf{U}_2 = \mathbb{R}v_2$.
Nun gilt:

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in \mathbf{U}_1, u_2 \in \mathbf{U}_2\}$$

Hier in diesem Fall gilt: $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = E_{0;v_1,v_2}$
Wir spannen also eine Ebene durch den Nullpunkt mit den Richtungsvektoren v_1 und v_2 auf:

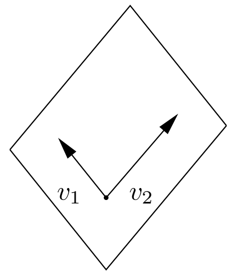

Abbildung II-13: Ebene durch den Nullpunkt mit Richtungsvektoren v_1 und v_2

(f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x,(y,z)) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \overset{(*)}{=} \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$
Anmerkung zu $(*)$: Strenggenommen sind die beiden Terme nicht gleich, sie sind aber so zu identifizieren.
$\mathbf{U} = \mathbb{R} < \mathbb{R}$ **und** $\mathbf{V} = ((a,0) : a \in \mathbb{R}) < \mathbb{R}^2$**. Genauer:** $\mathbf{V} = \{a \cdot (1,0) : a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,(1,0)$.

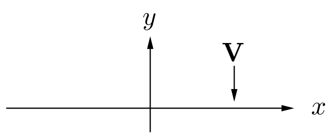

Abbildung II-14: $\mathbf{V}$ in der Ebene

$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\} = xy$**-Ebene im $\mathbb{R}^3$.**

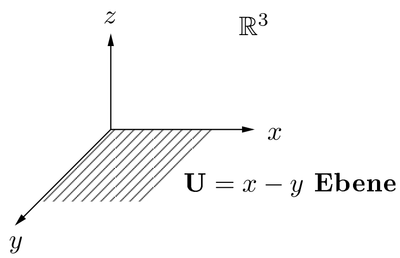

Abbildung II-15: $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ in der Ebene

2.3.10 Erzeugung von Untervektorräumen

Nun wollen wir für einen endlichen Vektorraum alle Unterräume bestimmen:
Sei

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = (\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})^2 &= \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\} \\ &= \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{1}\right), \left(\overline{1},\overline{0}\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right)\right\}\end{aligned}$$

Die trivialen Fälle für die Untervektorräume sind: $\left(\overline{0},\overline{0}\right)$ **und V.**
Gibt es weitere Untervektorräume?
Jeder weitere Untervektorraum von V muß mindestens das Element $\left(\overline{0},\overline{0}\right)$ **enthalten.**
Also raten wir:
Behauptung: $\mathbf{U} = \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{1}\right)\right\}$ **seien ein Untervektorraum. Nun müssen wir die Eigenschaften** $(i) - (iii)$ **überprüfen:**
Zu (i): $\left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{1}\right)\right\} \neq \phi$ **(klar)**
Zu (ii): Abgeschlossenheit bezüglich der Addition. Es treten drei Fälle auf:

$$\begin{aligned}\left(\overline{0},\overline{0}\right) + \left(\overline{0},\overline{0}\right) &= \left(\overline{0},\overline{0}\right) \in \mathbf{U} \\ \left(\overline{0},\overline{0}\right) + \left(\overline{0},\overline{1}\right) &= \left(\overline{0},\overline{1}\right) \in \mathbf{U} \\ \left(\overline{0},\overline{1}\right) + \left(\overline{0},\overline{1}\right) &= \left(\overline{0},\overline{0}\right) \in \mathbf{U}\end{aligned}$$

Die Addition ist also abgeschlossen.
Zu (iii) Abgeschlossenheit bezüglich der skalaren Multiplikation. Es treten vier Fälle auf:

$$\begin{aligned}0 \cdot \left(\overline{0},\overline{0}\right) &= \left(\overline{0},\overline{0}\right) \in \mathbf{U} & \qquad 0 \cdot \left(\overline{0},\overline{1}\right) &= \left(\overline{0},\overline{0}\right) \in \mathbf{U} \\ 1 \cdot \left(\overline{0},\overline{0}\right) &= \left(\overline{0},\overline{0}\right) \in \mathbf{U} & \qquad 1 \cdot \left(\overline{0},\overline{1}\right) &= \left(\overline{0},\overline{1}\right) \in \mathbf{U}\end{aligned}$$

Auch bezüglich der skalaren Multiplikation ist U abgeschlossen.
Es folgt: $\mathbf{U} = \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{1}\right)\right\} < \mathbf{V}$**.**
Analog zeigen wir, daß $\mathbf{U} = \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{1},\overline{0}\right)\right\} < \mathbf{V}$ **und** $\mathbf{U} = \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right)\right\} < \mathbf{V}$**.**
Gibt es nun auch Untervektorräume in V, die nun mindestens drei Elemente haben?:
Sei $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ **und** $|\mathbf{U}| \geq 3$**. Es gilt:** $\left(\overline{0},\overline{0}\right) \in \mathbf{U}$ **(Ansonsten ist es garantiert kein Untervektorraum). Nun treten drei Fälle auf:**
1. Fall: $\left(\overline{0},\overline{1}\right), \left(\overline{1},\overline{0}\right) \in \mathbf{U} \quad \Rightarrow$ **Auch** $\left(\overline{1},\overline{1}\right) \in \mathbf{U}$ **(sonst nicht abgeschlossen)** $\Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$**.**
2. Fall: $\left(\overline{0},\overline{1}\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right) \in \mathbf{U} \quad \Rightarrow$ **Auch** $\left(\overline{1},\overline{0}\right) \in \mathbf{U}$ **(sonst nicht abgeschlossen)** $\Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$**.**
3. Fall: $\left(\overline{1},\overline{0}\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right) \in \mathbf{U} \quad \Rightarrow$ **Auch** $\left(\overline{0},\overline{1}\right) \in \mathbf{U}$ **(sonst nicht abgeschlossen)** $\Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$**.**
Damit haben wir eine Liste aller Untervektorräume von V gefunden:

$$\left(\overline{0},\overline{0}\right), \mathbf{V}, \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{1},\overline{0}\right)\right\}, \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{0},\overline{1}\right)\right\}, \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right)\right\}$$

Diesen Vektorraum können wir auch graphisch darstellen:

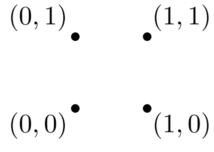

Abbildung II-16: graphische Darstellung von **V**

Für die graphische Darstellung der Untervektorräume von V gilt nun:

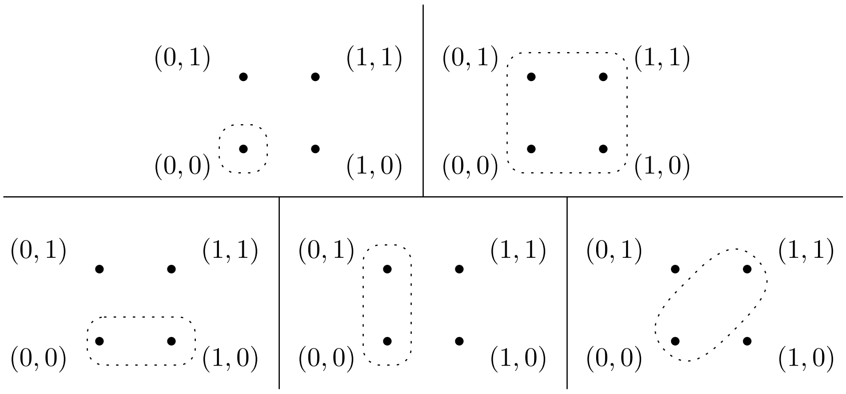

Abbildung II-17: graphische Darstellung der Untervektorräume

Gegeben: $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{V}$. **Suche alle Untervektorräume** $\mathbf{U} \ni v_1, \dots, v_k$.
Es ergeben sich folgende notwendigen Bedingungen:
Aus (iii): $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}: \ \alpha_1 v_1, \dots, \alpha_k v_k \in \mathbf{U}$
Aus (ii): $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}: \ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in \mathbf{U}$
Also: $\Rightarrow \quad \mathbf{U} \supseteq \left\{ \textbf{alle Linearkombinationen } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \right\}$

2.3.11 Satz (II.3.4)

Gegeben seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{V}$. **Dann ist** $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{K}, \, i = 1, \dots, k \right\}$ **der kleinste Untervektorraum von V, der die Vektoren** $v_1, \dots, v_k$ **enthält.**
Beweis:
Nach der Vorüberlegung genügt es zu zeigen, daß $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{K}, \, i = 1, \dots, k \right\} < \mathbf{V}$

Nun sei: $\mathbf{U} := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{K}, \, i = 1, \dots, k \right\}$
Wir müssen die Eigenschaften $(i) - (iii)$ **überprüfen:**
Zu (i): $\mathbf{U} \neq \phi$, **denn** $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k \in \mathbf{U}$
Zu (ii): Abgeschlossenheit bezüglich der Addition:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i v_i + \beta_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) \cdot v_i \in \mathbf{U}$$

Zu (iii): Abgeschlossenheit bezüglich der skalaren Multiplikation:

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha \cdot (\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha \cdot \alpha_i) \cdot v_i \in \mathbf{U}$$

Da alle Eigenschaften erfüllt sind ist U < V. Die anderen Axiome sind schon in V erfüllt und übertragen sich damit auf U.

2.3.12 Definition (II.3.c): Spann und Erzeugendensystem

(i) $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ **wir definiert als** $\langle v_1, \ldots, v_l \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i : \alpha_1 \ldots \alpha_k \in \mathbf{K} \right\}$
$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ **ist der von** $v_1, \ldots, v_k$ **erzeugte oder aufgespannte Vektorraum oder Span** $(v_1, \ldots, v_k)$**.**

(ii) Ist $\mathbf{U} = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$**: U wird von** $v_1, \ldots, v_k$ **erzeugt oder aufgespannt.** $v_1, \ldots, v_k$ **wird als Erzeugendensystem von U bezeichnet.**

2.3.13 Beispiele für Spann

Gerade im $\mathbb{R}^2$**:** $g_{P,v} = P + \mathbb{R} \cdot v = P + \langle v \rangle$**.**
Ebene im $\mathbb{R}^3$**:** $E_{P,v_1,v_2} = P + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 = P + \langle v_1, v_2 \rangle$**.**
Man nennt ein solches System: Affiner Unterraum des $\mathbb{K}^n$**:** $P + \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$**.**
Nun ist es oft gefordert für einen Untervektorraum ein Erzeugendensystem zu finden.
Hier nun eine Beispiel:
Gegeben sei $\mathbb{K}$ **und** $\mathbf{U} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\} < \mathbb{K}^n$**.**
1. Fall $a_i = 0, i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbb{K}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ **mit** $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ **wobei die** 1 **an der** i**-ten Stelle steht un** $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$
2. Fall: ein $a_i \neq 0$**, etwa** $a_1 \neq 0$**. Nun gilt:**

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} x_n \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_n) = \left(-\frac{a_2}{a_1} x_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} x_n, x_2, \ldots, x_n \right) \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) \quad &= \quad \left(-\frac{a_2}{a_1} x_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} x_n, x_2, \ldots, x_n \right) \\ &= \quad x_2 \cdot \left(-\frac{a_2}{a_1} x_2, 1, 0, \ldots, 0 \right) + x_3 \cdot \left(-\frac{a_3}{a_1} x_3, 0, 1, 0, \ldots, 0 \right) \\ &\quad + x_i \cdot \left(-\frac{a_i}{a_1} x_i, \ldots, 1, \ldots, 0 \right) + x_n \cdot \left(-\frac{a_n}{a_1} x_n, 0, \ldots, 1 \right) \end{aligned}$$

Damit: $x \in \mathbf{U} \Leftrightarrow$

$$\exists x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K} : x = x_2 \cdot \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \ldots, 0 \right) + \ldots + x_i \cdot \left(-\frac{a_i}{a_1} x_i, \ldots, 1, \ldots, 0 \right) + x_n \cdot \left(-\frac{a_n}{a_1} x_n, 0, \ldots, 1 \right)$$

Also: $\mathbf{U} = \left\langle \ldots, \left(-\frac{a_i}{a_i}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0 \right), \ldots \right\rangle$ **für** $i = 2, \ldots, n$ **sind Lösungen, denn**

$$a_1 \cdot \left(-\frac{a_i}{a_1} \right) + 1 \cdot a_i = 0$$

2.4 Kapitel (II.4): Basis und Dimension

2.4.1 Ziel dieses Paragraphen: Haupsatz für Basen

Der Hauptsatz für Basen lautet:

(i) Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis.
Das heißt: jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

(ii) Je zwei Basen haben dieselbe Länge (Anzahl der Vektoren)

2.4.2 Definition (II.4.a): Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$v_1, \dots, v_n$ **heißen linear unabhängig, wenn gilt:**

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

2.4.3 Definition (II.4.b): Basis

$v_1, \dots, v_k$ **heißen eine Basis von V** $\quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \,\middle|\, : \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$**.**
Dabei sind $v_1, \dots, v_k$ **linear unabhängig.**

2.4.4 Beispiele für Basen

(a) $\mathbb{K}^n$ **hat die Standardbasis** $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ **mit** $\mathbf{e}_i$ **als dem** i**-ten Einheitsvektor. Der** i**-te Einheitsvektor hat als** i**-te Komponente eine Eins und ansonsten Nullen:** $(0, \dots, 1, \dots, 0)$**.**
Ein Vektor x **läßt sich dann darstellen als** $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$**.**
(b) $\mathbb{R}^2$ **hat die Basen** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ **und** $\{(1,1), (7000163, -14201660)\}$**.**
Zu zeigen: $\forall a, b$**:** $(a,b) = \alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (7000163, -14201660)$**. Wir müssen also folgendes Gleichungssystem lösen:**

$$\begin{aligned} a &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 7000163 \\ b &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-14201660) \end{aligned}$$

(c) Sei $\mathbf{U} = \left\{ x | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$ **mit** $a_1 \neq 0$**.** $\mathbf{U} = \langle u_2, \dots, u_n \rangle$**, also** $u_2, \dots, u_n$ **sind ein Erzeugendensystem von U.**
Behauptung: $u_2, \dots, u_n$ **sind linear unabhängig.**
Beweis: Sei $\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$**.**
Wegen der Gestalt von u_i **folgt:** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = (*, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ **wobei** $*$ **irgendeinen Produkt ist. Also:**

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

2.4.5 Basen und Dimensionen

Familie von Vektoren : $(v_i)_{i\in I}$**, wobei** I **eine (Index)menge ist:** $I \to \mathbf{V}, i \mapsto v_i$**. Nicht notwendigerweise:** $v_i \neq v_j$ **für** $i \neq j$. $v_1, \ldots, v_n$ **sind eine endliche Familie, das heißt** $\{1, \ldots, n\} \to \mathbf{V}$, $i \mapsto v_i$.

Notation $\langle E\rangle$**: Bisher** $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$**. Auf Übungsblatt 9 zu zeigen:** $\langle E\rangle \subseteq \mathbf{V}$**. Allgemeinste Verwendung:** $E = (v_i)_{i\in I}$ **Familie von Vektoren.** $\langle E\rangle =$ **der kleinste Untervektorraum von V, der alle** $v_i, i \in I$ **enthält.**

Existenz: In der Vorlesung: Existenz von endlichen Familien gezeigt. Auf Übungsblatt 9: Für beliebige Familien:

$$\langle E\rangle = \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j v_j \;\middle|\; J \subseteq I, J \textbf{ endlich}, \lambda_j \in \mathbb{K} \right\}$$

Basis von V: Familien von Vektoren mit

(i) $v_1, \ldots, v_n$ **sind linear unabhängig**

(ii) $\langle v_i, \ldots, v_n\rangle = \mathbf{V}$

Bemerkung: Aus (i) **folgt:** $r \neq s \quad \Rightarrow \quad v_r \neq v_s$

Beweis: Sei $v_r = v_s$ **mit** $r \lneqq s$.

Also existiert eine nicht triviale Darstellung der Null:

$$0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{r-1} + 1 \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+1} + \ldots + 0 \cdot v_{s-1} + (-1) \cdot v_s + 0 \cdot v_{s+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

Wir erhalten einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit.

Nun noch eine Notation der Linearkombination: $\sum \lambda_j v_j$**:**

$$0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$$

Beide Terme sind eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_4$**, wobei alle Faktoren mit** $\lambda_j = 0$ **auf der rechten Seite weggelassen worden sind.**

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \ldots, v_n$ **sind linear unabhängig** $\quad\Leftrightarrow\quad \forall i = 1 \ldots n : v_i \notin \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$.

Für $n = 2$**:** v_1, v_2 **sind linear unabhängig** $\quad\Leftrightarrow\quad v_1 \notin \mathbb{K}v_2$ **und** $v_2 \notin \mathbb{K}v_1$.

Anmerkung zur Notation: Um Schreibarbeit zu sparen sind äquivalent:

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle \doteqdot \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$$

Der Vektor, der nicht Element des Erzeugendensystems ist wird mit einem Dach bezeichnet.

Beweis: Angenommen $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$.

"$\Rightarrow$**": Zu zeigen**

$$\begin{array}{rrcl} & v_i & = & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + v_n \lambda_n \\ \Rightarrow & 0 & = & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + v_n \lambda_n \end{array}$$

Also muß mindestens ein $\lambda_j \neq 0$ **für** $j \neq i$**. Dies ist eine Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Vektoren linearen Unabhängigkeit sind.**

"$\Leftarrow$**": Sei** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ **wobei ein** $\lambda_i \neq 0$**. OE:** $\lambda_1 \neq 0$ **(Ansonsten sortieren wir um). Dann**

$$\lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) v_i$$

Also $v_1 \in \langle v_2, \ldots, v_n\rangle$

2.4.6 Hauptsatz (II.4.1)

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten:

(1) V besitzt eine Basis

(2) Je zwei Basen haben dieselbe Länge (Sprich: dieselbe Anzahl von Vektoren)

Beweis: Voraussetzung: $\mathbf{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Konstruktion einer Basis aus $v_1, \dots, v_n$.
Erste Konstruktion: (Idee: behalte Erzeugenden-Eigenschaften):
Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig: Fertig, da wir Basis damit haben.
2. Fall: $v_1, \dots, v_n$ sind linear abhängig. Das heißt $0 = \sum \lambda_i v_i$ wobei nicht alle $\lambda_i \neq 0$.
Dann $v_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle \quad \Rightarrow \quad v_1, \dots, v_n \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$.
$\langle w_1, \dots, w_k \rangle$ ist der kleinste Unterraum $\ni w_1, \dots, w_k$
$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq \langle v_2, \dots, v_n \rangle \subseteq \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$
Iteration liefert ein Teilsystem $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ von $v_1, \dots, v_n$ mit den Eigenschaften:

- $\mathbf{V} = \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \rangle$
- **$v_{i_r}, \dots, v_{i_r}$ sind linear unabhängig, das heißt Basis**

Achtung: $r = 0$ kann auftreten. Das heißt $\mathbf{V} = \{0\}$.

2.4.7 Satz (II.4.1.a): Basisauswahlsatz

In jedem Erzeugendensystem ist eine Basis erhalten, die man durch sukzessive Elimination von Vektoren erhalten kann. Eliminiert wird mittels einer nicht trivialen Darstellung der Null. (siehe oben: Fall (2))
Zweite Konstruktion: (Idee: behalte Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit)
Sei $B_0 \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ eine linear unabhängige Teilfamilie. Eventuell kann sein: $B_o = \phi$.
Es gibt maximale Teilfamilie B von $v_1, \dots, v_n$ mit:

(i) B ist linear unabhängig

(ii) $B_0 \subseteq B$

Beweis:
Zu (i): lineare Unabhängigkeit: klar, da nach Voraussetzung B_0 linear unabhängig.
Zu (ii): $\langle B \rangle = \mathbf{V}$.
Zu zeigen: $v_1, \dots, v_n \in \langle B \rangle$: $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \langle B \rangle = \mathbf{V}$
Nun betrachten wir v_i. Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall: $v_i \in B \quad \Rightarrow \quad v_i \in \langle B \rangle$
2. Fall: $v_i \notin B$, dann ist $B \cup \{v_i\}$ eine echte größere Teilfamilie von $v_1, \dots, v_n$. Nach Wahl von B ist $B \cup \{v_i\}$ linear abhängig, das heißt es gilt : $0 = \sum_{v \in B} \lambda_v v + \mu v_i$ wobei nicht alle Koeffizienten gleich Null sind.
Angenommen: $\mu = 0$, dann $0 = \sum_{v \in B} \lambda_v v$. Nun folgt aus den Eigenschaften von B und der linearen Unabhängigkeit: $\lambda_v = 0$, daß heißt: alle Koeffizienten sind gleich Null. Dies ist eine Widerspruch zu unserer Annahme. Also: für $\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i \in \langle B \rangle$

2.4.8 Satz (II.4.1.b): Basisergänzungssatz

Hier zwei Fassungen des Basisergänzungssatz:

(i) Ist B_0 eine linear unabhängige Familie, E ein endliches Erzeugendensystem von $\mathbf{V}, B_0 \subseteq E$, dann läßt sich B_0 innerhalb von E zu einer Basis ergänzen.

(ii) Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum und B_0 eine linear unabhängige Familie, dann läßt sich B_o zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: $(i) \quad \Rightarrow \quad (ii)$**:**
Sei $\mathbf{V} = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ nach Voraussetzung, wähle Familie B_0, $v_1, \ldots, v_n =: E$.
Dann offenbar: $B_0 \subseteq E, \langle E \rangle = \mathbf{V}$.
Hier eine Beispiel im $\mathbb{R}^4$:
Behauptung: $(1,2,0,4), (3,0,4,6), (0,117,2133,-6), (0,0,1,4), (6,7,8,0), (1,2,3,4)$ **erzeugen $\mathbb{R}^4$.**
Die lineare Abhängigkeit sagt aus:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 + 6\lambda_5 + \lambda_6 &= 0 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + -6\lambda_3 + 4\lambda_4 + 0\lambda_5 + 4\lambda_6 &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten als ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten.
Nachrechnen liefert, daß wir die Vektoren $(0,0,1,4)$ und $(1,2,3,4)$ eliminieren können. Die anderen 4 Vektoren ergeben eine Basis.
Konstruktion eines Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^4$ nach Satz (II.4.1.b):
Gegeben seien die linear unabhängigen Vektoren $(1,704,603,502)$ und $(2,401,300,199)$.
Auf jeden Fall: Die vier Einheitsvektoren $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ sind ein Erzeugendensystem für den $\mathbb{R}^4$.
Nachrechnen liefert:
$(1,704,603,502), (2,401,300,199), (1,0,0,0), (0,1,0,0)$ **ist eine Basis im $\mathbb{R}^4$.**
Für den Beweis des Satzes (II.4.1.b) brauchen wir den Austauschsatz von Steinitz:

2.4.9 Satz (II.4.1.c): Austauschsatz von Steinitz

Sei B eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V.
Dann gibt es zu jedem $v \in B$ ein $w \in E$, so daß $(B \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ wieder linear unabhängig ist.
Beweis: Wähle $v \in B$, weil $\langle E \rangle = \mathbf{V}$ gilt:

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Zu zeigen: Es gibt ein i: $(B \setminus \{v\}) \cup \{v_i\}$ ist linear unabhängig.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\forall i$: $(B \setminus \{v\}) \cup \{v_i\}$ ist linear abhängig, daraus folgt analog zum Beweis der 2. Konstruktion: $v_i \in \langle B \setminus \{v\} \rangle$, $\forall i$. Daraus:

$$v = \sum \lambda_i v_i \in \langle B \setminus \{v\} \rangle \quad \textbf{und} \quad v = \sum_{\substack{w \neq v \\ w \in B}} \lambda_w \cdot w$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme der linearen Unabhängigkeit.
Folgerung: B_1, B_2 sind Basen von V $\quad \Rightarrow \quad |B_1| = |B_2|$.
Beweisschema: Zunächst: $|B_1| \leq |B_2|$. Dito: $|B_2| \leq |B_1| \quad \Rightarrow \quad |B_1| = |B_2|$.
Sei $B_1 := \{v_1, \ldots, v_r\}$, $B_1 := \{w_1, \ldots, w_s\}$.
Nun wenden wir den Austauschsatz mehrfach an.
B_1 ist linear unabhängig, B_2 sei ein Erzeugendensystem.
Nun ersetze v_1 durch einen passenden Vektor w_i. OE: $i = 1$, ansonsten sortieren wir um.
Dann: $B_1 = \{w_1, v_2, \ldots, v_r\}$ ist linear unabhängig und B_2 ist eine Erzeugendensystem.
Nun v_2 ersetzen durch w_i. $i = 1$ ist unmöglich, da ansonsten $w_1, w_1, v_3, \ldots, v_r$ linear abhängig sind.
Also $i \geq 2$. OE: $i = 2$, dann $B_1 = \{w_1, w_2, v_3, \ldots, v_r\}$ ist linear unabhängig und B_2 ist ein Erzeugendensystem.
Sukzessive werden $v_1, \ldots, v_r$ durch r verschiedene Vektoren aus B_2 ersetzt, daher $r \leq s$.
Dito: $s \leq r$. Also $r = s$.
Als Konsequenz aus den drei Sätzen ergibt sich (schon gezeigt):

- **Existenz einer Basis**
- **Gleichmächtigkeit von Basen**

2.4.10 Definition (II.4.c): dim(V)

Sei V endlich erzeugter Vektorraum. Die Dimension von V: $\dim(\mathbf{V}) := |B|$, wobei B Basis von V ist.

2.4.11 Konsequenzen aus $\dim(\mathbf{V}) := |B|$

Als Konsequenzen ergeben sich:

(i) $\dim(\mathbf{V}) = n$, **wobei** $v_1, \ldots, v_n$ **linear unabhängig** $\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_n$ **bilden eine Basis**

(ii) Basen = minimale Erzeugendensysteme

(iii) Basen = maximal unabhängige Familien

Stichworte zu den Beweisen:

Zu (i): $v_1, \ldots, v_n$ **sind linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz folgt, daß** $v_1, \ldots, v_n$ **zu einer Basis ergänzt werden kann. Nach dem Austauschsatz folgt unmittelbar, daß** $v_1, \ldots, v_n$ **eine Basis sind, also eine Ergänzung nicht notwendig sind.**

Zu (ii): **B sei eine Basis. Aus der Definition der Basis folgt: B ist Erzeugendensystem. Sei** $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}$ **und** $\mathbf{B}_0$ **Erzeugendensystem.**

Zu zeigen: $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$.

Sei $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}$. **Es existiert ohne Einschränkung** $v_1 \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{B}_0$

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r \quad \textbf{mit} \quad v_2, \ldots, v_r \in \mathbf{B}_0$$

Daher sind $v_1, \ldots, v_r$ **linear abhängig. Dies ist eine Widerspruch zur Eigenschaft der Basis.**

Es folgt, daß B ein minimales Erzeugendensystem ist.

Bisher haben wir bewiesen: B ist minimales Erzeugendensystem.

Es bleibt zu zeigen: Ein minimales Erzeugendensystem ist Basis.

Sei E ein Erzeugendensystem, dann existiert $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{E}$, **B sei Basis (nach Basisauswahlsatz). B ist Erzeugendensystem, E war minimal** $\Rightarrow$ $\mathbf{B} = \mathbf{E}$. **Also ist E Basis.**

Zu (iii): **Analog zu** (ii)

2.4.12 Anwendung:

(i) $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $B := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ **Basis von** n**-Vektoren (Standardbasis).**
$v_1, \ldots, v_n$ **seien linear unabhängig** $\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_n$ **ist Basis von** $\mathbb{K}^n$ **(mittels Basisergänzungssatz, Standardbasis, Satz (II.4.1.b))**

(ii) lineares Gleichungssysteme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ **für** $i = 1, \ldots, n$
Lösungsmenge ist Untervektorraum des $\mathbb{K}^n = \mathbb{L}$. **Später:** $\mathbb{L}$ **Basis von** $v_1, \ldots, v_r$ **mit** $r \leq n$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

2.4.13 Darstellung durch Basen

$v_1, \ldots v_n$ **sei eine Basis,** $v \in \mathbf{V}$. **Nun läßt sich** v **als Linearkombination darstellen:**

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \textbf{für gewisse} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

2.4.14 Satz (II.4.2)

Die Darstellung von Vektoren bezüglich einer Basis ist eindeutig.

Beweis: Sei v dargestellt durch: $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$

Zu zeigen $\lambda_i = \mu_i \; \forall i$.
Sei ein $\lambda_{i_0} \neq \mu_{i_0}$. Nun gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \cdot v_i = 0$$

Für einen Koeffizienten, $i = i_0$, ist die Summe der λ, μ nicht Null. Damit erhalten wir einen Widerspruch zur linearen Abhängigkeit.
Hier nun ein anschauliches Beispiel für den $\mathbb{R}^3$:
Sei v gegeben durch: $v = v_1 + 2v_2 - 3v_3$ **und** $v = v_1 + 2,1 \cdot v_2 - 4v_3$
Subtrahieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$0 \quad = \quad 0,1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit.
Formale Konsequenz: Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Basis $v_1, \ldots, v_n$. Dann ist ein Vektor durch genau einen $n-$Tupel eindeutig darstellbar:$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

2.4.15 Bemerkungen zu nicht endlich erzeugten Vektorräumen

1. Existieren Sie? Ja!
$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum:

- $(\mathbb{R}, +)$ **ist abelsche Gruppe**
- $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$ **(skalare Multiplikation)**
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ **(Assoziativität)**
- $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$, $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$, **und** $1 \cdot v = v$

Aber $\mathbb{R}$ ist nicht endlich erzeugt.
Angenommen: $\mathbb{R}$ wäre als $\mathbb{Q}$-Vektorraum endlich erzeugt. Dann hätte $\mathbb{R}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis $v_1, \ldots, v_n$, dann gäbe es eine Bijektion $\mathbb{R} \tilde{\to} \mathbb{Q}^n$. Aber $\mathbb{Q}^n$ ist gleich mächtig wie $\mathbb{Q}$ (nach Cantor), dann folgt: $\mathbb{R} \tilde{\to} \mathbb{Q}$ (gleiche Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$). Wir erhalten einen Widerspruch zu Cantor. Also ist $\mathbb{R}$ nicht endlich erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
Gibt es nun einen Körper jenseits von $\mathbb{C}$, wobei $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{K}^2$ mit $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{K} < \infty$.
$\mathbb{C} = \{a + ib : a.b \in \mathbb{R}\}$, **wobei $1, i$ ist $\mathbb{R}$-Basis.**
Es gibt solche $\mathbb{K}$ nicht, da man zeigen kann, daß eine Kugeloberfläche "Löcher" hat, da man bestimmte Kurven nicht zusammenziehen kann.
2. Haben auch nicht-endlich erzeugte Vektorräume Basen?
Sei $(v_i)_{i \in I}$ Basis:

(i) **jeder Vektor ist eine endliche Linearkombination von einigen der v_i.**

(ii) **je endlich viele v_i sind linear unabhängig (im bisherigen Sinne)**

2.4.16 Mengentheorie: Zermelo-Fraenkle

Zur Mengentheorie nach Cantor lassen sich Widersprüche konstruieren:
Wir betrachten die Menge M aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten:
$M := \{m | m\,\textbf{Menge}, m \notin m\}$

(1) Annahme: M enthält M als Element $(M \in M)$. Dann ist nach Definition $M \notin M$.

(2) Annahme: M enthält sich nicht als Element $(M \notin M)$. Also erfüllt M die geforderte Eigenschaft und ist somit in M enthalten

Ausweg aus diesem Dilemma: Einschränkung des Mengenbildungsprozeß.
Das System, das am häufigsten angewendet wird ist das von Zemelo-Fraenkle (ZF).
Aber aus ZF folgt nicht, daß jeder Vektorraum eine Basis hat.
Zum Glück folgt aus ZF + Auswahlaxiom: Jeder Vektorraum hat eine Basis.

2.4.17 Satz (II.4.3)

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n$, $\mathbf{U} < \mathbf{V}$, dann gilt:

(i) U ist endlich erzeugt, $\dim(\mathbf{U}) \leq \dim(\mathbf{V})$

(ii) $\dim(\mathbf{U}) = \dim(\mathbf{V}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{V}$

Beweis:
(i) Seien $u_1, \ldots, u_k \in \mathbf{U}$ linear unabhängig. Dann $k \leq n$ (folgt aus Basisergänzungssatz). Sei k maximal mit dieser Eigenschaft, das heißt: $u_1, \ldots, u_k$ ist ein maximales unabhängiges System in U (Warnung: "Basen = maximal unabhängige Familien" ist hier nicht anwendbar, weil wir noch nicht nachgewiesen haben, daß U endlich erzeugt wird). Sei $u \in \mathbf{U}$ und $u \neq u_1, \ldots, u_k$. Somit ist u Linearkombination von $u_1, \ldots, u_k$:

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

Wegen der Maximalität sind $u_1, \ldots, u_k, u$ linear abhängig. Das heißt: es existiert eine nicht triviale Darstellung der Null:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \mu u$$

wobei nicht alle Koeffizienten Null sind.
Es folgt: Für $\mu \neq 0$ ist u Linearkombination von $u_1, \ldots, u_k$.
Also zusätzlich: $u_1, \ldots, u_k$ erzeugen $u \Rightarrow u_1, \ldots, u_k$ sind eine Basis.
(ii) "$\Leftarrow$": klar
"$\Rightarrow$": $\dim(\mathbf{U}) = \dim(\mathbf{V}) = n$. $u_1, \ldots, u_n$ sind eine Basis von U. Nach (i) folgt unmittelbar: $u_1, \ldots, u_n$ sind eine Basis von $\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$.

2.4.18 Satz (II.4.4): Dimensionsformel für Unterräume

Sei V endlich dimensionaler Vektorraum und seien U_1, U_2 Untervektorräume, dann gilt:

$$\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_2)$$

Hier ein Beispiel für den $\mathbb{R}^3$

Sei U_1 eine Gerade durch den Nullpunkt, U_2 eine Ebene durch den Nullpunkt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:

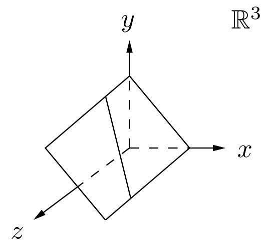

Abbildung II-18: 1. Fall: Die Gerade liegt in der Ebene

Die Gerade ist in der Ebene enthalten: $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{U}_2$

Nun gilt: $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2$

Damit ist die Dimensionsformel für Untervektorräume erfüllt.

2. Fall:

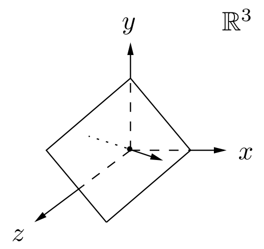

Abbildung II-19: 2. Fall: Die Gerade schneidet die Ebene nur im Nullpunkt

Nun gilt: $\mathbf{U}_1 \not\subseteq \mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{0\}$.

Aber: $\mathbb{R}^3 \supseteq \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \supseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$, wobei v_1 der Richtungsvektor der Geraden und v_2, v_3 die beiden Richtungsvektoren der Ebene sind.

Damit ist die Dimensionsformel für Untervektorräume auch in diesem Fall erfüllt.

Für den Beweis haben wir nun folgendes Schema im Kopf:

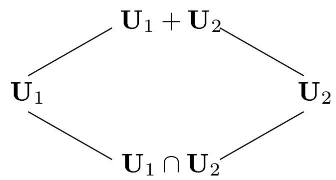

Abbildung II-20: Schema für den Beweis von Satz (II.4.4)

<u>Beweis</u>: Sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$. Nun ergänze $u_1, \ldots, u_k$ zu einer Basis $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l$ von $\mathbf{U}_1$. Zudem ergänze $u_1, \ldots, u_k$ zu einer Basis $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$ von $\mathbf{U}_2$ (Ergänzungen mittels Basisergänzungssatz)

Behauptung: $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m$ **ist eine Basis von** $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$
(Nach der Formel ergibt sich für die linke Seite: $k + (k + l + m)$ **und für die rechte Seite:** $(k + l) + (k + m)$**)**
Beweis: Erzeugendensystem $v = z_1 + z_2$ **mit** $z_i \in \mathbf{U}_i$**.**
Sei:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j v_j \\ z_2 &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k w_k \end{aligned}$$

Es folgt unmittelbar, daß $z_1 + z_2$ **Linearkombination von** $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m$ **ist.** $z_1 + z_2 \in \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m \rangle$
Noch zu zeigen: Lineare Unabhängigkeit. Sei

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i}_{u} + \underbrace{\sum_{j=1}^{l} \mu_j v_j}_{v} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \varphi_k w_k}_{w} = 0$$

Nun ist zu zeigen: Alle $\alpha_i, \beta_j, \gamma_r$ **sind gleich Null.**
Wir wissen:

$$\underbrace{u}_{\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2} + \underbrace{v}_{\mathbf{U}_1} + \underbrace{w}_{\mathbf{U}_2} = 0$$

Also gilt:

$$w = -u - v \in \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$$

da $u, v \in \mathbf{U}_1$**.**
Es ergibt sich:

$$w = \sum_{r=1}^{m} \gamma_r w_r = \sum_{s=1}^{k} \delta_s u_s = u$$

Bringen wir nun beide Terme auf eine Seite, so erhalten wir eine nicht triviale Darstellung der Null:

$$\sum_{r=1}^{m} \gamma_r w_r - \sum_{s=1}^{k} \delta_s u_s = 0$$

Weil u_s, w_r **eine Basis von** $\mathbf{U}_2$ **bilden folgt: Alle Koeffizienten sind gleich Null und damit insbesonders alle** γ_r **sind gleich Null.**
Einsetzen in die Ausgangsgleichung liefert:

$$\sum_{i} \alpha_i u_i + \sum_{j} \beta_j v_j = 0$$

Weil u_i, v_j **eine Basis von** U_1 **bilden, folgt, daß alle Koeffizienten** $\alpha_i, \beta_j = 0$ **sind.**
Damit: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = k + l + m = (k + l) + (k + m) - l = \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_2) - \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2)$

2.4.19 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem ist von folgender Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & 0 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}\cdot x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & 0 \end{array}$$

Gegeben sind alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$, gesucht sind $x_1, \ldots, x_n$.
Wir können einen Lösungsraum angeben:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 0 \quad \textbf{wobei} \quad i = 1, \ldots, m \right\}$$

Der Lösungsraum ist auch auf die folgende Art darzustellen:

$$\mathbb{L} = \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 0 \right\}}_{\doteqdot\, u_i}$$

Hier noch eine kleine Auffrischung: $a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0$

OBdA: Sei $a_1 \neq 0$, dann läßt sich x_1 als LK von $x_2, \ldots, x_n$ darstellen: $x_1 = \sum_{j=2}^{n} -\frac{a_j}{a_1} \cdot x_j$

Daraus folgt unmittelbar: $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} x_j \cdot \left(-\frac{a_j}{a_1}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \right)$ **wobei die** 1 **an der j-ten Stelle steht. Also:**

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot x_i = 0 \right\} = \left\langle \ldots, \left(-\frac{a_j}{a_i}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \right), \ldots \right\rangle \quad \textbf{mit} \quad j = 2, \ldots, n$$

Für die Dimension des Lösungsraumes gilt:

$$\textbf{dim} \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot x_i = 0 \right\} = n - 1 \quad \textbf{falls } a_i = 0$$

Sind alle $a_i = 0$ so folgt unmittelbar, daß $\left\{ x : \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = 0 \right\} = \mathbb{K}^n$ **wobei der $\mathbb{K}^n$ natürlich n-dimensional ist. Wir können also Aussagen über die Dimension des Lösungsraumes machen.**
Wählen wir $m = 2$ so gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \\ \textbf{dim}\,(\mathbb{L}) &= \textbf{dim}\,(\mathbb{L}_1) + \textbf{dim}\,(\mathbb{L}_2) - \textbf{dim}\,(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) \geq (n-1) + (n-1) - n = n - 2 \end{aligned}$$

Damit können wir eine Aussage für $m = 3$ treffen:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= (\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2) \cap \mathbb{L}_3 \\ \textbf{dim}\,(\mathbb{L}) &= \textbf{dim}\,(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2) + \textbf{dim}\,(\mathbb{L}_3) + \textbf{dim}\,(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_3) \geq (n-2) + (n-1) - n = n - 3 \end{aligned}$$

Per Induktion nach m folgt: $\textbf{dim}\,(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{L}_m) \geq n - m$
Die interessanten Fälle sind: $m \leq n - 1 \Rightarrow \textbf{dim}\,(\mathbb{L}) \geq 1$ **(In diesen Fällen haben wir mindestens eine Gleichung weniger als Variablen)**

2.4.20 Studium von Unterräumen

Gegeben seien $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ mit $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 = \{0\}$. Hier ein anschauliches Beispiel für den $\mathbb{R}^3$
I. U_1 ist der $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{U}_2 = \{0\}$

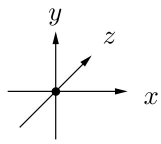

Abbildung II-21: 1. Beispiel für Untervektorräume

II. Sei U_1 eine Ebene und U_2 eine Gerade, wobei $\mathrm{U}_2 \notin \mathrm{U}_1$ (Die Gerade ist nicht in der Ebene enthalten)

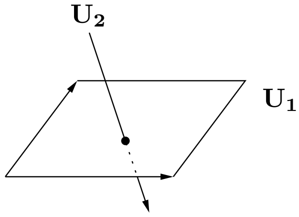

Abbildung II-22: 2. Beispiel für Untervektorräume

Andere Untervektorräume: $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_i) \geq 2$
Behauptung: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) \geq 1$
Beweis: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) \geq \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_2) - \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = 2 + 2 - 3 = 1$
Sei $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) = 2$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_i) = 2$
Behauptung: $\Rightarrow \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$. **Dazu: Ist** $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ **und** $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{V}$

2.4.21 Satz (II.4.5)

Seien $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 < \mathbf{V}$, wobei $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{0\}$

(ii) $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_2)$

(iii) $0 = u_1 + u_2$, $u_i \in \mathbf{U}_i \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$

(iv) **Jedes** $v \in \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ **hat eine eindeutige Darstellung der Form** $v = u_1 + u_2$ **mit** $u_i \in \mathbf{U}_i$

Beweise:
$(i) \Rightarrow (ii)$: **Dimensionsformel:** $\mathbf{dim}\,\{0\} = 0$
$(ii) \Rightarrow (iii)$: **Angenommen:** $0 = u_1 + u_2$, **ein** $u_i \neq 0$ **(nicht beide** u_i **können Null sein). Damit sind beide** u_i **ungleich Null:** $u_1 = -u_2 \neq 0$. $u_1 \in \mathbf{U}_1$, **da** $u_1 = -u_2 \neq 0 \Rightarrow u_1 \in \mathbf{U}_2 \Rightarrow \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 \neq \{0\} \Rightarrow \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) \geq 1$. **Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme:** $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_1) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_2)$
$(iii) \Rightarrow (iv)$: **Annahme: Sei** $v = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ **wobei** $u_i, u_i' \in \mathbf{U}_i$. **Zu zeigen:** $u_1 = u_1'$, $u_2 = u_2'$. **Es gilt:** $0 = v - v = u_1 + u_2 - u_1' - u_2' = \underbrace{(u_1 - u_1')}_{\in \mathbf{U}_1} + \underbrace{(u_2 - u_2')}_{\in \mathbf{U}_2}$. **Nach** (iii) **folgt:** $u_1 = u_1'$ **und** $u_2 = u_2'$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ **Sei** $v \in \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ **und** $0 = \underbrace{v}_{\in \mathbf{U}_1} + \underbrace{(-v)}_{\in \mathbf{U}_2}$. $0 \in \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ **und** $0 = \underbrace{0}_{\in \mathbf{U}_1} + \underbrace{0}_{\in \mathbf{U}_2}$.
Da es nur eine eindeutige Darstellung gibt, folgt: $v = 0$.

2.4.22 Definition (II.4.d): Komplement eines Untervektorraums

$\mathbf{U}_2$ heißt Komplement oder komplementärer Vektorraum zu $\mathbf{U}_1 < \mathbf{V}$, wenn gilt:

$$\mathbf{U}_2 < \mathbf{V}, \quad \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{0\}, \quad \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}$$

Achtung: Die Definition unterscheidet sich von dem Mengentheoretrischen Komplement.

2.4.23 Satz (II.4.6)

Jeder Untervektorraum eines endlich erzeugten Vektorraums besitzt ein Komplement.

Beweis: Sei $\mathbf{U} < \mathbf{V}$, wobei $\mathbf{V}$ ein endlich erzeugter Vektorraum ist. Dann hat $\mathbf{U}$ eine Basis $u_1, \ldots, u_k$. Nach dem Basisergänzungssatz bildet $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ eine Basis von $\mathbf{V}$. Setze nun $\mathbf{U}' := \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle$

Behauptung: $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}' = \{0\}$ beziehungsweise $\mathbf{U} + \mathbf{U}' = \mathbf{V}$

Beweis: $\mathbf{U}+\mathbf{U}' = \mathbf{V}$, weil $\mathbf{U}+\mathbf{U}'$ die Basis von $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ enthält. Weiterhin:

$$\mathbf{dim}\,(\mathbf{U} + \mathbf{U}') = n = k + (n-k) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}')$$

Nach Satz (II.4.5) (ii) folgt: $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}' = \{0\}$

Bemerkung:

(i) Notation: $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}$: $\mathbf{V}$ ist die direkte Summe von $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}'$

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U} :\Leftrightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{U}' = \{0\}, \quad \mathbf{U} + \mathbf{U}' = \mathbf{V}$$

(ii) Es gibt im Allgemeinen mehrere Komplemente: Beispiele (siehe (iii)) oder: Basisergänzung ist nicht eindeutig.

(iii) Beispiel:

$$\mathbf{V} = \left(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\right)^2$$

Hier die Darstellung von

$$\mathbf{U}_1 = \left\{ \left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{1}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right) \right\} = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \cdot \left(\overline{1}, \overline{0}\right)$$

und

$$\mathbf{U}_2 = \left\{ \left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{1}, \overline{2}\right), \left(\overline{2}, \overline{1}\right) \right\} = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \cdot \left(\overline{1}, \overline{2}\right)$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 & \\
\mathbf{U}_1 \arrow[ur] & & \mathbf{U}_2 \arrow[ul] \\
 & \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung II-23: Darstellung von $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_2$

Behauptung: $\mathbf{U}_2$ ist das Komplement zu $\mathbf{U}_1$.
Zu zeigen: $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{0\}$ und $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}$.
Beweis: Man sieht leicht:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 &= \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{0}\right),\left(\overline{2},\overline{0}\right)\right\} \cap \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{2}\right),\left(\overline{2},\overline{1}\right)\right\} \\ &= \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right)\right\}\end{aligned}$$

$\mathbf{V} = \left(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\right)^2 = \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{0}\right),\left(\overline{0},\overline{1}\right)\right\}$ **Es reicht diese drei Paare zu betrachten, da wir alle anderen als Linearkombinationen darstellen können.**
Da es sich um einen endlichen Körper handelt können wir alle Kombinationen ausrechnen:

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \left\{\left(\overline{0},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{0}\right),\left(\overline{2},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{2}\right),\left(\overline{2},\overline{1}\right)\right\}$$

$\left(\overline{0},\overline{0}\right)$ **ist zwingend erforderlich, also brauchen wir nur noch zwei lineare unabhängige Vektoren zu wählen und zeigen, daß sie V erzeugen. z.B.** $\left(\overline{2},\overline{0}\right),\left(\overline{1},\overline{2}\right)$. **In** $\left(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\right)^2$ **ist** $\overline{2}\cdot\left(\overline{2},\overline{0}\right) = \left(\overline{4},\overline{0}\right) = \left(\overline{1},\overline{0}\right) \in \mathbf{V}$ **und** $\overline{2}\cdot\left(\overline{1},\overline{2}\right) - \left(\overline{2},\overline{0}\right) = \left(\overline{2},\overline{1}\right) - \left(\overline{2},\overline{0}\right) = \left(\overline{0},\overline{1}\right) \in \mathbf{V}$
Beweis: $(ii) \quad \Rightarrow \quad (i)$**: ?**

Kapitel III: Lineare Abbildungen und Matrizen

3.1 Kapitel (III.1): Grundbegriffe

3.1.1 Definition (III.1.a): Vektorraumhomomorphismus

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann heißt $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-linear (auch "Vektorraumhomomorphismus" oder "$\mathbb{K}$-lineare Transformation") wenn folgendes gilt:

(i) $\forall v, w \in \mathbf{V}$**:** $f(v + w) = f(v) + f(w)$

(ii) $\forall v \in \mathbf{V}$**,** $\forall \alpha \in \mathbb{K}$**:** $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$

Zusammengefaßt: $f(\alpha v + \beta w) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w)$

3.1.2 Beispiele für Vektorraumhomomorphismen

(a) $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W} : v \mapsto 0 = 0_{\mathbf{W}}$ **ist eine lineare Abbildung, denn**

$$f(v + w) = 0_{\mathbf{W}} \quad \textbf{und} \quad f(v) + f(w) = 0_{\mathbf{W}} + 0_{\mathbf{W}} = 0_{\mathbf{W}}$$

beziehungsweise

$$f(\alpha \cdot v) = 0_{\mathbf{W}} \quad \textbf{und} \quad \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot 0_{\mathbf{W}} = 0_{\mathbf{W}}$$

Diese linear Abbildung wird als "Nullabbildung" bezeichnet.

(b) $\mathbf{V} = \mathbb{K}$**,** $\mathbf{W}$ **beliebig,** $w \in \mathbf{W}$ **mit** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W} : \lambda \mapsto \lambda \cdot w$ **ist eine lineare Abbildung, denn**

$$f(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu) \cdot w = \lambda \cdot w + \mu \cdot w = f(\lambda) + f(\mu)$$

beziehungsweise

$$f(\alpha \cdot \lambda) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot w = \alpha \cdot (\lambda \cdot w) = \alpha \cdot f(\lambda)$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbf{V}$ **und** $\alpha \in \mathbb{K}$ **(Skalar)**

(c) Zur Erinnerung $\langle\,,\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **(Skalarprodukt). Für** $n = 2$ **gilt:**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot y_i$$

Die Abbildung $\langle x, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **ist** $\mathbb{R}$**-linear, denn**

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

beziehungsweise

$$\langle x, \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$$

(schon zu Anfang der Vorlesung gezeigt in (I.3.1))

(d) Matrizen liefern lineare Abbildungen. Sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ **= Menge der** $m \times n$**-Matrizen:**

$$\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \ni A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

wobei $i = 1, \dots, m$ **und** $j = 1, \dots, n$**.**

a_{ij} **sind die Einträge der Matrize** A**, wobei der erste Index** i **die Zeile und der zweite Index** j **die Spalte bezeichnet.**

$A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **mit**

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_j a_{1j} \cdot x_j, \sum_j a_{2j} \cdot x_j, \dots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \dots, \sum_j a_{mj} \cdot x_j \right)$$

Nehmen wir nun Bezug auf Beispiel (c) so gilt:

$$A = (x_1, \ldots, x_n), \quad f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad f_A(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$$

Später: Jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von der Form $f_A, A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Behauptung: f_A ist $\mathbb{K}$-linear.
Beweis: Seien $x, x' \in \mathbb{K}^n$. Nun gilt:

(1) Für die Addition:

$$\begin{aligned}
f_A(x + x') &= f\left(x_1 + x'_1, \ldots, x_j + x'_j, \ldots, x_n + x'_n\right) \\
&= \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot \left(x_j + x'_j\right), \ldots\right) \\
&\overset{(*)}{=} \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j + a_{ij} \cdot x'_j, \ldots\right) \\
&= \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \ldots\right) + \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x'_j, \ldots\right) \\
&= f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + f\left(x'_1, \ldots, x'_j, \ldots, x'_n\right) \\
&= f_A(x) + f_A(x')
\end{aligned}$$

(2) Für die skalare Multiplikation:

$$\begin{aligned}
f_A(\alpha \cdot x) &= f_A(\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_j, \ldots, \alpha \cdot x_n) \\
&= \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot (\alpha \cdot x_j), \ldots\right) \\
&\overset{(*)}{=} \left(\ldots, \alpha \cdot \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \ldots\right) \\
&= \alpha \cdot \left(\ldots, \sum_j a_{ij} \cdot x_j, \ldots\right) \\
&= \alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&= \alpha \cdot f_A(x)
\end{aligned}$$

Auch hier führen wir die Operationen bei $(*)$ auf $\mathbb{K}$ zurück.

3.1.3 Satz (III.1.1): Eigenschaften linearer Abbildungen

Es gilt:

(i) $f(0_{\mathbf{V}}) = 0_{\mathbf{W}}$

(ii) $f(u-v) = f(u) - f(v)$

Beweise:
Zu (i)**: Es gilt:**

$$f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$$

Subtrahieren wir nun $f(0)$ **so erhalten wir:**

$$f(0) = 0$$

(In dieser Art schon häufig angewendet)
Zu (ii)**: Es gilt:**

$$f(u-v) = f(u+(-v)) = f(u) + f(-v) \overset{?}{=} f(u) + (-f(v)) = f(u) - f(v)$$

Noch zu zeigen: $f(-v) = -f(v)$ **(Ein Homomorphismus respektiert die Inversenbildung)**
Wir können dies auf zwei Arten zeigen:
Mittels Definition (**III**.1.**a**.i)**:** $f(u+v) := f(u) + f(v)$
Auf diesen Beweis bezogen gilt: $f(v) + f(-v) = f(v+(-v)) = f(v-v) = f(0) = 0$
Nun betrachten wir den ersten und den letzten Term und subtrahieren $f(v)$**:** $\Rightarrow$ $f(-v) = -f(v)$
Mittels Definition (**III**.1.**a**.ii)**:** $f(\alpha \cdot v) := \alpha \cdot f(v)$
Auf diesen Beweis bezogen gilt: $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$

3.1.4 Satz (III.1.2): Linearität der Summe

Voraussetzung: f **sei linear**
Behauptung:

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot f(v_i)$$

Wir beweisen per Induktion (Skizze):

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i\right) &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot v_i\right) + \lambda_r \cdot v_r\right) \\
&\overset{(*)}{=} f\left(\sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot v_i\right) + f(\lambda_r \cdot v_r) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot f(v_i) + \lambda_r \cdot f(v_r) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot f(v_i)
\end{aligned}$$

Anmerkung: Bei $(*)$ **geht die Linearität, bei** $(**)$ **die Induktionsvoraussetzung ein, fehlt hier in der Skizze ebenso wie die Induktionsverankerung.**

3.1.5 Satz (III.1.3): Isomorphismen zwischen Matrizen und $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen

Zu jeder $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $f = f_A$. Mit anderen Worten:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

"$\simeq$" bedeutet "Isomorphismus"

Beweis: $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \to f_A$

Behauptung: Diese Abbildung ist eine Bijektion.

Um Bijektivität zu beweisen, zeigen wir, daß die Abbildung injektiv und surjektiv ist.

a) Injektivität:

Zu zeigen: $f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad A = B$

Dazu: j**-te Spalte von** $A = f_A(e_j)$ **(als Zeile geschrieben), denn**

$$f_A(e_j) = f_A(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0) = \underbrace{(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})}_{j-\mathbf{te\,Spalte}}$$

Aus $f_A(e_1), \ldots, f_A(e_n)$ **wird** A **rekonstruiert, aus** $f_B(e_1), \ldots, f_B(e_n)$ **wird** B **rekonstruiert.**

Daher: Wenn $f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad \forall j$**:** $f_A(e_j) = f_B(e_j) \quad \Rightarrow \quad A = B$

b) Surjektivität:

Gegeben: $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ **ist** $\mathbb{K}$**-linear. Falls** $f = f_A$**, dann notwendigerweise:**

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

(Einheitsvektoren als Spalten geschrieben)

Sei $f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ **für** $j = 1, \ldots, n$**. Für die Matrize** A **gilt:**

$$A = (a_{ij}) \quad \textbf{für } i = 1q, \ldots .m \quad \textbf{und} \quad j = 1, \ldots, n$$

Nun gilt für f**:**

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot x_j\right) \\ &= f_A(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Das heißt: $f = f_A$**.**

3.1.6 Definition (III.1.b): Vektorraumhomomorphismus $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$

$\mathbf{V},\mathbf{W}$ seien $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir definieren $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$:={$\mathbb{K}$-lineare Abbildungen von V nach W}. Lies "$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$" als "Homomorphismus $\mathbb{K}$ von V nach W":

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W}) := \{f : \mathbf{V} \to \mathbf{W} : \mathbb{K} - \textbf{linear}\}$$

$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Verknüpfungen: $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

(i) $f + g \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **definiert durch** $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$
Schon gezeigt: $f + g$ **ist $\mathbb{K}$-linear.**

(ii) $\alpha \cdot f \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **definiert durch** $(\alpha \cdot f)(v) := \alpha \cdot f(v)$
Schon gezeigt: $\alpha \cdot f$ **ist $\mathbb{K}$-linear.**

3.1.7 Satz (III.1.4): $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Für den Beweis ist zu zeigen:

(i) $f + g \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **und** $\alpha \cdot f \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$

(ii) $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **ist Abelsche Gruppe**

(iii) die weiteren Vektorraumaxiome

<u>Beweise</u>:

Zu (i): $f + g$ ist wieder linear: $(f+g)(v+w) \stackrel{?}{=} (f+g)(v) + (f+g)(w)$
Für die linke Seite gilt:

$$(f+g)(v+w) \stackrel{\textbf{Def.}}{=} f(v+w) + g(v+w) \stackrel{f,g\,\textbf{linear}}{=} f(v) + f(w) + g(v) + g(w)$$

Für die rechte Seite gilt:

$$(f+g)(v) + (f+g)(w) \stackrel{\textbf{Def.}}{=} f(v) + f(w) + g(v) + g(w)$$

Also ist die linke gleich der rechten Seite.
Kommutativität und Assoziativität sind erfüllt, weil $\mathbf{V},\mathbf{W}$ Vektorräume sind.

Noch zu zeigen: $(f+g)(\alpha \cdot v) \stackrel{?}{=} \alpha \cdot [(f+g)(v)]$
Für die linke Seite gilt:

$$(f+g)(\alpha \cdot v) \stackrel{\textbf{Def.}}{=} f(\alpha \cdot v) + g(\alpha \cdot v) \stackrel{f,g\,\textbf{linear}}{=} \alpha \cdot f(v) + \alpha \cdot g(v)$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\alpha \cdot [(f+g)(v)] \stackrel{\textbf{Def.}}{=} \alpha \cdot [f(v) + g(v)] \stackrel{\textbf{Distr.}}{=} \alpha \cdot f(v) + \alpha \cdot g(v)$$

Also ist die linke gleich der rechten Seite.
$\Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ ist linear.

Zu (ii)**: Abelsche Gruppe - zu zeigen:** $(f+g)+h = f+(g+h)$
Zwei Abbildungen sind gleich, falls sie für alle Argumente dieselben Werte liefert. Wähle $v \in \mathbf{V}$ **beliebig.**
Für die linke Seite an der Stelle v **gilt:**

$$(f+g)(v)+h(v) = (f(v)+g(v))+h(v) = f(v)+g(v)+h(v)$$

Nun gilt für die rechte Seite an der Stelle v**:**

$$f(v)+(g+h)(v) = f(v)+(g(v)+h(v)) = f(v)+g(v)+h(v)$$

Also sind die rechte und die linke Seite gleich, daher $(\mathbf{W},+)$ **Gruppe.**
$0 : \mathbf{V} \to \mathbf{W}, \quad v \mapsto 0_{\mathbf{W}}$
Neutrales Element bezüglich der Addition:

$$(f+0)(v) = f(v)+0(v) = f(v)+0_{\mathbf{W}} = f(v)$$

Also: $f+0 = f = 0+f$
Inverses Elemente bezüglich der Addition: $(-f)(v) := -(f)(v)$**:**

$$(f+(-f))(v) = f(v)+(-f(v)) = f(v)-f(v) = 0$$

Zu (iii)**: weitere Vektorraumaxiome:**
Als Beispiel: $[\alpha\cdot(f+g)](v) = [\alpha\cdot f+\alpha\cdot g](v)$**. Es gilt:**

$$\begin{aligned}
[\alpha\cdot(f+g)](v) &\overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha\cdot[(f+g)(v)] \overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha\cdot[f(v)+g(v)] \overset{\textbf{Distr.}}{=} \alpha\cdot f(v)+\alpha\cdot g(v) \\
&\overset{\textbf{Def.}}{=} (\alpha\cdot f)(v)+(\alpha\cdot g)(v) \overset{\textbf{Def.}}{=} (\alpha\cdot f+\alpha\cdot g)(v)
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **ist wieder** $\mathbb{K}$**-Vektorraum**
Wir können nun auch $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ **iterieren und erhalten wieder einen** $\mathbb{K}$**-Vektorraum:**

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{U},\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W}))$$

ist wieder $\mathbb{K}$**-Vektorraum.**

3.1.8 Anmerkungen zum Beweis von Satz (III.1.4)

Es gilt:

- (i)**:** $+,\cdot$ **Verknüpfungen auf** $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$
- (ii) **und** (iii)**: Vektorraumaxiome für die Verknüpfung**

Wir können auch andere Verknüpfungen betrachten. Wir können zum Beispiel definieren:

$$f' + g := f + g^2$$

Aber für $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{W} = \mathbb{R}$ **mit**

$$(f'+g)(v) = f(v)+(g(v))^2$$

handelt es sich nicht mehr um eine lineare Abbildung.

3.1.9 Beispiel: Der Dualraum $\mathbf{V}^*$

Der Dualraum $\mathbf{V}^*$ ist definiert durch $\mathbf{V}^* := \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$
Anmerkung:

> **$\mathbb{K}$ ist (auf natürlichste Weise) $\mathbb{K}$-Vektorraum: $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$.**
>
> $(a) = a$ **(Einstupel)**
>
> **Addition und skalare Multiplikation sind definiert wie üblich**

Sei V definiert durch $\mathbf{V} := \mathbb{K}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{K}\}$
Nun definieren wir die Projektionen π_1, π_2: $\pi_1(a, b) \to a, \quad \pi_2(a, b) \to b$
Bei den Projektionen handelt es sich um lineare Abbildungen , denn:

$$\pi_1(\alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (a', b')) \overset{!}{=} \alpha \cdot \pi_1(a, b) + \beta \cdot \pi_1(a', b')$$

Veranschaulichung der Projektion:

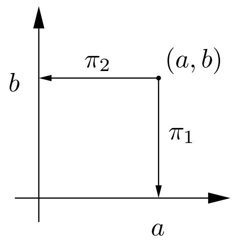

Abbildung III-1: $\pi_1(a, b) = a$ **und** $\pi_2(a, b) = b$

Nachweiß der Linearität:

$$\begin{aligned}
\textbf{linke Seite} &= \pi_1(\alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (a', b')) \\
&= \pi_1(\alpha \cdot a + \beta \cdot a', \alpha \cdot b + \beta \cdot b') \\
&= \alpha \cdot a + \beta \cdot a' \\
&= \alpha \cdot \pi_1(a, b) + \beta \cdot \pi_1(a', b') = \textbf{rechte Seite}
\end{aligned}$$

Weiter: Einige weitere lineare Abbildungen $\lambda : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$.
Sei dazu $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Jedes v hat eine eindeutige Darstellung in dieser Basis:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \quad \textbf{wobei} \quad x_i \in \mathbb{K}$$

Nun gilt: $\lambda_i(v) =: x_i$ (der i-te Koeffizient)
<u>Behauptung</u>: $\lambda_i \in \mathbf{V}^*$
<u>Beweis</u>: Für die Linearität zu zeigen:

(i) $\lambda_i(v + w) = \lambda_i(v) + \lambda_i(w)$

(ii) $\lambda_i(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \lambda_i(v)$

Seien v und w gegeben als Linearkombination: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$

Nun gilt: $v + w = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot v_i$

Außerdem gilt: $\lambda_i (v + w) = x_i + y_i = \lambda_i (v) + \lambda_i (w)$**.**

Analog beweisen wir: $\lambda_i (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \lambda_i (v)$

Für die Einheitsbasis e_1, e_2 **gilt:** $(a, b) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = \pi_1 \cdot e_1 + \pi_2 \cdot e_2$. **Also:** $\pi_i = \lambda_i$.

Bisher: Basis $v_1, \ldots, v_n$ **liefert lineare Abbildungen** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$

Behauptung: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **ist Basis von** $\mathbf{V}^*$ **(**$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}_{\mathbb{K}} \mathbf{V}^* = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}} \mathbf{V}$**)**

Beweis: Zu zeigen: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Das heißt:**

(i) $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i = 0$ **(Nullabbildung)** $\Rightarrow$ **alle** $\alpha_i = 0$

Einige Eigenschaften der Abbildung λ_i**:**

$$\lambda_i (v_i) = 1, \textbf{ denn } v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

$$\lambda_i (v_j) = 0, \textbf{ denn } v_j = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \ldots + 0 \cdot v_n \textbf{ für } j \neq i$$

Symbolische Notation: $\lambda_i (v_j) = \delta_{ij}$. **Wir als Kronecker Symbol bezeichnet:**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Gegeben: $\lambda : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. **Es gilt:**$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda (v_i)$

$\lambda (v_i) \in \mathbb{K}$ **(es handelt sich um einen Skalar). Es gilt:** $x_i = \lambda_i (v)$. **Setzen wir ein, so erhalten wir:**

$$\lambda (v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v) \cdot \lambda (v_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda (v_i)}_{= \alpha_i \in \mathbb{K}} \cdot \lambda_i (v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda (v_i) \cdot \lambda_i \right) (v)$$

Also: $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda (v_i) \cdot \lambda_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **ist Erzeugendensystem.**

Behauptung: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **sind linear unabhängig.**

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i = 0$. **Setzen wir nun** v_{i_0} **ein, so erhalten wir:**

$$0 = 0 (v_{i_0}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underbrace{\lambda_i (v_{i_0})}_{(*)} = \alpha_{i_0}$$

Anmerkung: Bei $(*)$ **handelt es sich um ein Kroneckersymbol.**

Laut Übungsblatt gilt: $\mathbf{dim}\left(\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)\right)=\mathbf{dim}\left(\mathbf{V}\right)\cdot\mathbf{dim}\left(\mathbf{W}\right)$
Nun:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m\right)=\mathbf{M}_{m,n}\left(\mathbb{K}\right)=\left\{\left(\alpha_{ij}\right),\,\alpha_{ij}\in\mathbb{K}\right\}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\dots\alpha_{1n}\\ \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots\\ \alpha_{m1}\dots\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

wobei $i=1,\dots,m$ und $j=1,\dots,n$.
Nun gilt:

$$\begin{aligned} f_A &\leftarrow\!\!\!\shortmid\ A\\ f_A\left(x_1,\dots,x_n\right) &= \left(y_1,\dots,y_n\right)\quad\textbf{wobei}\quad y_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j\end{aligned}$$

Wie kann man sich dies merken?

$$\begin{pmatrix} \\ \leftarrow\quad i-\textbf{te Zeile}\quad\rightarrow\\ \\ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\rightarrow y_i$$

Als Spaltenraum auch als Spaltenvektor geschrieben:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1\cdot v_1+\ldots+x_n\cdot v_n$$

wobei v_i der i-te Spaltenvektor von A ist.
Beweis:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot v_i}_{\textbf{nicht gut!}}\quad=\quad\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot v_j}_{\textbf{besser!}}$$

da es sich um den j-ten Spaltenindex handelt. Nun gilt:

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot v_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{ij}\quad 7\\ \vdots\\ \alpha_{mj}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix}\leftarrow\quad\alpha_{ij}\cdot x_j\quad\rightarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot x_j\end{pmatrix}$$

Anmerkung: Es handelt es sich um jeweils die i-te Spalte.
Nach allgemeinen Überlegungen ist $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m\right)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wegen der Identifizierung mit $\mathbf{M}_{m,n}\left(\mathbb{K}\right)$ gibt es auf $\mathbf{M}_{m,n}\left(\mathbb{K}\right)$ eine $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur.
Wie sieht diese Identifizierung aus?
Addition und skalare Multiplikation:

$A+B$ **wird definiert durch** $f_{A+B}:=f_A+f_B$

$\alpha\cdot A$ **wird definiert durch** $f_{\alpha\cdot A}=\alpha\cdot f_A$

Dazu: $f \rightsquigarrow A =$ beschreibende Matrix. Nun gilt:

$$A = \left(\underbrace{\begin{matrix} \uparrow \\ f(e_j) \\ \downarrow \end{matrix}}_{j-\textbf{te Spalte}} \right)$$

falls $f = f_A$. Daraus: j-te Spalte von $A+B$: $(f_{A+B})(e_j) = f_A(e_j) + f_B(e_j)$ - sprich die j-te Spalte von A plus die j-te Spalte von B.
Additionsformel:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

wobei $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Hier nun ein Beispiel in $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} \\ \overline{7} & \overline{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{5} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{-1} \end{pmatrix}$$

Die skalare Multiplikation ist analog zu behandeln:

$$\lambda \cdot (\alpha_{ij}) = (\lambda \cdot \alpha_{ij})$$

wobei $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Hier nun ein Beispiel für $\mathbb{R}$:

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 60 & 40 \\ 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.10 Definition (III.1.c): Kern (f) und Bild (f)

$f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ sei $\mathbb{K}$-linear, dann definieren wir

$$\textbf{Kern}\,(f) := \{v \in \mathbf{V} | : f(v) = 0\}, \quad \textbf{Bild}\,(f) := \{w \in \mathbf{W} | \exists v \in \mathbf{V} : f(v) = w\}$$

3.1.11 Satz (III.1.5): Kern (f) und Bild (f) sind Untervektorräume

Kern (f) und Bild (f) sind Untervektorräume von V beziehungsweise W.
Um zu zeigen, daß U ein Untervektorraum ist muß gelten:

(i) $\mathbb{K} \cdot \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$

(ii) $\mathbf{U} + \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$

Beweis:
Zu (i): Stets für eine lineare Abbildung: $f(0) = 0 \Rightarrow \{0\} \in \mathbf{Kern}(f)$
Seien $u, v \in \mathbf{Kern}(f)$**, dann gilt:**

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$$

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \mathbf{Kern}(f)$**, dann gilt:**

$$f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Zu (ii): $0 \in \mathbf{Bild}(f)$**, da** $f(0) = 0$ **im Allgemeinen für lineare Abbildungen.**
Seien $w, w' \in \mathbf{Bild}(f)$**. Dann gilt:**

$$w = f(v)\,,\ w' = f(v') \Rightarrow w + w' = f(v) + f(v') = f(v+v') \in \mathbf{Bild}(f)$$

Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ **und** $w \in \mathbf{Bild}(f)$**. Dann gilt:**

$$w = f(v) \Rightarrow \alpha \cdot w = \alpha \cdot f(v) = f(\alpha \cdot v) \in \mathbf{Bild}(f)$$

3.1.12 Verknüpfung linearer Abbildungen

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Q}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume, wobei h, g $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen sind:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbf{W} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{O} \end{tikzcd}$$

Abbildung III-2: Verknüpfung von f und g

Zur Erinnerung: $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

3.1.13 Sätzchen (III.1.6): Sind g, f $\mathbb{K}$-linear, so ist auch $g \circ f$ $\mathbb{K}$-linear.

Beweis:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) &\overset{\textbf{Def.}}{=} g(f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)) \\
&\overset{f\,\textbf{linear}}{=} g \cdot (\alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)) \\
&\overset{g\,\textbf{linear}}{=} \alpha \cdot g(f(u)) + \beta \cdot g(f(v)) \\
&\overset{\textbf{Def.}}{=} \alpha \cdot ((g \circ f)(u)) + \beta \cdot ((g \circ f)(v))
\end{aligned}$$

3.1.14 Matrizenmultiplikation

Wir hatten:

$$\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

wobei $A \mapsto f_A$ mit

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot x_j \right)$$

Für A gilt in diesem Fall:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Schon gezeigt: Die Abbildung ist bijektiv, denn zu jedem $F \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ existiert genau eine Matrix A mit $F = f_A$ (Siehe (III.1.3))
Nun gilt für die Matrizenaddition: $A + B$ ist definiert durch:

$$f_{A+B} := f_A + f_B$$

dies entspricht der komponentenweise Addition.
Analog ist die skalare Multiplikation einer Matrix definiert:

$$f_{\lambda \cdot A} = \lambda \cdot f_A$$

3.1.15 Definition (III.1.d): Matrizenprodukt

Seien $A \in \mathbf{M}_{m,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbf{M}_{r,n}(\mathbb{K})$. Dann heißt die durch

$$f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$$

eindeutig festgelegte Matrix $A \cdot B$ Matrizenprodukt von A und B:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m,r}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{r,n}(\mathbb{K}) &\to \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B \end{aligned}$$

Sei $A = (\alpha_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, r$ und $B = (\beta_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt:

$$C = A \cdot B = (\gamma_{ij}) \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Wähle $j \in \{1, \ldots, n\}$ fest, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ wobei die 1 an der j-ten Stelle steht. Nun gilt:

$$(\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{mj}) = f_{A \cdot B}(e_j) = f_A \circ f_B(e_j) = f_A(\beta_{1j}, \ldots, \beta_{rj}) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{1k} \cdot \beta_{kj}, \ldots, \sum_{k=1}^{r} \alpha_{mk} \cdot \beta_{kj} \right)$$

Das heißt:

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}$$

Hier nun ein Rechenschema für die Matrizenmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\alpha_{i1} \quad\quad \alpha_{ir}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \boxed{\beta_{1j}} & \cdots \beta_{1n} \\ \vdots & & \boxed{\vdots} & \vdots \\ \beta_{r1} & \cdots & \boxed{\beta_{rj}} & \cdots \beta_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \boxed{\gamma_{ij}} & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{nm} \end{pmatrix}$$

Abbildung III-3: Rechenschema für die Matrizenmultiplikation

Voraussetzung für eine Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ ist, daß die Spaltenzahl von A der Zeilenzahl von B entspricht.
Hier zwei Beispiele für die Matrizenmultiplikation:
a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ist nicht definiert, daß die Spaltenanzahl von A (3) ungleich der Zeilenzahl von B (2) ist.**
b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.1.16 Satz (III.1.7): Rechenregeln für Matrizen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, A' \in \mathbf{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ und $C \in \mathbf{M}_{r,m}(\mathbb{K})$. Es gilt:

- **(i)** $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ **ist $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.**
- **(ii)** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ **(Eine Art von "Assoziativität")**
- **(iii)** $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ **beziehungsweise** $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$ **(Eine Art von "Distributivität")**
- **(iv)** $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Beweise:
Zu (i): Die Axiome übertragen sich von $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ aus $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ vermöge $f_A \mapsto A$. Es gilt:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots \ddots \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \qquad -(\alpha_{ij}) = (-\alpha_{ij})$$

Der Beweis erfolgt in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 11.
Zu (ii): Es gilt:

$$f_{(A\cdot B)\cdot C} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A\cdot B} \circ f_C \overset{\textbf{Def.}}{=} (f_A \circ f_B) \circ f_C \overset{\textbf{Ass.}}{=} f_A \circ (f_B \circ f_C) \overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ (f_{B\cdot C}) \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A\cdot(B\cdot C)}$$

Da die Funktionen äquivalent sind gilt auch für die Matrizenmultiplikation

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Zu (iii): Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{A\cdot(B+B')} &\overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ f_{B+B'} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_A \circ (f_B + f_{B'}) \\ &\overset{f\ \textbf{linear}}{=} f_A \circ f_B + f_A \circ f_{B'} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A\cdot B} + f_{A\cdot B'} \overset{\textbf{Def.}}{=} f_{A\cdot B + A\cdot B'} \end{aligned}$$

Da die Funktionen äquivalent sind gilt auch für die Matrizenmultiplikation

$$A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$$

Der zweite Teil des Beweises erfolgt analog.
Zu (iv): Es gilt

$$\begin{array}{ccccccc} f_{(\lambda \cdot A)\cdot B} & \overset{\textbf{Def.}}{=} & f_{\lambda\cdot A} \circ f_B & \overset{f\,\textbf{linear}}{=} & (\lambda \cdot f_A) \circ f_B & & \\ & \overset{\textbf{Ass.}}{=} & \lambda \cdot (f_A \circ f_B) & \overset{\textbf{Def.}}{=} & \lambda \cdot f_{A\cdot B} & \overset{f\,\textbf{linear}}{=} & f_{\lambda\cdot(A\cdot B)} \end{array}$$

beziehungsweise:

$$\begin{array}{ccccccc} f_{(\lambda \cdot A)\cdot B} & \overset{\textbf{Def.}}{=} & f_{\lambda\cdot A} \circ f_B & \overset{f\,\textbf{linear}}{=} & (\lambda \cdot f_A) \circ f_B & \overset{\textbf{Ass.}}{=} & \lambda \cdot (f_A \circ f_B) \\ & \overset{\textbf{Ass.}}{=} & f_A \circ (\lambda \cdot f_B) & \overset{\textbf{Def.}}{=} & f_A \circ f_{\lambda\cdot B} & \overset{\textbf{Def.}}{=} & f_{A\cdot(\lambda\cdot B)} \end{array}$$

Bemerkung: $(i) - (iv)$ sind auch direkt mit der Formel nachweisbar, dies ist aber sehr aufwendig.
Oft betrachten wir auch folgenden Spezialfall: $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ (quadratische Matrize) ist Ring bezüglich $+, \cdot$ mit "Eins" E_n:

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ist neutral bezüglich der Matrizenmultiplikation (Dies ist einfach nachzurechnen).
Für $n \geq 2$ ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ und besitzt Nullteiler. Hier ein Beispiel

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lineare Abbildungen können als Matrizenmultiplikation gedeutet werden:

$$A = \underbrace{(\alpha_{ij})}_{\in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})} \leftrightarrow f_A(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \right)}_{=: (y_1, \dots, y_m)}$$

Dann gilt das folgende Lemma:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

wobei $(x_1, \dots, x_n)$ beziehungsweise $(y_1, \dots, y_m)$ in Form einer $(n \times 1)$ beziehungsweise $(m \times 1)$-Matrix behandelt wird.
Daher: Oft Spaltenvektoren anstatt von n-Tupel.

3.2 Kapitel (III.2): Dimensionsformel und Homomorphiesatz

3.2.1 Definition (III.2.a): Mono-, Epi-, Iso-, Endo- und Automorphismus

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linear. Nun definieren wir:

f **Monomorphismus (monomorph)** $:\Leftrightarrow f$ **injektiv**

f **Epimorphismus (epimorph)** $:\Leftrightarrow f$ **surjektiv**

f **Isomorphismus (isomorph)** $:\Leftrightarrow f$ **bijektiv**

f **Endomorphismus (endomorph)** $:\Leftrightarrow$ $\mathbf{V} = \mathbf{W}$

f **Automorphismus (automorph)** $:\Leftrightarrow$ f **isomorph und endomorph**

3.2.2 Satz (III.2.1)

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ und $\mathbb{K}$-linear.
Dann gilt: f ist Isomorphismus $\Rightarrow$ f^{-1} ist Isomorphismus.
Beweis: Es ist klar, daß f^{-1} existiert, da f bijektiv ist.
Nun ist noch zu zeigen: f^{-1} ist $\mathbb{K}$-linear.
Seien $v_1, v_2 \in \mathbf{V}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2\right)\right) &= \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = \lambda_1 \cdot f\left(f^{-1}\left(v_1\right)\right) + \lambda_2 \cdot f\left(f^{-1}\left(v_2\right)\right) \\ &\overset{\textbf{linear}}{=} f\left(\lambda_1 \cdot f^{-1}\left(v_1\right)\right) + f\left(\lambda_2 \cdot f^{-1}\left(v_2\right)\right) \end{aligned}$$

Es folgt, da f injektiv ist: $\Rightarrow$ $f^{-1}\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2\right) = \lambda_1 \cdot f^{-1}\left(v_1\right) + \lambda_2 \cdot f^{-1}\left(v_2\right)$
Bekannt: Kern von $f < \mathbf{V}$, Bild von $f < \mathbf{V}$. f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $f = \{0\}$ (Aufgabe auf Blatt 11).

3.2.3 Satz (III.2.2)

Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbb{K}$ ein Körper. $\mathbf{V}$ habe die Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine geordnete Familie aus $\mathbf{W}$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ mit $F(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Weiterhin gilt:

(i) $F(\mathbf{V}) = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$

(ii) F **injektiv** $\Leftrightarrow$ $w_1, \ldots, w_n$ **sind linear unabhängig**

Beweis:
<u>Eindeutigkeit</u>: Seien $F, \widetilde{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-linear mit $F(v_i) = w_i = \widetilde{F}(v_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.
Sei $v \in \mathbf{V}$ beliebig, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$. Es folgt:

$$F(v) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot F(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \widetilde{F}(v_i) = \widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \widetilde{F}(v)$$

Also: $F = \widetilde{F}$.

<u>Existenz</u>: Sei $v \in \mathbf{V}$ beliebig, dann existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

Setze $F(v) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i$. F ist linear (nachrechnen). Es ist $v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \cdot v_i$

(δ_{ij} ist das Kroneckersymbol). Es folgt: $F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \cdot w_i := w_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Aus der Definition von F im Existenzbeweis sieht man: $F(v) = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$.
Folgerung: $\{f : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V} : f \,\text{ist Isomorph}\} \simeq \{\text{geordnete Basen von}\, \mathbf{V}\}$
Dabei bezeichnet "$\simeq$", daß die Abbildung eine Bijektion ist. Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} & \Psi & \\ f & \mapsto & (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \\ & \Theta & \\ \varphi_{\mathfrak{A}} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

wobei $\varphi_{\mathfrak{A}}$ definiert ist durch $\varphi_{\mathfrak{A}}(e_i) := v_i$.
Hier nun ein oft angewandter Trick um Bijektivität zu zeigen:

$$\begin{array}{ccl} f \circ g = \mathbf{id} & \Rightarrow & f \ \textbf{surjektiv und } g \ \textbf{injektiv} \\ g \circ f = \mathbf{id} & \Rightarrow & g \ \textbf{injektiv und } f \ \textbf{surjektiv} \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Nun gilt:

$$\Psi \circ \Theta(\mathfrak{A}) = \Psi(\varphi_{\mathfrak{A}}) = (\varphi_{\mathfrak{A}}(e_1), \ldots, \varphi_{\mathfrak{A}}(e_n)) \overset{\textbf{Def.}}{=} (v_1, \ldots, v_n) = \mathfrak{A} \Rightarrow \Psi \circ \Theta = \mathbf{id}$$

Andererseits: Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V}$ Isomorphismus. Nun gilt:

$$[\Theta \circ \psi(f)](e_i) = \varphi_{\Psi(f)}(e_i) \overset{\textbf{Def.}}{=} (\Psi(f))_i = f(e_i)$$

für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz (III.2.2) folgt: $\Theta \circ \Psi(f) = f \quad \Rightarrow \quad \Theta \circ \Psi = \mathbf{id}$. Also handelt es sich bei Θ und Ψ um Isomorhismen.

3.2.4 Satz (III.2.3): Dimensionformel (Hauptsatz)

Dimensionsformel für lineare Algebra:

$$\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f)) + \mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f))$$

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{Kern}(f) = \{v \in \mathbf{V} : f(v) = 0\}$$

$$\mathbf{Bild}(f) = \{w \in \mathbf{V} : \exists v \in \mathbf{V} : w = f(v)\}$$

Vorbemerkung: $f : \mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$ (Isomorphismus) $\Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W})$.
Beweis: Seien $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbf{V} \Rightarrow f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bilden eine Basis von W.

Beweis von Hauptsatz (III.2.3):
Für f gilt: Kern $(f) < \mathbf{V}$, wähle ein Komplement U zu Kern (f). Dann:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V} & = & \mathbf{Kern}\,(f) \oplus \mathbf{U} \xrightarrow{f} \mathbf{W} \\ \underbrace{u_1}_{\mathbf{Kern}\,(f)} + \underbrace{u_2}_{\mathbf{U}} & \mapsto & f\,(u_1+u_2) = \underbrace{f\,(u_1)}_{=0} + f\,(u_2) = f\,(u_2) \end{array}$$

Anmerkung: "$\oplus$" ist die direkte Summe: $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}$ und $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{0\}$.
Daher: $f\,(\mathbf{V}) = f\,(\mathbf{U})$, nun betrachten wir $f|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to f\,(\mathbf{U}) = f\,(\mathbf{V})$.
Behauptung: $f|_{\mathbf{U}} \to f\,(\mathbf{V})$ ist ein Isomorphismus.
Um einen Isomorphismus zu zeigen müssen wir nachweisen:

- $f|_{\mathbf{U}}$ **ist linear (Klar, da f linear)**
- $f|_{\mathbf{U}}$ **ist surjektiv (Beweis siehe oben)**
- $f|_{\mathbf{U}}$ **ist injektiv**

Anmerkung: g linear, injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $(g) = \{0\}$
Es ist Kern $(f|_{\mathbf{U}}) = \{u \in \mathbf{U} : f\,(u) = 0\} = \mathbf{U} \cap \mathbf{Kern}\,(f) = \{0\}$, weil U Komplement von Kern (f) laut Voraussetzung.

Daraus folgt: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{U}) \overset{(*)}{=} \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f))$
Zu $(*)$ siehe Vorbemerkung.
Zur Erinnerung: $\underbrace{\mathbf{rg}\,(f)}_{\mathbf{Rang}} = \mathbf{dim}\,(f\,(\mathbf{V})) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f))$
Die Dimensionsformel für diesen Fall lautet:

$$\mathbf{rg}\,(f) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f))$$

3.2.5 Satz (III.2.4):

Seinen $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{W})$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ sei einen lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f **ist isomorph**

(ii) f **injektiv**

(iii) f **surjektiv**

Beweise:
$(i) \Rightarrow (ii)$: **Klar (Siehe Definition Isomorphismus)**
$(ii) \Rightarrow (iii)$: f **injektiv** $\Rightarrow$ $\mathbf{Kern}(f) = \{0\}$.

Nach Satz (III.2.3) folgt: $\mathbf{dim}(f(\mathbf{V})) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) \stackrel{(*)}{=} \mathbf{dim}(\mathbf{W})$ **Anmerkung:** $(*)$ **nach Voraussetzung. Also:** $f(\mathbf{V}) < \mathbf{W}$, $\mathbf{dim}(f(\mathbf{V})) = \mathbf{dim}(\mathbf{W}) \Rightarrow f(\mathbf{V}) = \mathbf{W}$ **(Der letzte Schluß geht zurück auf die Basisergänzung)**
$(iii) \Rightarrow (i)$: **Nach Voraussetzung:** $f(\mathbf{V}) = \mathbf{W}$.

Nach der Dimensionsformel: $\mathbf{rg}(f) = \mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f)) = \mathbf{dim}(\mathbf{W}) \stackrel{(*)}{=} \mathbf{dim}(\mathbf{V})$
Anmerkung: $(*)$ **nach Voraussetzung.** $\Rightarrow \mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f)) = 0 \Rightarrow \mathbf{Kern}(f) = \{0\} \Rightarrow f$ **ist injektiv** $\Rightarrow f$ **ist bijektiv.**
Der Schluß f **ist injektiv** $\Rightarrow f$ **ist bijektiv ist im Allgemeinen falsch. Der Schluß ist allerdings in zwei Fällen richtig:**

(i) f **linear,** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **wobei** $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ $\mathbb{K}$**-Vektorräume sind und** $\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W})$

(ii) Seien $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ **endliche Mengen:** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **und** $|\mathbf{V}| = |\mathbf{W}|$ **(Kardinalität der Mengen ist gleich)**

3.2.6 Satz (III.2.5)

Für endlich dimensionierte Vektorräume $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ **sind folgende Aussagen äquivalent:**

(i) $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$ **(V und W sind isomorph)**

(ii) $\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W})$

Beweise:
$(i) \Rightarrow (ii)$: **Siehe Vorbemerkung**
$(ii) \Rightarrow (i)$: **Seien** $v_1, \ldots, v_n$ **eine Basis von V und** $w_1, \ldots, w_n$ **eine Basis von W. Nach Satz (III.2.1) existiert eine lineare Abbildung** $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **mit** $f(v_i) = w_i$.
Zur Erinnerung: $f\left(\sum \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum \lambda_i \cdot f(v_i) = \sum \lambda_i \cdot w_i$.
$f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **ist linear,** $f(\mathbf{V}) = (f(v_1), \ldots, f(v_n)) = (w_1, \ldots, w_n) = \mathbf{W}$. **Also:** f **ist surjektiv. Nach Satz (III.2.4) folgt:** f **ist isomorph.**

3.2.7 Klassifikation in der Mathematik

Zur Struktur gehört immer ein Isomorphismus (strukturverträgliche Abbildung)
Klassifikation:

(i) Liste von paarweise nicht isomorphen Strukturen (zum Beispiel Gruppen oder $\mathbb{K}$**-Vektorräume)**

(ii) Beweis, daß jede Struktur (unter Betrachtung: zum Beispiel Gruppen oder $\mathbb{K}$**-Vektorräume) isomorph zu einer Struktur auf der Liste ist.**

Beispiel: Strukturen sind $\mathbb{K}$**-Vektorräume, wobei** $\mathbb{K}$ **fest ist. Isomorphismen sind** $\mathbb{K}$**-lineare Bijektionen. Die Liste besteht aus** $\left\{\{0\}, \mathbb{K}^1, \mathbb{K}^2, \ldots, \mathbb{K}^n, \ldots\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$
Beweis:

(i) ist klar

(ii) $\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = n$, $\mathbf{V} \simeq \mathbb{K}^n$

3.2.8 Faktorräume

Situation: $\mathbf{U} < \mathbf{V}$. Wir konstruieren $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ (Faktorraum) - sprich "V modulo U" oder "V nach U"

Analogie: $n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$**: bezüglich der Addition Untergruppe. Konstruktion von** $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ **mittels der Äquivalenzrelation** $a \equiv b \mod n \Leftrightarrow n\,|a-b \Leftrightarrow a-b \in n \cdot \mathbb{Z}$**.**

Es gilt: $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{[a] : a \in \mathbb{Z}\}$**, wobei** $[a] \doteqdot \overline{a}$ **als Äquivalenzklassen bezeichnet werden.**

Hier für Faktorräume: $a \underset{U}{\sim} b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbf{U}$ **(Die Äquivalenzrelation wird durch U induziert)**

3.2.9 Satz (III.2.6)

Behauptung: $\underset{U}{\sim}$ **ist eine Äquivalenzrelation**

Beweis:

Hier: $u \underset{U}{\sim} v \doteqdot u \sim v$

Wir müssen nun folgende Eigenschaften nachweise:

- **(i) Reflexivität**
- **(ii) Symmetrie**
- **(iii) Transitivität**

Zu (i)**:** $u \sim u$**, denn** $u - u = 0 \in \mathbf{U}$ **(**0 **ist enthalten in jedem Unterraum - siehe Eigenschaften von Unterräumen)**

Zu (ii)**: Sei** $u \sim v$**. Zu zeigen:** $v \sim u$

$u \sim v \Rightarrow u - v \in \mathbf{U} \Rightarrow (-1) \cdot u - (-1) \cdot v \in \mathbf{U} \Rightarrow v - u \in \mathbf{U} \Rightarrow v \sim u$

Zu (iii)**: Sei** $u \sim v$ **und** $v \sim w$**. Zu zeigen:** $u \sim w$

$u \sim v,\ v \sim w \Rightarrow u - v, v - w \in \mathbf{U} \Rightarrow u - w = (u - v) + (v - w) \in \mathbf{U} \Rightarrow u - w \in \mathbf{U}$

3.2.10 Definition (III.2.b):

Wir definieren: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **={Äquivalenzklasse von** $\underset{U}{\sim}$**}**

Berechnung der Äquivalenzklasse:

$$\begin{aligned} [v] &= \{w \in \mathbf{V} : w - v \in \mathbf{U}\} \\ &= \{w \in \mathbf{V} : \exists u \in \mathbf{U} : w - v = u\} \\ &= \{w \in \mathbf{V} : \exists u \in \mathbf{U} : w = v + u\} =: v + \mathbf{U} \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $\overline{k} = k + n \cdot \mathbb{Z}$**)**

3.2.11 Vektorraumstruktur von $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$

$$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \{v + \mathbf{U} : v \in \mathbf{V}\} = \{v + u | \, u \in \mathbf{U}\}$$

Axiome:

(i) $v + \mathbf{U} = v' + \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in \mathbf{U}$

(ii) $(v + \mathbf{U}) + (v' + \mathbf{U}) := (v + v') + \mathbf{U}$

(iii) $\alpha \cdot (v + \mathbf{U}) := \alpha \cdot v + \mathbf{U}$

(iv) $0_{\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}} := 0 + \mathbf{U}$

(v) $-(v + \mathbf{U}) = (-v) + \mathbf{U}$

Addition: Seien k_1, k_2 Äquivalenzklassen.
Wähle $k_1 = [v_1]$, $k_2 = [v_2]$ und setze $k_3 := [v_1 + v_2]$.
Skalare Multiplikation: Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und k_1 sei Äquivalenzklasse: $\alpha \cdot k_1 = k_2$.
Wähle $k_1 = [v_1]$ und setze $k_2 := [\alpha \cdot v_1]$.
Kurzfassung der Vektorraumaxiome: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \{v + \mathbf{U} : v \in \mathbf{V}\}$. Zu zeigen:

$$\begin{aligned} (v + \mathbf{U}) + (v' + \mathbf{U}') &= (v + v') + \mathbf{U} \\ \alpha \cdot (v + \mathbf{U}) &= \alpha \cdot v + \mathbf{U} \end{aligned}$$

Problem: Wohldefiniertheit der Verknüpfungen zeigen, daß heißt: Unabhängigkeit der Auswahl.
Hier als Beispiel die Addition, die skalare Multiplikation ist analog zu zeigen:
Sei $k_1 = [v_1] = [v_1']$, $k_2 = [v_2] = [v_2']$. Zu zeigen: $v_1 + v_2 \underset{U}{\sim} v_1' + v_2'$.
Es gilt: $(v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') \in \mathbf{U}$, weil $(v_i - v_i') \in \mathbf{U}$ nach Voraussetzung.

3.2.12 Satz (III.2.7)

(i) **$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$, $v \mapsto v + \mathbf{U}$ ist Epimorphismus mit Kern$(\pi) = \mathbf{U}$**

(ii) **Ist $\dim(\mathbf{V}) < \infty$, so auch $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} < \infty$ und es gilt: $\dim(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U})$**

Beweis etwas später.
Zuerst eine geometrische Veranschaulichung: Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{U} = \mathbb{R} \cdot (1, 1)$

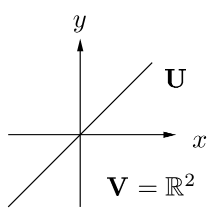

Abbildung III-4: Darstellung von **V** und **U**

Nun gilt:

$$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \left\{v + \mathbb{R}\cdot(1,1) : v \in \mathbb{R}^2\right\} = \{\textbf{Geraden parallel zu y} = x\}$$

Sei $h = (0,c) + \mathbf{U}$ **und** $g = (0,b) + \mathbf{U}$**, dann gilt für** $g + h$**:**

$$g + h = ((0,c) + \mathbf{U}) + ((0,b) + \mathbf{U}) = [(0,c) + (0,b)] + \mathbf{U} = (0, b + c) + \mathbf{U}$$

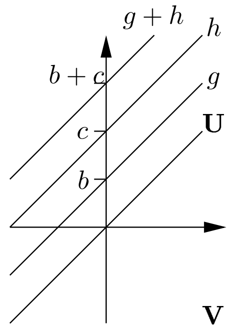

Abbildung III-5: g, h und $g + h$

Für die skalare Multiplikation gilt:

$$\alpha \cdot g = \alpha \cdot (0,b) + \mathbf{U} = (0, \alpha \cdot b) + \mathbf{U}$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}/_{\mathbf{U}} & \simeq & \mathbb{R}^1 \\ (0,b) + \mathbf{U} & \leftarrow\!\shortmid & b \end{array}$$

Die Abbildung ist linear (siehe oben: Addition und skalare Multiplikation)
Analog für $\mathbb{R}^3$**.** $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$**,** $\mathbf{U} = \mathbb{R}^3 \cdot (1,0,0) + \mathbb{R} \cdot (1,1,1)$

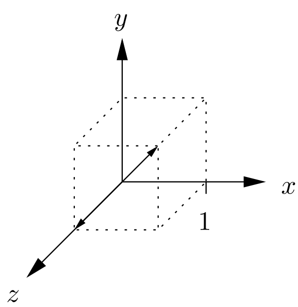

Abbildung III-6: Darstellung von **V** und **U**

In diesem Fall: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}} = \{P + \mathbb{R}\cdot(1,0,0) + \mathbb{R}\cdot(1,1,1)\}$ **(Alle parallelen Ebenen). Es gilt:**

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}/_{\mathbf{U}} & \simeq & \mathbb{R}^1 \\ (0,0,z) + \mathbf{U} & \leftarrow\!\shortmid & z \end{array}$$

Beweis: $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ ist abelsche Gruppe und Vektorraum:
Zu (i):

Assoziativität folgt aus der Assoziativität von V

Kommutativität folgt aus der Kommutativität von V

Das Nullelement: $[0] \in \mathbf{U}$

Das Inverse Element: $-(v+\mathbf{U}) = (-v) + \mathbf{U}$

Die Axiome nachrechnen, wobei alle Operationen auf V zurückgeführt werden

$\Rightarrow$ **$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum**
Beweis der Linearität:

π **ist surjektiv (siehe Definition von** π**)**

$$\pi(v+v') = (v+v') + \mathbf{U} \overset{\textbf{Def}}{=} (v+\mathbf{U}) + (v'+\mathbf{U}) = \pi(v) + \pi(v')$$

$$(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot v + \mathbf{U} \overset{\textbf{Def}}{=} \alpha \cdot (v+\mathbf{U}) = \alpha \cdot \pi(v)$$

Es gilt: $\mathbf{Kern}(\pi) = \{v : v+\mathbf{U} = [0]\} \Leftrightarrow \{v : v \sim 0\} \overset{(*)}{=} \mathbf{U}$
Anmerkung zu $(*)$: Gleichheit folgt aus den Eigenschaften der Äquivalenzrelation.
Jeder Kern ist Untervektorraum einer linearen Abbildung.

$\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum.
"$v+\mathbf{U}$" wird als "Neben-" oder "Restklasse von v modulo U" bezeichnet.
Zur Erinnerung: für $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$: $k + n \cdot \mathbb{Z}$: Restklasse von k modulo $n\mathbb{Z}$.
$\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}, v \mapsto v + \mathbf{U} = [v]$. **$\pi$ ist der harmonische Epimorphismus,** $\mathbf{Kern}(\pi) = \mathbf{U}$.
Zu (ii): $\mathbf{dim}(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}(\mathbf{U})$
$\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}'$ **(mittels Basisergänzung).** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}' \xrightarrow{\pi} \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **wobei π surjektiv ist.**
$\pi(u+u') = \underbrace{\pi(u)}_{(*)} + \pi(u') = \pi(u')$. **Anmerkung zu $(*)$:** $\pi(u) = 0$, **da** $\mathbf{Kern}(\pi) = \mathbf{U}$.
Folgerung: $\pi|_{\mathbf{U}'} : \mathbf{U}' \to \mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$ **ist surjektiv.**
Behauptung: $\pi|_{\mathbf{U}'}$ **ist injektiv.**
Beweis: $\mathbf{Kern}(\pi|_{\mathbf{U}'}) = \mathbf{U}' \cap \mathbf{Kern}(\pi) = \mathbf{U}' \cap \mathbf{U} = \{0\}$
1) Somit: π **ist Isomorphismus** $\mathbf{U}' \simeq \mathbf{V}/_{\mathbf{U}} \Rightarrow \mathbf{dim}(\mathbf{U}') = \mathbf{dim}(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}})$, **da** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}' \Rightarrow \mathbf{dim}(\mathbf{U}') = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}(\mathbf{U})$. **Es folgt:** $\mathbf{dim}(\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}(\mathbf{U})$.
2) Alle Komplemente zu U sind isomorph zu $\mathbf{V}/_{\mathbf{U}}$

3.2.13 Satz(III.2.8): Homomorphiesatz

Gegeben $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seinen $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ ist $\mathbb{K}$-linear, dann gilt:

$$\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)} \simeq \mathbf{Bild}\,(f)$$

Beweis: Wie erhält man eine Abbildung von $\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)} \to \mathbf{Bild}\,(f)$?

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbf{Kern}(f) \arrow[u] & \mathbf{Bild}(f) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Idee für die Konstruktion von f. Es ist

$$\begin{aligned}
f\,(v) = f\,(w) \quad &\Leftrightarrow \quad f\,(v-w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - w \in \mathbf{Kern}\,(f) \quad \Leftrightarrow \quad v \underset{\mathbf{Kern}(f)}{\sim} w \\
&\Leftrightarrow \quad [v] = [w] \quad \Leftrightarrow \quad v + \mathbf{Kern}\,(f) = w + \mathbf{Kern}\,(f)
\end{aligned}$$

Idee:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbf{W} \\
& \mathbf{V}/_{\mathbf{Kern(f)}} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[u, phantom, "///"] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-7: kommutatives Dreieck

Anmerkung zum kommutativen Dreieck: der Weg spielt keine Rolle: $\overline{f} \circ \pi = f$
Behauptung: $\overline{f}$ ist $\mathbb{K}$-linear:
Für die Addition gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{f}\,((v + \mathbf{Kern}\,(f)) + (v' + \mathbf{Kern}\,(f))) &= \overline{f}\,((v + v') + \mathbf{Kern}\,(f)) = \overline{f}\,(v + v') \\
&= \overline{f}\,(v) + \overline{f}\,(v') = \overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) + \overline{f}\,(v' + \mathbf{Kern}\,(f))
\end{aligned}$$

Für die skalare Multiplikation gilt:

$$\overline{f}\,(\alpha \cdot (v + \mathbf{Kern}\,(f))) = \overline{f}\,(\alpha \cdot v + \mathbf{Kern}\,(f)) = \overline{f}\,(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \overline{f}\,(v) = \alpha \cdot \overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f))$$

Was ist nun Kern $\left(\overline{f}\right)$ beziehungsweise Bild $\left(\overline{f}\right)$?
Kern $\left(\overline{f}\right)$:

$$\mathbf{Kern}\left(\overline{f}\right) = \left\{\overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) : \overline{f}\,(v) = 0 = f\,(v)\right\} = \left\{\overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) : v \in \mathbf{Kern}\,(f)\right\} = 0$$

liegt in $\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)}$. Also ist $\overline{f}$ injektiv.
Bild $\left(\overline{f}\right)$: Bild $\left(\overline{f}\right) = \left\{\overline{f}\,(v + \mathbf{Kern}\,(f)) : v \in \mathbf{V}\right\} = \{f\,(v) : v \in \mathbf{V}\} = \mathbf{Bild}\,(f)$
Fazit: $\overline{f} : \mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)} \simeq \mathbf{Bild}\,(f)$
Anwendung: Dimensionsformel für lineare Abbildungen.
Warum:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f)) = \mathbf{dim}\left(\mathbf{V}/_{\mathbf{Kern}(f)}\right) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) \\
\Rightarrow \quad & \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) + \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V})
\end{aligned}$$

3.3 Kapitel (III.3): Rang von Matrizen und linearer Abbildungen

3.3.1 Theorie der Rangbestimmung

Zur Erinnerung: $\mathbf{rg}(f) := \mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f)) = \mathbf{dim}(f(\mathbf{V}))$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ **linear.**
Für $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ **gilt:** $\mathbf{rg}(A) := \mathbf{rg}(f_A)$.
In der letzten Vorlesung haben wir bereits gezeigt:

$$\mathbf{Bild}(f_A) = \langle \textbf{Spaltenvektoren von } A \rangle$$

Aus

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{rg}(A) := \mathbf{rg}(f_A) \\ \mathbf{Bild}(f_A) = \langle \textbf{Spaltenvektoren von } A \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = \#\ \textbf{linear unab. Spaltenv.}$$

Grund:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad A \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

Grundlagen der praktischen Berechnung:

$$\mathbf{U} \xrightarrow{h} \mathbf{V} \xrightarrow{f} \mathbf{W} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$$

Sind h, g **Isomorphismen, so gilt:** $\mathbf{rg}(g \circ f \circ h) = \mathbf{rg}(f)$
Für den speziellen Fall der Matrizen gilt:

$$\mathbb{K}^n \overset{f_B}{\tilde{\to}} \mathbb{K}^n \overset{f_A}{\tilde{\to}} \mathbb{K}^m \overset{f_C}{\tilde{\to}} \mathbb{K}^m, \quad f_C \circ f_A \circ f_B = f_{C \cdot A \cdot B}$$

Abänderung von A **durch die Matrizen** C, B**, die die Eigenschaften haben, daß** f_B, f_C **Isomorphismen sind.**

3.3.2 Definition (III.3.a): Allgemeine Lineare Gruppe $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

$\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ **ist die allgemeine lineare Gruppe von** $n \times n$**-Matrizen über** $\mathbb{K}$ **(Aus dem Englischen von "general linear group").**
Definition:

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \ \textbf{ist Isomorhismus}\}$$

Zur Erinnerung: $\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W})$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f **ist ein Isomorphismus**

(ii) f **ist injektiv**

(iii) f **ist surjektiv**

Speziell für $\mathbf{V} = \mathbf{W}$: $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **ist ein Endomorphismus**
(Ein Endomorphismus ist Isomorphismus, wenn f **injektiv oder surjektiv (Grund ist die Dimensionsformel))**

<u>Anwendung:</u> Gegeben sei eine quadratische Matrix A:

$$A : \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

f_A isomorph $\Leftrightarrow$ f_A surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f_A)) = n$
(In anderer Terminologie: f_A isomorph $\Leftrightarrow \mathbf{rg}(A) = n$)
Damit $A \in GL(n,\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathbf{rg}(A) = n$ ($\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren sind linear unabhängig)
Weiter:

$$\begin{aligned}
f_A \ \textbf{Isomorhismus} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : f_A \circ g = \mathbf{id} = g \circ f_A \ (\textbf{Umkehrabbildung}) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \circ f_B = \mathbf{id} = f_B \circ f_A \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \circ f_B = f_E = f_B \circ f_A \\
&\overset{(\#)}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_{A \cdot B} = f_E = f_{B \cdot A} \\
&\overset{(+)}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : A \cdot B = E = B \cdot A
\end{aligned}$$

<u>Anmerkungen:</u>

> **Zu $(*)$: Welche Matrix beschreibt die Identität?**
> **Allgemein gilt:**
>
> $$\mathbf{id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto x$$
>
> **Für die Matrizenmultiplikation:**
>
> $$\mathbf{id} = f_{\mathbf{E}} \qquad \textbf{mit} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}$$
>
> **E wird als $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Alle Positionen auf der Hauptdiagonalen sind 1, alle anderen 0. Es gilt:**
>
> $$\mathbf{E} \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j = x$$
>
> **Zu $(\#)$: Es gilt: $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$ (siehe (III.1.6))**
>
> **Zu $(+)$: $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$**

Damit (Zusammenfassung):

$$\begin{aligned}
\mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) &= \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : f_A \, \textbf{isomorph}\} \\
&= \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : \mathbf{rg}(A) = n\} \\
&= \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : \exists B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : A \cdot B = E = B \cdot A\}
\end{aligned}$$

Weil $A \cdot B = E = B \cdot A$ gilt: $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) = \{\textbf{invertierbare}\, n \times n - \textbf{Matrizen}\}$
<u>Eine Anmerkung zur Terminologie:</u>

> $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **regulär** $\quad :\Leftrightarrow \quad A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$
>
> $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **irregulär** $\quad :\Leftrightarrow \quad A \notin \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$
> $\Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}(A) < n \Leftrightarrow A$ **ist nicht invertierbar**

3.3.3 Satz (III.3.3): $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation

Beweis:

1. $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist abgeschlossen bezüglich der Matrizenmultiplikation

Seien A, $A' \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) \Rightarrow f_{A\cdot A'} = f_A \circ f_{A'} =$ Komposition linearer Isomorphismen

Wir wissen: Komposition linearer Isomorphismen ist wieder ein linearer Isomorphismus $\Rightarrow A\cdot A' \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$.

2. Assoziativität: Erfüllt, da das Matrizenprodukt assoziativ ist.

Zur Erinnerung: wir haben zwei Möglichkeiten des Beweises betrachtet:

(i) rein rechnerisch: viel Spaß mit den Koeffizienten

(ii) Komposition von Abbildungen:

$$(f_A \circ f_B)\circ f_C = f_A \circ (f_B \circ f_C) \quad \Leftrightarrow \quad f_{(A\cdot B)\cdot C} = f_{A\cdot(B\cdot C)}$$

3. Existenz des Einselement: E ist Einselement (schon oben gezeigt)

4. Existenz des inversen Elements: Sei $A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, dann $\exists B \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ mit

$$A\cdot B = E = B\cdot A \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = B$$

(auch schon oben gezeigt)

Beispiele für $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$:

Sei $n=1$, dann gilt für die allgemeine lineare Gruppe:

$$\mathbf{GL}(1,\mathbb{K}) = \{(a):\ a \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\} \cong \mathbb{K}^*$$

Anmerkung: $\mathbb{K}^*$ ist die multiplikative Gruppe des Körpers.

Sei $n=2$, dann gilt für die allgemeine lineare Gruppe:

$$\mathbf{GL}(2,\mathbb{K}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{K} \quad \textbf{mit} \quad \textbf{det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = a\cdot d - c\cdot b \neq 0\right\}$$

Für die inverse Matrix A^{-1} gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\textbf{det}A}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

Wir wollen nun zeigen, daß $A^{-1}\cdot A = E = A\cdot A^{-1}$ ($\textbf{det}A = a\cdot d - c\cdot b \doteq \Delta$)

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\cdot a - b\cdot c}{\Delta} & \frac{d\cdot b - b\cdot d}{\Delta} \\ \frac{-c\cdot a + a\cdot c}{\Delta} & \frac{-c\cdot b + a\cdot d}{\Delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = E$$

Ebenso gilt:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a\cdot d - b\cdot c}{\Delta} & \frac{-a\cdot b + b\cdot a}{\Delta} \\ \frac{c\cdot d - c\cdot d}{\Delta} & \frac{-c\cdot b + a\cdot d}{\Delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = E$$

$\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$.
Hier nun ein Beispiel. Sei $A, B \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{K})$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3.3.4 3 ausgezeichnete Matrizenfamilien in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, Umformungsmatrizen

Die ausgezeichneten Matrizenfamilien werden auch als Umformungsmatrizen bezeichnet.
Anmerkung: Alle leeren Positionen sind mit Nullen zu füllen.

I.) Sei $\mathbf{M}_i(\alpha)$ gegeben mit

$$\mathbf{M}_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ i-\textbf{te Spalte} \end{array}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Die Spaltenvektoren von links nach rechts abgelesen sind

$$e_1, e_2, \ldots, \alpha \cdot e_i, \ldots, e_n$$

Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig für $\alpha \neq 0$ (Voraussetzung) $\Rightarrow \mathbf{M}_i(\alpha)$ ist invertierbar.

II.) Sei $\mathbf{V}_{ij}$ gegeben mit:

$$\mathbf{V}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ i-\textbf{te Spalte} \qquad j-\textbf{te Spalte} \end{array}$$

wobei $i \neq j$ (ansonsten $\mathbf{V}_{ij} = E$ - also sinnlos)

Die Spaltenvektoren von links nach rechts abgelesen sind

$$e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_n$$

Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\Rightarrow$ $\mathbf{V}_{ij}$ ist invertierbar.

III.) Sei $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ gegeben mit

$$\mathbf{A}_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & \alpha & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ i-\textbf{te Spalte} \qquad j-\textbf{te Spalte} \end{array}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $i \neq j$.
Ansonsten: Für $\alpha = 0$: $\mathbf{A}_{ij}(0) = E$, für $i = j$: $\mathbf{A}_{ii}(\alpha) = \mathbf{A}_i(\alpha)$
Die Spaltenvektoren von links nach rechts abgelesen sind

$$e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_{j-1}, \alpha \cdot e_i + e_j, e_{j+1}, \ldots, e_n$$

Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\Rightarrow$ $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ ist invertierbar.

Seinen $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ und $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{K})$ aus einer der drei Familien.
Sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{T})$ weil

$$\underset{\substack{\in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n}}{S} \cdot \underset{\substack{\in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m}}{A} \cdot \underset{\substack{\in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m}}{T}$$

Wir wollen nun die Auswirkungen der einzelnen Umformungsmatrizen betrachten. Hierzu rechnen wir zuerst ein Beispiel und betrachten dann den allgemeinen Fall.
Sei $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{K})$ für die Beispiele.

3.3.5 Multiplikation mit $\mathbf{M}_i(\alpha)$

I.) Sei $i = 2$ für $\mathbf{M}_i(\alpha)$. Damit sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Multiplikation von links:

$$\mathbf{M}_2(\alpha) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also die zweite Zeile von A mit α.

Für die Multiplikation von rechts erhalten wir:

$$A \cdot \mathbf{M}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha \cdot a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also die zweite Spalte von A mit α.

II.) Allgemein gilt:
Multiplikation mit $\mathbf{M}_i(\alpha)$ von links:

$$\mathbf{M}_i(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & \alpha \cdot v_i & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also die i-te Zeile von A mit α.
Multiplikation mit $\mathbf{M}_i(\alpha)$ von rechts:

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \dots & w_{i-1} & w_i & w_{i+1} & \dots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}_i(\alpha) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \dots & w_{i-1} & \alpha \cdot w_i & w_{i+1} & \dots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die i-te Spalte von A mit α.

3.3.6 Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$

I.) Sei $i = 1$ und $j = 3$ für $\mathbf{V}_{ij}$. Damit sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Multiplikation mit $\mathbf{V}_{13}$ von links:

$$\mathbf{V}_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die erste und dritte Zeile.
Für die Multiplikation mit $\mathbf{V}_{13}$ von rechts erhalten wir:

$$A \cdot \mathbf{V}_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{23} & a_{31} \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die erste und dritte Spalte.

II.) Allgemein gilt:
Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$ von links:

$$\mathbf{V}_{ij}\cdot\begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{j-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{j+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die i-te und j-te Zeile.
Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$ von rechts:Satz (2.8) **HomomorphiesatzUutSatz** (2.8) **Homomorphiesatzut**

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_{i-1} & w_i & w_{i+1} & \cdots & w_{j-1} & w_j & w_{j+1} & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}\cdot\mathbf{V}_{ij}$$
$$= \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_{i-1} & w_j & w_{i+1} & \cdots & w_{j-1} & w_i & w_{j+1} & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen also die i-te Spalte und die j-te Spalte.

3.3.7 Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$

I.) Sei $i=1$ und $j=3$ für $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$. Damit sind folgende Matrizen gegeben:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_{13}(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von links:

$$\mathbf{A}_{13}(\alpha)\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha\cdot a_{31} & a_{12}+\alpha\cdot a_{32} & a_{13}+\alpha\cdot a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile.
Für die Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von rechts erhalten wir:

$$A\cdot\mathbf{A}_{13}(\alpha)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha\cdot a_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha\cdot a_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha\cdot a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache ersten Spalte zur dritten Spalte.

II.) Allgemein gilt:
Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von links:

$$\mathbf{A}_{ij}(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_i + \alpha \cdot v_j & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.
Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ von rechts:

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_i & \cdots & w_j & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_i & \cdots & w_j + \alpha \cdot w_i & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Wir addieren das α-fache der i-ten Spalte zur j-ten Spalte.

3.3.8 Elementare Umformungen von Matrizen

(1) Es gibt Zeilenumformungen und Spaltenumformungen

(2) Es gibt 3 Matrizenfamilie:

- **(I) Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einem Skalar $\alpha \neq 0$**
- **(II) Vertauschung einer Zeile (oder Spalte)**
- **(III) Addition des α-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (Addition des α-fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte)**

Fazit: elementare Umformungen erhalten der Rang (Rang $=$ Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren).
Es gilt:

(i) Multiplikationen der Umformungsmatrizen von links modifizieren die Zeile.

(ii) Multiplikationen der Umformungsmatrizen von rechts modifizieren die Spalte.

a) Hier nun ein Beispiel zur Bestimmung des Rang einer Matrix:
Gegeben sei A mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

3. Zeile − 2 × 1. Zeile. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir a_{12} (2. Spalte − 3 mal 1. Spalte), a_{13} (3. Spalte − 4 mal 1. Spalte) und a_{14} (4. Spalte − 1. Spalte) eliminieren. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir für a_{22} (2. Zeile mal $\frac{1}{3}$) und a_{32} (2. Zeile mal $-\frac{1}{2}$) Einsen erzeugen. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog wie oben eliminieren wir a_{32} (3. Zeile - 2. Zeile). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben eliminieren wir a_{24} (4. Spalte - 2 mal 2. Spalte). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Nun multiplizieren wir die 3. Spalte mit $\frac{1}{5}$. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluß eliminieren wir a_{34} (4. Spalte + 2 mal 3. Spalte). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung: rg $(A) = 3$.

b.) Wir wollen nun ein Beispiel nur mit Zeilenumformungen (Multiplikation von links) rechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_{12}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{I}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{II}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun sind wir schon fast am Ziel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{III}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{IV}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Für die einzelnen Operationen gilt:

(I) $\mathbf{A}_{2,1}(-2)$, $\mathbf{A}_{3,1}(-4)$, $\mathbf{A}_{4,1}(-6)$

(II) $\mathbf{M}_2\left(-\frac{1}{12}\right)$, $\mathbf{M}_3\left(-\frac{1}{20}\right)$, $\mathbf{M}_4\left(-\frac{1}{36}\right)$

(III) $\mathbf{A}_{3,2}(-1)$, $\mathbf{A}_{4,2}(-1)$

(IV) $\mathbf{A}_{1,2}(-6)$

Wir erhalten eine Matrix in der Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung III-8: Beispielmatrize in Zeilenstufenform

3.3.9 Satz (III.3.4)

Jede Matrix läßt sich durch Zeilenumformungen auf die Zeilenstufenform bringen.
Doch zuerst eine Matrix in der Zeilenstufenform, da die Matrix aus dem Beispiel nicht unbedingt typisch für diese Form der Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die freien Plätze sind alle von Nullen belegt, Sterne stehen für beliebige Werte. Man sieht leicht, daß die einzelnen Zeilenvektoren linear unabhängig sind.
Beweisskizze für Satz (III.3.4): Induktionsbeweis nach Zeilenzahl.
Sei A gegeben mit:

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix}$$

wobei B aus den Zeilenvektoren $v_2, \dots, v_m$ besteht. Nun wollen wir B durch Zeilenumformungen manipulieren. Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Nun unterscheiden wir zwei weitere Unterfälle von Fall 1:
Fall 1.1:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Wir substrahieren ein vielfaches der zweiten Zeile von der Ersten.

Fall 1.2: Division durch $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die 1. Zeile mit $\frac{1}{a}$.

Wir erhalten eine Eins.

2. Fall:

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * & * & \dots \\ 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ & & & & 1 & * & \dots \\ & & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & * & * & \dots \\ 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ & & & & 1 & * & \dots \\ & & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ 0 & * & \dots & * & * & * & \dots \\ & & & & 1 & * & \dots \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Zuerst subtrahieren wir ein vielfaches der zweiten Zeile von der ersten Zeile und tauschen anschließend die beiden Zeilen.

Nun unterscheiden wir zwei Unterfälle:

Fall 2.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Zuerst subtrahieren wir von der zweiten Zeile das a-fache der dritten Zeile, so daß wir eine Null erhalten. Anschließend tauchen wir die zweite und dritte Zeile

Fall 2.2: Nun sei $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & a & * & * \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & * \\ & & & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * & * \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Zuerst dividieren wir die zweite Zeile durch a um anschließend die zweite Zeile von der ersten zu subtrahieren, so daß wir eine Null über der Eins erhalten. Damit sind die beiden ersten Zeilenvektoren linear unabhängig.

Allgemein wollen wir die Matrix A so lange mit Zeilenoperartionen umformen bis wir A in der Zeilenstufenform vorliegen haben. Die Anzahl der Spalten in der Spaltenzeilenform ist gleich dem Rang der Matrix A:

$$\mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{rg} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wenden wir nun Spaltenumformungen auf die Zeilenstufenform an, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Links oben haben wir eine $r \times r$-Matrizen deren Diagonale mit Einsen besetzt ist und ansonsten nur Nullen enthält (eine $r \times r$-Einheitsmatrize). Rechts davon sind unbekannte Koeffizienten, darunter ist ein rechteckiger Bereich, der nur Nullen enthält.

Wenden wir nun weitere Spaltenoperationen an, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ & \ddots & & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \cdots\cdots\cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & 0\cdots\cdots 0 \\ \mathbf{E}_r & \vdots \qquad \vdots \\ & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots & 0 \end{array}\right)$$

Am Ende erhalten wir eine Matrix die neben einer $r \times r$-Einheitsmatrize in der oberen linken Ecke nur Nullen enthält. Da diese r Gleichungen linear unabhängig sind folgt, daß der Rang der Matrix r ist.

3.3.10 Satz (**III**.3.5)

(i) Jede Matrix A läßt sich durch Spalten- und Zeilenumformungen auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} & 0\cdots\cdots 0 \\ \mathbf{E}_r & \vdots \qquad \vdots \\ & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots & 0 \end{array}\right)$$

bringen. Es gilt: rg $(A) = r$.

(ii) Zu $A_{m,n}(\mathbb{K})$ existiert $U \in$ GL $(m, \mathbb{K})$ und $V \in$ GL $(n, \mathbb{K})$ mit

$$U \cdot A \cdot V = \left(\begin{array}{c|c} & 0\cdots\cdots 0 \\ \mathbf{E}_r & \vdots \qquad \vdots \\ & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{wobei} \quad r = \mathbf{rg}\,(A)$$

Zwischenbemerkung zum Assoziativgesetz:
Haben wir eine Matrix A und wollen diese in die obige Gestalt bringen, so bieten sich zwei Möglichkeiten an:

(1) Zuerst die Zeilenumformungen und dann die Spaltenumformungen

(2) Zuerst die Spaltenumformungen und dann die Zeilenumformungen

Wir erhalten identische Ergebnisse: $(U \cdot A) \cdot V = U \cdot (A \cdot V)$

3.3.11 Definition (**III**.3.b):

(1) Spaltenrang einer Matrix A: Maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren = rg (A).

(2) Zeilenrang einer Matrix A: Maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren = rg (A).

3.3.12 Satz (III.3.6)

Zeilenrang und Spaltenrang einer beliebigen Matrix sind gleich.
An und für sich ist dies erstaunlich, da zum Beispiel für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{3,720}(\mathbb{K})$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,720} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,720} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,720} \end{pmatrix}$$

Wir haben 720 Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^3$ und 3 Zeilenvektoren aus $\mathbb{R}^{720}$. Trotzdem ist der Spalten- und Zeilenrang von A gleich.

Beweis:
Der Zeilenrang bleibt bei Zeilenumformungen erhalten. Wir betrachten die einzelnen Familien:

(I) **Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$:** $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m \to v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_m$. **Zu zeigen:**

$$\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_m \rangle$$

(II) **Vertauschung zweier Zeilen: klar, da eine Vertauschung von Zeilen den Rang einer Matrix nicht ändert.**

(III) **Addition des α-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile:** $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m \to v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha \cdot v_i + v_j, \ldots, v_m$. **Zu zeigen:**

$$\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha \cdot v_i + v_j, \ldots, v_m \rangle$$

Nun gilt: Zeilenrang von A = Zeilenrang der Zeilenstufenform = Anzahl der Stufen (nach (III.3.b)).
Konsequenz: Basen von Unterräumen des $\mathbb{K}^n$. Sei $\mathbf{U} = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Also:

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_m & \rightarrow \end{pmatrix} \overset{(*)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_k & \rightarrow \\ \leftarrow & 0 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & 0 & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Bei $(*)$ formen wir A in die Zeilenstufenform um.
Behauptung: $w_1, \ldots, w_k$ sind Basis von U
Beweis: Zeilenumformungen erhalten den Rang:

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathbf{U} = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$$

(wir können die Zeilenvektoren die nur Nullen enthalten weglassen)
Die Zeilenvektoren $w_1, \ldots, w_k$ der Zeilenstufenform sind linear unabhängig $\Rightarrow w_1, \ldots, w_k$ sind eine Basis von U.
Für unser Beispiel vom Anfang dieser Vorlesung gilt:

$$\mathbf{U} = \langle (0,2,0), (0,1,6), (0,4,4), (0,6,0) \rangle < \mathbb{R}^3$$

Aus den Umformungen und Satz (III.3.6) folgt allerdings:

$$\mathbf{U} = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$$

3.3.13 Beschreibung einer linearen Abbildung $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ durch Matrizen

Es gilt: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = n \Rightarrow \mathbf{V} \tilde{\to} \mathbb{K}^n$ (schon gezeigt) Wie beschreibt man einen Isomorphismus $\mathbb{K}^n \tilde{\to} \mathbf{V}$? Antwort: Durch die Basis von V. Es gilt:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n \tilde{\to} \mathbf{V} \quad &\Rightarrow \quad \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \textbf{ ist Basis von V} \\ \varphi_{\mathfrak{A}} : \mathbb{K}^n \tilde{\to} \mathbf{V}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i \cdot v_i \quad &\Leftarrow \quad \mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \textbf{ sei Basis von V} \end{aligned}$$

Sei $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = n$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{W}) = m$, $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ ist linear, wähle Basis $\mathfrak{A}$ von V, Basis $\mathfrak{B}$ von W:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung III-9: Skizze für Beschreibung linearen Matrizen

Es gilt: $\varphi_{\mathfrak{B}} \circ g = f \circ \varphi_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow g = (\varphi_{\mathfrak{B}})^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathfrak{A}}$

Es gilt: $g = f_A$, $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. A ist eindeutig nach Wahl der Basen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ der Abbildung f zugeordnet.

Definition: $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$ ist die beschreibende Matrix für f bezüglich $\mathfrak{A}$ von V und $\mathfrak{B}$ von W.

3.3.14 Satz (III.3.7):

Sei $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$, dann gilt: $\mathbf{rg}\,(f) = \mathbf{rg}\,(A)$, $\quad \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f)) = n - \mathbf{rg}\,(A)$ (folgt nach Dimensionsformel)

Beweis:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi = \varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "g = f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}} = \Psi"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung III-10: Skizze für den Beweis Satz (**III**.3.7)

Behauptung: Ψ induziert einen Isomorphismus $\mathbf{Bild}\,(f_A) = \mathbf{Bild}\,(f)$.

($\Rightarrow \quad \mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f_A)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Bild}\,(f)) = \mathbf{rg}\,(f)$)

Beweis:

(i) $\Psi\left(\textbf{Bild}\left(f_A\right)\right) \subseteq \textbf{Bild}\left(f\right)$. **Sei** $w \in \textbf{Bild}\left(f_A\right)$, **das heißt:** $w = f_A\left(v\right)$, $v \in \mathbb{K}^n$. **Damit gilt:**

$$\Psi\left(w\right) = \Psi\left(f_A\left(v\right)\right) = \left(\Psi \circ f_A\right)\left(v\right) \overset{(*)}{=} \left(f \circ \varphi\right)\left(v\right) = f\left(\varphi\left(v\right)\right) \in \textbf{Bild}\left(f\right)$$

Anmerkung: Die Gleichheit von $(*)$ **folgt aus der Kommutativität des Diagramms (der Weg spielt keine Rolle)**

(ii) Damit $\Psi : \textbf{Bild}\left(f_A\right) \to \textbf{Bild}\left(f\right)$, Ψ **ist injektiv, weil** Ψ **die Einschränkung eines Isomorphismus ist.**

(iii) Ψ **ist surjektiv: Sei** $w \in \textbf{Bild}\left(f\right)$. **Zu zeigen:**

(1) $v \in \textbf{Bild}\left(f_{\mathbf{A}}\right)$

(2) $\Psi\left(v\right) = w$

Nach Definition: $w = f\left(v_0\right), v_0 \in \mathbf{V}$, **da** φ **Isomorphismus gibt es** $v_1 \in \mathbb{K}^n$ **mit** $v_0 = \varphi\left(v_1\right)$.
Insgesamt:

$$w = f\left(\varphi\left(v_1\right)\right) = \left(f \circ \varphi\right)\left(v_1\right) = \Psi\left(f_A\left(v_1\right)\right)$$

Setze $v = f_A\left(v_1\right)$

3.3.15 Einträge in die beschreibende Matrix für f

Es gilt: $A = \left(\alpha_{ij}\right)$ **mit** $i = 1, \ldots, m$ **und** $j = 1, \ldots, n$. **Nun gilt:**

$$A \rightsquigarrow f_A, \quad A = \left(\ldots, f_A\left(e_j\right), \ldots\right)$$

wobei $f_A\left(e_j\right)$ **in der** j**-ten Spalte steht.**
Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = f_A\left(e_j\right), \quad \varphi_{\mathfrak{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum x_i \cdot v_i$$

Bilden wir nun einen Einheitsvektor ab, so erhalten wir:

$$\varphi_{\mathfrak{A}}\left(e_j\right) = \varphi_{\mathfrak{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = v_j$$

Also: $e_j \to v_j$.
Wollen wir nun eine Matrix ausrechnen, so gilt:

$$f\left(v_j\right) = f\left(\varphi_{\mathfrak{A}}\left(e_j\right)\right) = f \circ \varphi_{\mathfrak{A}}\left(e_j\right) = \varphi_{\mathfrak{B}}\left(f_A\left(e_j\right)\right) = \varphi_{\mathfrak{B}} \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i$$

Also:

$$f\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i, \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\left(f\right) = \left(\alpha_{ij}\right)$$

$A = \left(\alpha_{ij}\right)$ **mit** $i = 1, \ldots, m$ **und** $j = 1, \ldots, n$.
In Worten: "$f\left(v_j\right)$ **liefert die** j**-te Spalte von** $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\left(f\right)$**"**

3.3.16 Berechnung von Darstellungsmatrizen

Sei $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V mit dim(V) $= n$ und $\mathfrak{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W mit dim(W) $= m$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung III-11: Berechnung der Darstellungsmatrize $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$

Es gibt für f_A zwei äquivalente Darstellungsmöglichkeiten: $f_A \Leftrightarrow A \mapsto A \cdot x$.
Nun gilt für $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i, \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) = (\alpha_{ij})$$

mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Wir haben schon gezeigt: $\mathbf{dim}(f(\mathbf{V})) = \mathbf{rg}(f) = \mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)\right)$. Dann gilt für $\mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f))$:

$$\mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(f)) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{dim}(f(\mathbf{V})) = n - \mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)\right)$$

Nun seien zwei Abbildungen f und g von V nach W gegeben:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & \mathbf{W} \end{tikzcd}$$

Abbildung III-12: Abbildungen f und g von $\mathbf{V}$ nach $\mathbf{W}$

Sei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}$ eine Basis von W. Was ist nun

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f+g) \quad \textbf{beziehungsweise} \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f \cdot g)$$

Wir wissen:

$$(f+g)(v_j) = \underbrace{f(v_j)}_{\alpha_{ij}} + \underbrace{g(v_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \cdot w_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \cdot w_i$$

Also gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f+g) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) + \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(g)$$

Analog können wir zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f \cdot g) &= \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(g) \\ \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\lambda \cdot g) &= \lambda \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \end{aligned}$$

Anmerkung: Dies gilt nur für $(n \times n)$-Matrizen.

3.3.17 Satz (**III**.3.9)

Bei fester Basiswahl $\mathfrak{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ **ist die Abbildung** $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \to \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $f \mapsto \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$ **ein Isomorphismus. Insbesonders:**

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{dim}(\mathbf{W})$$

Beweis: Zu zeigen sind

Linearität

Injektivität

Surjektivität

Linearität: Siehe (**III**.3.16)
Injektivität: Aus $\mathrm{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$ **folgt, daß** $f(v_1), \dots, f(v_n)$ **bekannt sind.** $\Rightarrow$ f **ist bekannt, denn**

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i)$$

Surjektivität: Gegeben sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$**. Finde die Abbildung** f **mit**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, dotted, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-13: Skizze zum Beweis der Surjektivität

Setze $f = \varphi_{\mathfrak{B}} \circ f_A \circ (\varphi_{\mathfrak{A}})^{-1} \quad \Rightarrow \quad A = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$
Eine andere Formulierung: Lineare Abbildungen zwischen V und W sind auch durch Matrizen gegeben. Aber: die beschreibenden Matrizen hängen von der gewählten Basis ab.

3.3.18 Satz (**III**.3.10)

Gegeben ist die folgende Situation:

$$\mathbf{V} \xrightarrow{f} \mathbf{W} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$$

wobei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V, $\mathfrak{B}$ eine Basis von W und $\mathfrak{C}$ eine Basis von Z ist. Es gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{A}}(g \circ f) = \mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(g) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)$$

Für den Beweis bieten sich zwei Möglichkeiten an:

(1) Rechnung (zu viele Indizes und sehr viel Schreibarbeit)

(2) über Definition der Matrizenmultiplikation

Zuerst zur Orientierung das Schema

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[r, "g"] & \mathbf{Z} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \arrow[r, "f_B"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^r \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{C}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-14: Schema Ausgangssituation für den Beweis von Satz (**III**.3.10)

Behauptung: $(g \circ f) \circ \varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{C}} \circ (f_B \circ f_A)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "g \circ f"] & \mathbf{Z} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "f_B \circ f_A"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-15: Schema Behauptung für den Beweis von Satz (**III**.3.10)

Beweis:

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ \varphi_{\mathfrak{A}} &\overset{A}{=} g \circ (f \circ \varphi_{\mathfrak{A}}) \overset{(*)}{=} g \circ (\varphi_{\mathfrak{B}} \circ f_A) \\
&\overset{A}{=} (g \circ \varphi_{\mathfrak{B}}) \circ f_A \overset{(\#)}{=} (\varphi_{\mathfrak{C}} \circ f_B) \circ f_A \overset{A}{=} \varphi_{\mathfrak{C}} \circ (f_B \circ f_A)
\end{aligned}$$

Anmerkungen:

zu A: folgt aus Assoziativität von Komposition von Abbildungen.

zu $(*)$: Betrachte die linke Hälfte der Ausgangssituation.

zu $(\#)$: Betrachte die rechte Hälfte der Ausgangssituation.

Nun können wir Satz (III.3.10) auf einen Basiswechsel anwenden:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}' & \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{B}' \\
\mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{id}_{\mathbf{V}}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{id}_W \circ f \circ \mathbf{id}_V"'] & \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[r, "\mathbf{id}_{\mathbf{W}}"] & \mathbf{W}
\end{tikzcd}$$

Abbildung III-16: Schema für Basiswechsel

Satz (III.3.10) liefert:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(f) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ f \circ \mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) \circ \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}'}(f) \circ \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}})$$

Nun wollen wir die Natur der Matrizen

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) \quad \textbf{und} \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}})$$

betrachten.
Behauptung:

(1) Diese Matrizen sind regulär.

(2) Diese Matrizen sind Übergangsmatrizen von einer Basis zu einer anderen Basis.

Betrachtung von $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}})$: Sei $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Zielbasis und sei $\mathfrak{A}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ Ausgangsbasis. Nun gilt:

$$v_j' = \mathbf{id}_{\mathbf{V}}\left(v_j'\right) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$$

Damit gilt für die Übergangsmatrize von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = (t_{ij})$$

Für den Rang von (t_{ij}) gilt:

$$\mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{v})\right) = \mathbf{rg}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{dim}(\mathbf{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) = n$$

Also: $(t_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$**,** $\mathbf{rg}(t_{ij}) = n \Rightarrow (t_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$
Behauptung:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}})\right)^{-1}$$

Beweis:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ \mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{E}_m$$

Analog:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ \mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}_{\mathbf{W}}) = \mathbf{E}_m$$

Es folgt die Behauptung.

3.3.19 Satz (III.3.11): Transformationsformel

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linear, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ seien Basen von V, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ seien Basen von W mit Übergangsmatrizen S ($\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$, $\dim(\mathbf{S}) = n$) und T ($\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$, $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{K})$, $\dim(\mathbf{T}) = m$). Dann gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(f) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot \mathbf{S}$$

Zum Einprägen folgendes Hilfsmittel:

$$\underbrace{\mathbf{T}^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f)}_{m \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{S}}_{n \times n}$$

Nur auf diese Art und Weise können wir die Matrizen multiplizieren.

3.3.20 Elementare Umformungen und Inversenbildung von Matrizen

Zuerst ein Beispiel: gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht leicht: $\operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow A^{-1}$ existiert.
Das Schema:

$$\begin{array}{c} (A \,|\, \mathbf{E}_n) \\ \downarrow \quad \downarrow \ \textbf{simultane Zeilenumformungen} \\ (\mathbf{E}_n \,|\, A^{-1}) \end{array}$$

Abbildung III-17: Schema für die Inversenbildung von Matrizen

Für unser Beispiel:

$$(A|\,\mathbf{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Ergebnis:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Nun machen wir noch eine Probe: Es muß gelten: $A \cdot A^{-1} = \mathbf{E} = A^{-1} \cdot A$. Wir beschränken uns hier auf $A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Wir wollen nun eine theoretische Begründung für diesen Algorithmus der Umformungen einer regulären Matrix in eine Einheitsmatrize liefern:

(1) Wir formen A mittels Zeilenumformungen in die Zeilenstufenform um:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Stufen $=$ $\mathbf{rg}\,(A)$, wobei $A \in \mathbf{M}_{n,n}\,(\mathbb{K})$. Also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_n$$

(2) Umformungen sind Multiplikationen mit Umformungsmatrizen wobei

Zeilenumformungen Multiplikationen mit Umformungsmatrizen von links sind.

Spaltenumformungen Multiplikationen mit Umformungsmatrizen von rechts sind.

Anmerkung: Zur Bildung der Inversen Matrix benutzen wir nur Zeilenumformungen. Ergebnis:

$$\left(A' \mid U \right) \xrightarrow{\mathbf{Z}_t \cdots \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1} \left(A \mid \mathbf{E}_n \right)$$

Abbildung III-18: Ergebnis der Matrizeninversion

Matrizentheoretische Begründung:

$\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t-1}, \dots, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_1$ bedeutet die Multiplikation mit $\mathbf{S}_t, \mathbf{S}_{t-1}, \dots, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_1$ von links. Wir wissen:

$$(\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1) \cdot A = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{E} = A^{-1}$$

Auf der anderen Seite:

$$B = (\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{E} = A^{-1}$$

Bemerkungen:

1. Eingabe von beliebigen Matrizen $A \in \mathrm{M}_n\,(\mathbb{K})$: Ist A singulär, so merken wir dies spätestens bei diesem Algorithmus dadurch daß er nicht weiter geführt werden kann. Der Grund: $\mathbf{rg}\,(A) \lneqq n$, also liefert die Zeilenstufenform mindestens eine Spalte die nur aus Nullen besteht:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ & & & & & & & \vdots & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & 0 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2. Anwendung von Zeilen- und Spaltenumformungen: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \mathbf{E}_n$ **vermittels** $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_2, \ldots$ **(**$\mathbf{Z}_n$ **bezeichnet eine Zeilenumformung und** $\mathbf{S}_n$ **bezeichnet eine Spaltenumformung). Zur Erinnerung: Zeilenoperationen sind Multiplikationen von links, Spaltenoperationen sind Multiplikationen von rechts. Matrizentheoretisch betrachtet:**

$$\underbrace{\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1}_{\doteqdot U} \cdot A \cdot \underbrace{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \mathbf{S}_t}_{\doteqdot V}$$

Also: A**:** $U \cdot A \cdot V = \mathbf{E}$**. Für die Inverse ergibt sich damit:**

$$\begin{aligned} U \cdot A \cdot V = \mathbf{E} \quad &\Rightarrow \quad A = U^{-1} \cdot E \cdot V^{-1} = U^{-1} \cdot V^{-1} \\ &\Rightarrow \quad A^{-1} = \left(U^{-1} \cdot V^{-1}\right)^{-1} = \left(V^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(U^{-1}\right)^{-1} = V \cdot U \end{aligned}$$

Aus Übungsaufgabe bekannt: Bei invertieren eines Produktes zweier Matrizen dreht sich die Reihenfolge der Terme um.

Nun wollen wir U **und** V **betrachten:**

$$U = \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{E}$$

Also ist U **das Ergebnis der sukzessiven Zeilenumformungen angewandt auf E.**

$$V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{t-1} \cdot \mathbf{S}_t$$

Also ist V **das Ergebnis der sukzessiven Spaltenumformungen angewandt auf E.**

Wir können also ein Schema analog zu dem Schema für Zeilenumformungen entwickeln:

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{Spalten} & \textbf{Zeilen} \\ \left(A \right| & \mathbf{E}_n & \left| \mathbf{E}_n \right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\mathbf{E}_n \right| & U & \left| V \right) \end{array}$$

Abbildung III-19: Schema für Zeilen- und Spaltenumformungen

Hier nun ein Beispiel für $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$**:**

$$\begin{array}{ccc} A & U & V \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Nun gilt:

$$A^{-1} = V \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. Sei $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{E} = A \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_{t-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1$

3.3.21 Satz (III.3.12)

Jede Matrize in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ ist das Produkt von Umformungsmatrizen (Elementarmatrizen). Man sagt: "$\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ wird von Elementarmatrizen erzeugt"

(Zur Erinnerung: $S_n =$ Gruppe der Permutation von n Ziffern (Bijektive Abbildung von $1, \dots, n$ auf sich selbst)

Übergangsmatrize: gegeben sei V mit Basis $\mathfrak{A}$ und einer neuen Basis $\mathfrak{A}'$. Zwangsläufig gilt:

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$$

Nun wird $\mathbf{T} = (t_{ij}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$ als Übergangsmatrize bezeichnet mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_j'$$

Nun ist nicht einheitlich definiert was die Übergangsmatrize ist:

$$v = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot y_j \right) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

Für die Koordinatentransformation gilt also: $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot y_j$ für $i = 1, \dots, n$.

Damit gilt für den Transformationsvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Für neue Basis: T (Basiswechsel)

Für neue Koordinate: $\mathbf{T}^{-1}$ (Koordinatenwechsel) wobei

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$$

3.4 Kapitel (III.4): Lineare Gleichungssysteme

Gegeben: $a_{ij} \in \mathbb{K}$ **und** $b_i \in \mathbb{K}$.
Gesucht: Lösungen in $\mathbb{K}$ **für**

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Wir können dieses Gleichungssystem auch in seine Bestandteile zerlegen:

die Koeffizientenmatrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

den Lösungsvektor x**:** $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

die Lösungsspalte b**:** $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Also können wir das Gleichungssystem auch folgendermaßen schreiben: $A \cdot x = b$.
Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man das Gleichungssystem als eine lineare Abbildung auffaßt:

$$f_A(x) = b \quad \textbf{mit} \quad f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}(A, b)$ **gilt:**

$$\mathbb{L}(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = b\} = f_A^{-1}(\{b\})$$

3.4.1 Satz (III.4.1)

$A \cdot x = b$ **lösbar** $\Leftrightarrow \mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A|\,b)$
Anmerkung: $(A|\,b)$ **wird als erweiterte Koeffizientenmatrix bezeichnet:**

$$(A|\,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$$

Beweis: Zuerst zur Erinnerung. Es gilt

$$\mathbf{rg}\, A = \mathbf{rg} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \mathbf{dim}\, \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathbf{dim}\, f_A(\mathbb{K}^n)$$

und

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

"$\Rightarrow$" Es gilt:

$$\left.\begin{array}{c} A\cdot x = b \\ A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad b = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n$$

Nun folgt unmittelbar:

$$\mathbf{rg}\,(A|\,b) = \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n, b\rangle) = \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) = \mathbf{rg}\,(A)$$

"$\Leftarrow$" Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) = \mathbf{dim}\,(\langle v_1, \ldots, v_n, b\rangle) \quad &\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle v_1, \ldots, v_n, b\rangle \\ &\Rightarrow \quad b = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n \end{aligned}$$

Das heißt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = b$$

Anmerkung: $(*)$ **folgt nach Basisauswahl.**

Folgerung: Wir können einen Algorithmus zur Entscheidung über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen entwickeln.

Berechnung des Ranges rg (A) **und rg** $(A|\,b)$ **mittels elementarer Umformungen.**

Struktur von $(A|\,b)$ **- Voraussetzung: Eine spezielle Lösung** x_0 **ist bekannt mit** $A\cdot x_0 = b$

3.4.2 Satz (III.4.2)

Es gilt:

(1) $\mathbb{L}\,(A, b) = x_0 + \mathbb{L}\,(A, 0)$

(2) $\mathbb{L}\,(A, 0) \subseteq \mathbb{K}^n$

(3) $\mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A, 0)) = n - \mathbf{rg}\,(A)$

Umformulierungen:

(1) $A \cdot x = b$ **wird als inhomogenes Gleichungssystem bezeichnet.**

(2) $A \cdot x = 0$ **wird als (zugehöriges) homogenes Gleichungssystem bezeichnet.**

(3) $\mathbb{L}\,(A, 0)$ **wird als spezielle Lösung des homogenen Gleichungssystems bezeichnet.**

(4) $\mathbb{L}\,(A, b)$ **wird als allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems bezeichnet.**

Beweis:

$\mathbb{L}\,(A, b) = \{x : f_A\,(x) = b\} \ni x_0$, $x \in \mathbb{L}\,(A, b) \quad \Rightarrow \quad f_A\,(x) = f_A\,(x_0) \quad \Rightarrow \quad f_A\,(x - x_0) = 0$
$\Rightarrow \quad x - x_0 \in \mathbf{Kern}\,(f_A)$. **Kern** $(f_A) = \mathbb{L}\,(A, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}\,(A, 0) \subseteq \mathbb{K}^n$.
$x - x_0 \in \mathbb{L}\,(A, 0) \quad \Rightarrow \quad x \in x_0 + \mathbb{L}\,(A, 0)$. **Sei** $x = x_0 + u$, $u \in \mathbb{L}\,(A, 0)$
$\Rightarrow \quad A \cdot x = A \cdot (x_0 + u) = A \cdot x_0 + \underbrace{A \cdot u}_{=0} = A \cdot x_0 = b$, $x_0 + \mathbb{L}\,(A, 0) \subseteq \mathbb{L}\,(A, b)$.

Aus der Dimensionsformel folgt:

$$\mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A, 0)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{Kern}\,(f_A)) = \mathbf{dim}\,(\mathbb{K}^n) - \mathbf{dim}\,(f_A\,(\mathbb{K}^n)) = n - \mathbf{rg}\,(A)$$

3.4.3 Gauß-Jordansches Eliminationsverfahren

Prinzip: Zeilenumformungen anwenden auf (A, b), eventuell wenige Spaltenumformungen auf A alleine anwenden. Es gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) = \{x : A \cdot x = b\}$$

Behauptung:

1. Zeilenumformungen auf (A, b) ändern die Lösungsmenge nicht.

Beweis: $(A, b) \to \mathbf{Z} \cdot (A, b) = (\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b)$

$x \in \mathbb{L}(A, b) \quad \Rightarrow \quad A \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z} \cdot A \cdot x = \mathbf{Z} \cdot b \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{L}(\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b)$

$\mathbf{Z}^{-1} \cdot (\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b) = (A, b) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}(\mathbf{Z} \cdot A, \mathbf{Z} \cdot b) \subseteq \mathbb{L}(A, b)$

2. Spaltenumformungen auf A haben überschaubaren Einfluß auf $\mathbb{L}(A, b)$:

$$\mathbb{L}(A \cdot U, b) = U^{-1} \cdot \mathbb{L}(A, b)$$

Beweis: $(A \cdot U) \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad A \cdot (U \cdot x) = b$. $U \cdot x \in \mathbb{L}(A, b) \quad \Rightarrow \quad x \in U^{-1} \cdot \mathbb{L}(A, b)$.

Sei $A \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad (A \cdot U) \cdot \left(U^{-1} \cdot x\right) = b \quad \Rightarrow \quad U^{-1} \cdot x \in \mathbb{L}(A \cdot U, b)$

Praktische Anwendung:

(i) $A \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r = A \cdot U^{-1}$. **Also** $U = E \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r$
Damit ergibt sich folgendes Schema (wobei $A' = A \cdot U$):

$$\begin{array}{c}
\left(A \;\middle|\; \mathbf{E}_n \right) \\
\downarrow \quad \downarrow \;\; \textbf{simultane Zeilenumformungen} \\
\left(A' \;\middle|\; U \right)
\end{array}$$

Abbildung III-20: Schema für das Gauß-Jordansches Eliminationsverfahren

(ii) Bestimme $\mathbb{L}(A \cdot U, b)$

(iii) $U \cdot \mathbb{L}(A \cdot U, b) = \mathbb{L}(A, b)$

In der Praxis werden höchstens Spaltenvertauschungen angwandt, da es ansonsten zu viel Aufwand ist den Lösungsraum zu berechnen.

3.4.4 Beispiel für Gauß-Jordansches Eliminationsverfahren

Gegeben sei folgendes inhomogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & w & + & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3w & & & = & 2 \\ & & y & + & w & - & z & = & 4 \end{array}$$

Nun schreiben wir das inhomogene Gleichungssystem für die Rechnung als (A,b)-Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{13}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{21}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right)$$

Aus der Matrix stellen wir nun wieder das Gleichungssystem auf:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\cdot x & + & 0\cdot y & + & 0\cdot w & + & 5\cdot z & = & -3 \\ 0\cdot x & + & 1\cdot y & + & 0\cdot w & + & \frac{2}{5}\cdot z & = & \frac{21}{15} \\ 0\cdot x & + & 0\cdot y & + & 1\cdot w & - & \frac{7}{5}\cdot z & = & \frac{13}{5} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} x & + & 5\cdot z & = & -3 \\ y & + & \frac{2}{5}\cdot z & = & \frac{21}{15} \\ w & - & \frac{7}{5}\cdot z & = & \frac{13}{5} \end{array}$$

Also gilt für $\mathbb{L}(A,b)$:

$$\mathbb{L}(A,b) = \left\{ \left(\begin{array}{c} -3-5z \\ \frac{21}{15} - \frac{2}{5}z \\ \frac{13}{5} + \frac{7}{5}z \\ z \end{array} \right) \middle| \, z \in \mathbb{K} \right\} = \underbrace{\left(\begin{array}{c} -3 \\ \frac{21}{15} \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{array} \right)}_{x_0} + \mathbb{K} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c} -5 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{array} \right)}_{= \mathbb{L}(A,0)}$$

Zu guter letzt könnten wir noch eine Probe durchführen.

3.4.5 Elementare Umformungen und Gleichungssysteme

Allgemeine Form: Gegeben ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Durch Zeilenumformungen erhalten wir aus der Koeffizientenmatrix $(A|\,b)$ eine normierte Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & & b_1^* \\ & & & & & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * & & b_r^* \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 & & b_{r+1}^* \\ & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & 0 & & b_m^* \end{array}\right)$$

Wobei die linke Matrix als A^* (Spaltenpermutationen) und die rechte Spalte als b^* bezeichnet wird. Wir haben bereits gezeigt:

$$\mathbb{L}\,(A,b) = \mathbb{L}\,(A^*,b^*)$$

da wir nur Zeilenumformungen und keine Spaltenumformungen verwandt haben um auf die Zeilenstufenform zu kommen.

Bemerkungen:

1: Nicht alle $b_{r+1}^*,\dots,b_m^* = 0 \Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Beweis: Sei etwa $b_{r+1}^* \neq 0$, dann muß gelten:

$$\underbrace{0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n}_{=0} \;=\; \underbrace{b_{r+1}^*}_{\neq 0}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch.

2. Seien alle $b_{r+1}^*,\dots,b_m^* = 0$. Nun benutzen wir Spaltenvertauschungen um die Zeilenstufenform umzusortieren:

$$(\,A^*|\,b^*) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & 0 & & b_1^* \\ & \ddots & & C & \vdots \\ 0 & & 1 & & b_r^* \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} & & b_1^* \\ \mathbf{E}_r & C & \vdots \\ & & b_r^* \\ \hline 0 \;\cdots & \cdots\; 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \;\cdots & \cdots\; 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dazu allgemein:

$$\begin{aligned} A\cdot x &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \\ A^*\cdot x^* &= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_{i_1} & v_{i_2} & \cdots & v_{i_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot x^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \cdot v_{i_k} \end{aligned}$$

$x_k^* = x_{i_k}$, **x^* entstanden aus x durch dieselben Permutationen.**

Wir erhalten also folgende neue Situation:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{E}_r & \vline & C & b_1^* \\ & & & \vdots \\ & & & b_r^* \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_r & \vline & C \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(*)}$$

und

$$(*) = \left(\begin{array}{c} E_r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 \end{array}\right)$$

Also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \end{pmatrix}}_{\doteqdot\, b_0^*}$$

Damit gilt für den Lösungsraum:

$$\mathbb{L}\left(A^* \middle| b^*\right) = \left\{ \left(\begin{array}{c} -C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b_0^* \\ \hline \leftarrow \quad x_{r+1} \quad \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \quad x_n \quad \rightarrow \end{array}\right) \middle| \; x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Kennen wir eine spezielle Lösung $\left((b_1^*, \ldots, b_r^*, 0, \ldots, 0)\right)$, so gilt:

$$\mathbb{L}\left(A^* \middle| b^*\right) = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_r^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -C \cdot (y) \\ \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{K}^{n-r} \right\}$$

Insbesondere:

$$\begin{aligned} b_{r+1}^* = \ldots = b_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \textbf{Gleichungssystem lösbar} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{rg}\,(A|\, b) \end{aligned}$$

$$\mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A,0)) = \mathbf{dim}\,(\mathbb{L}\,(A^*,0)) = n - \underbrace{\mathbf{rg}\,(A)}_{=r} = n - r$$

Der Algorithmus liefert eine Basis von $\mathbb{L}\,(A,0)$.

3.5 Kapitel (III.5): Determinanten

Wiederholung: det: $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, **det** $\underbrace{(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n)}_{n-\mathbf{mal}} \to \mathbb{K}$

Die Determinante ist eine Funktion der Spaltenvektoren: det $(A) =$ **det** $(v_1, \ldots, v_n)$**.**
Axiome:

(i) det $(v_1, \ldots, v_n) = 0$**, falls es** $i \neq j$ **gibt mit** $v_i = v_j$**. Bedingt: Die Determinante ist alternierend:**

$$\begin{aligned} & \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ = \; & -\mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

(ii) Die Determinante ist linear:

$$\mathbf{det}\,(v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i + \beta \cdot v_i', \ldots, v_n) = \alpha \cdot \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \beta \cdot \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$

Bedingt: Die Determinante ist eine multilineare Abbildung mit Werten in $\mathbb{K}$**: Multilinearform.**

(iii) det $(\mathbf{E}_n) =$ **det** $(e_1, \ldots, e_n) = 1$**. Bedeutung: Normierung**

Aus $(i) - (iii)$**: Die Determinante ist eine normierte alternierende Multilinearform.**
Hauptsatz: Es gibt genau <u>eine</u> normierte alternierende Multilinearform, nämlich die Determinante als Funktion der Spaltenvektoren.
Schon gezeigt: die Determinante einer $(n \times n)$**-Matrix muß die folgenden Eigenschaften haben:**
Situation: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$

$$\mathbf{det}\,(A) = |A| := \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}\,(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{sgn}\,(\sigma) = (-1)^{\#\mathbf{Inversionen}}$$

Eine Inversion liegt vor, falls $i < j$ **und** $\sigma(i) > \sigma(j)$**.**
Anmerkung zu sgn $(\mathbf{S}_n) \to \{1, -1\}$ **Homomorphismus, wobei**

(i) sgn $(\sigma \cdot \tau) =$ **sgn** $(\sigma) \cdot$ **sgn** (τ)

(ii) sgn $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_r) = (-1)^{r-1}$, **sgn** $(i\, j) = -1$

(iii) $\sigma = (i_1\, j_1) \cdot (i_1\, j_2) \cdot \ldots \cdot (i_1\, j_r) = (-1)^r$

Wichtig sind die Eigenschaften der Determinante: Die Determinante wird als Funktion der Spaltenvektoren aufgefaßt:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n-\mathbf{mal}}$$

Bisher haben wir folgende Schlüsse gezogen:

(i) Cramersche Regel

(ii) A **singulär** $\Rightarrow \mathbf{det}\, A = 0$

(iii) Verhalten gegenüber Spaltenumformungen

(iv) A **regulär** $\Rightarrow \mathbf{det}\, A \neq 0$

(v) $A \cdot x = b$ **wobei** A **regulär hat genau eine Lösung:** $x = A^{-1} \cdot b$

(vi) und nach der Cramerschen Regel gilt: $x_i = \dfrac{\mathbf{det}\,(B_i)}{\mathbf{det}\,(A)}$

(vii) wobei B_i **die Matrix** A **ist in der wir den** i**-ten Spaltenvektor durch** b **ersetzt haben:**

$$B_i = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_{i-1} & b & v_{i+1} & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

3.5.1 Satz (III.5.1)

Anmerkung: Aus (ii) **und** (iv) **folgt:** A **singulär** $\Leftrightarrow \mathbf{det}\,(A) = 0$ **beziehungsweise** A **regulär** $\Leftrightarrow \mathbf{det}\,(A) \neq 0$**.**

Beweis: Die Determinante wird bei additiven Spaltenumformungen (iii) **nicht geändert. Sei** $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n\,(\mathbb{K})$ **und regulär.**

1. Schritt: Wir möchten A **so umformen, daß** $a_{11} \neq 0$ **ist:**

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \neq 0 & * \cdots\cdots * \\ \hline * & * \cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & * \cdots\cdots * \end{array}\right)$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

a) $a_{11} \neq 0$**: wird sind fertig.**

b) $a_{11} = 0$**:**

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & ? \cdots\cdots ? \\ \hline * & * \cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & * \cdots\cdots * \end{array}\right)$$

Weil A **regulär ist folgt** $\mathbf{rg}\,(A) = n \quad \Rightarrow \quad \exists a_{1i} \neq 0$ **wobei** $i \in 2, \ldots, n$**. Also gilt:**

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & ? \ \neq 0 \ \ ? \\ \hline * & * \cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & * \cdots\cdots * \end{array}\right)$$

Nun addieren wir die i-te Spalte zur ersten Spalte und erhalten:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} \neq 0 & ? & \neq 0 & ? \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

2. Schritt: In diesem Schritt wollen wir $a_{12} - a_{1n}$ eliminieren. Bisher für A:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & ? & \neq 0 & ? \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Nun addieren wird das $\left(-\dfrac{a_{1i}}{a_{11}}\right)$ fache der ersten Spalte zur i-ten Spalte:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

3. Schritt: Nun wollen wir A so modifizieren, daß wir A von der folgenden Form erhalten:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & a'_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

Situation:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} a'_{11} & * & \cdots & * \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

Wären $a_{21} = a_{22} = \ldots = a_{2n} = 0$ so währe rg $A \leq n - 1$. Daher $\exists j \geq 2$ mit $a_{2j} \neq 0$. Also gilt für A:

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline ? & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

Analog zu oben können wir a_{22} so modifizieren, daß $a'_{22} \neq 0$ ist und $a_{2i} = 0$ für

$i = 3, \ldots, n$:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ ? & a'_{22}\ 0 \cdots\cdots 0 \\ * \cdots\cdots\cdots\cdots & * \\ \vdots & \vdots \\ * \cdots\cdots\cdots\cdots & * \end{pmatrix}$$

Wir setzen das Verfahren analog fort und erhalten schließlich:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a'_{22} & & \\ & & a'_{33} & \\ \mathbf{?} & & & \ddots \ a'_{nn} \end{pmatrix} = A'$$

wobei $a'_{ii} \neq 0$ für $1, \ldots, n$. Wir wissen, da wir nur Spaltenumformungen benutzt haben, daß det $A = \det A'$. Aufgrund der Linearität folgt:

$$\det(A) = \det(A') = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{?} & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Spaltenumformungen liefern:

$$A' \to a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \cdot \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} a'_{11} & \ddots & 0 \\ 0 & & a'_{nn} \end{pmatrix} = A''$$

Ergebnis: A kann durch Spaltenumformungen so umgeformt werden, daß wir A'' erhalten. Die Determinante ist leicht abzulesen:

$$\det A = \det A'' = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a'_{ii}$$

3.5.2 Satz (III.5.2): Es gibt nur eine Determinante

Beweis: Angenommen det, det′ erfüllen die Eigenschaften $(i) - (iii)$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

a) A sei singulär $\Rightarrow \det(A) = \det'(A) = 0$.

b) A sei regulär $\Rightarrow$ Wir können A durch Spaltenumformungen so umformen, daß wir eine Matrix A^* erhalten:

$$A \to \begin{pmatrix} a^*_{11} & \ddots & 0 \\ 0 & & a^*_{nn} \end{pmatrix} = A^*$$

Wegen der Eigenschaft (iii) folgt: $\det(A) = \det'(A) = a^*_{11} \cdot a^*_{22} \cdot \ldots \cdot a^*_{nn}$.

3.5.3 Satz (III.5.3) Multiplikationssatz für Determinanten

Der Multiplikationssatz für Determinanten lautet: det $(A \cdot B) =$ **det** $(A) \cdot$ **det** (B)

Beweis:

a) Ist A **singulär** $\Rightarrow A \cdot B$ **ist singulär.**

Schema des Beweises: $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{K}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{K}^n$

Ist f_B **nicht surjektiv** $\quad\Rightarrow\quad f_A \circ f_B$ **nicht surjektiv, Bild** $(f_A \circ f_b) \subseteq$ **Bild** (f_A)

Es gilt:

$$f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B \quad\Rightarrow\quad \mathbf{rg}\,(A \cdot B) = \mathbf{rg}\,(f_{A \cdot B})$$

Ist rg $(A) \lneqq n \Rightarrow \mathbb{K}^n$ **wird höchstens auf den** $\mathbb{K}^{n-1}$ **abgebildet** $\Rightarrow$ **Die Eigenschaften von** f_B **sind irrelevant.**

Es folgt unmittelbar: det $(A \cdot B) = 0, \quad$ **det** $(A) \cdot$ **det** $(B) = 0$.

b) A **regulär** $\Rightarrow$ **det** $(A) \neq 0$. **Sei** A **fest und** $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. **Es folgt:**

$$\mathbf{det}'\,(B) = \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot B)}{\mathbf{det}\,(A)}$$

Zu zeigen: det$'$ (B) **erfüllt die Eigenschaften** $(i) - (iii)$

$\Rightarrow$ **det**$'$ $(B) =$ **det** $(B) \Rightarrow$ **det** $(A) \cdot$ **det** $(B) =$ **det** $(A \cdot B)$

Dazu:

$$B = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \ldots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Setzen wir nun in die Determinante ein, so folgt:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{det}' \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{det} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \ldots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}{\mathbf{det}\,(A)}$$

Nun wollen wir die Eigenschaften $(i) - (iii)$ **für det**$'$ (B) **nachweisen:**

(i)**: Ist** $v_i = v_j$ **mit** $i \neq j \Rightarrow A \cdot v_i = A \cdot v_j \Rightarrow$ **det** $(A \cdot v_1, \ldots, A \cdot v_n) = 0 \Rightarrow$ **det**$'$ $(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

(ii)**: Es gilt:**

$$\mathbf{det}'\,(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot \mathbf{E})}{\mathbf{det}\,(A)} = \frac{\mathbf{det}\,(A)}{\mathbf{det}\,(A)} = 1$$

Also ist auch Eigenschaft (ii) **erfüllt.**

(iii)**: Es gilt:**

$$\begin{aligned} & \mathbf{det}'\,(v_1, \ldots, \alpha \cdot v_k + \beta \cdot v_k', \ldots, v_n) \\ = \; & \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \ldots, A \cdot (\alpha \cdot v_k + \beta \cdot v_k'), \ldots, A \cdot v_n)}{\mathbf{det}\,(A)} \\ = \; & \frac{\mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \ldots, \alpha \cdot A \cdot v_k + \beta \cdot A \cdot v_k', \ldots, A \cdot v_n)}{\mathbf{det}\,(A)} \\ = \; & \frac{\alpha \cdot \mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \ldots, A \cdot v_k, \ldots, A \cdot v_n) + \beta \cdot \mathbf{det}\,(A \cdot v_1, \ldots, A \cdot v_k', \ldots, A \cdot v_n)}{\mathbf{det}\,(A)} \\ = \; & \alpha \cdot \mathbf{det}'\,(v_1, \ldots, v_k. \ldots, v_n) + \beta \cdot \mathbf{det}'\,(v_1, \ldots, v_k'. \ldots, v_n) \end{aligned}$$

Damit erfüllt det$'$ **alle Eigenschaften der Matrizenfunktion** $\Rightarrow$ **Multiplikationssatz.**

3.5.4 Eigenschaften von Determinanten gegenüber Zeilenumformungen

Gegeben sei A mit

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow w_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow w_n \rightarrow \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir drei verschiedene Fälle:

a) skalare Multiplikation:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \alpha \cdot w_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

b) Vertauschung zweier Zeilen:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{j-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{j+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix} = -\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{i-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{i+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_{j-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ \leftarrow & w_{j+1} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

c) Das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addiert:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_i + \alpha \cdot w_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix} = \mathbf{det}\begin{pmatrix} \leftarrow & w_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_j & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & w_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Das Verhalten der Determinante bei Zeilenumformungen ist analog zu den Spaltenumformungen.

Die Beweise folgen direkt aus dem Multiplikationssatz mit Hilfe der Umformungsmatrizen:

a) Multiplikation mit $\mathrm{M}_i(\alpha)$ von links:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}\left(\mathbf{M}_i(\alpha) \cdot A\right) &= \mathbf{det}\left(\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot A\right) \\ &= \mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{det}(A) = \alpha \cdot \mathbf{det}(A) \end{aligned}$$

b) Multiplikation mit $\mathbf{V}_{ij}$ von links

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(\mathbf{V}_{ij}\cdot A) &= \mathbf{det}\left(\begin{pmatrix} 1 &&&&&&\\ & \ddots &&&&&\\ && 1 &&&&\\ &&& 0 & \cdots & 1 &&&\\ &&& \vdots && \vdots &&&\\ &&& 1 & \cdots & 0 &&&\\ &&&&&& 1 &&\\ &&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}\cdot A\right)\\
&= \mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 &&&&&&\\ & \ddots &&&&&\\ && 1 &&&&\\ &&& 0 & \cdots & 1 &&&\\ &&& \vdots && \vdots &&&\\ &&& 1 & \cdots & 0 &&&\\ &&&&&& 1 &&\\ &&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{det}\,(A)\\
&= (-1)\cdot\mathbf{det}\,(A) = -\mathbf{det}\,(A)
\end{aligned}$$

Nun gilt: $\mathbf{det}\,(\mathbf{V}_{ij}) = -\mathbf{det}\,(\mathbf{E}_n)$, da $\mathbf{V}_{ij}$ durch Vertauschung von i-ter und j-ter Zeile in $\mathbf{E}_n$ transformiert wird.

c) Multiplikation mit $\mathbf{A}_{ij}\,(\alpha)$ von links:

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(\mathbf{A}_{ij}\,(\alpha)\cdot A) &= \mathbf{det}\left(\begin{pmatrix} 1 &&&&&&\\ & \ddots &&&&&\\ && 1 &&&&\\ &&& 1 & \cdots & \alpha &&&\\ &&&& \ddots & \vdots &&&\\ &&&&& 1 &&&\\ &&&&&& 1 &&\\ &&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}\cdot A\right)\\
&= \mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 &&&&&&\\ & \ddots &&&&&\\ && 1 &&&&\\ &&& 1 & \cdots & \alpha &&&\\ &&&& \ddots & \vdots &&&\\ &&&&& 1 &&&\\ &&&&&& 1 &&\\ &&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{det}\,(A)\\
&= 1\cdot\mathbf{det}\,(A) = \mathbf{det}\,(A)
\end{aligned}$$

3.5.5 Kochrezept: Praktische Berechnung der Determinante

(i) Durch Umformungen wird A in eine Gestalt transformiert, so daß man die Determinante ablesen kann.

(ii) Buchhaltung der Veränderung der Determinante beim Prozeß (i).

(iii) Endgestalt der Matrix:

viele Nullen: obere oder untere Dreiecksgestalt

Eine Spalte oder Zeile besteht nur aus Nullen $\Rightarrow$ det $(A) = 0$

3.5.6 Beispiel für die Determinantenberechnung

Gegeben sei A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Nun gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.5.7 Satz (III.5.4) Multiplikationssatz für Blockdeterminanten

Behauptung:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array}\right) = \det \left(\boxed{\boldsymbol{A}}\right) \cdot \det \left(\boxed{\boldsymbol{B}}\right)$$

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

<u>Fall a)</u> A singulär oder B singulär $\Rightarrow$ rechte Seite $= 0$.

Zu zeigen: $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array}\right)$ **ist singulär, daß heißt rg** $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array}\right) < n$

Angenommen A ist singulär. Durch Zeilenumformungen, die die Determinante nicht ändern, kann A in folgende Gestalt transformiert werden:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c} 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline * \cdots\cdots * \\ \vdots \qquad \vdots \\ * \cdots\cdots * \end{array}\right)}_{\doteqdot \boldsymbol{C}}$$

Wenden wir nun diese Zeilenumformungen auf die gesamte Matrix an, so erhalten wir eine Matrix der Form:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \\ \hline * & \boldsymbol{B} \end{array}\right)}_{\#}$$

Das heißt: rg $(\#) < n \Rightarrow$ **det** $(\#) = 0$. **Analog verfahren wir für den Fall, daß** B **singulär ist.**

<u>Fall b)</u> A **und** B **sind regulär** $\Rightarrow$ **durch Zeilenumformungen kann man die Matrizen**

$$\left(\boxed{A}\right), \left(\boxed{B}\right), \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline * & B \end{array}\right)$$

auf die folgende Gestalttransformieren:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \beta_s \end{pmatrix}, \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ * & & \alpha_r & & & \\ \hline & & & \beta_1 & & 0 \\ & * & & & \ddots & \\ & & & * & & \beta_s \end{array}\right)}_{(\#\#)}$$

bringen. Nun gilt: det $(A) = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r$, **det** $(B) = \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_s$. **Durch weitere Transformationen, die die Determinante nicht verändern erhalten wir für** $(\#\#)$**:**

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ * & & \alpha_r & & & \\ \hline & & & \beta_1 & & 0 \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & * & & \beta_s \end{array}\right)}_{\binom{\#\#}{\#}}$$

$\Rightarrow$ **det** $\binom{\#\#}{\#} =$ **det** $(A) \cdot$ **det** (B).

3.5.8 Definition (III.5.a): Transponierte Matrix A^T

${}^tA = A^T = (a_{ji})_{ij}$, **wobei** $A = (a_{ij})_{ij}$. **Die transpornierte Matrix entsteht durch Spiegelung der Matrix an der HauptdiagonalenIII:**

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Die Zeilen von A **werden die Spalten von** A^T.

Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{f} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}^* & \xleftarrow{f^*} & \mathbf{W}^* = \mathbf{Hom}(\mathbf{W}, \mathbf{K}) \\ \lambda \circ f & \longleftarrow\!\!\shortmid & \lambda \end{array}$$

Sei $\mathfrak{A}$: $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $\mathfrak{B} : w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W.
Die dualen Basen: $\mathfrak{A}^*$: $v_1^*, \ldots, v_n^*$ von $\mathbf{V}^*$ und $\mathfrak{B}^* : w_1^*, \ldots, w_m^*$ von $\mathbf{W}^*$, mit

$$w_i^* : \mathbf{W} \to \mathbb{K}, w_i^*(w_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Anmerkung: δ_{ij} ist das Kroneckersymbol.
Dann: $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) = A$, $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}^*}^{\mathfrak{B}^*}(f^*) = A^T$ und $\mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f)) = \mathbf{dim}(\mathbf{Bild}(f^*))$
(In dieser Vorlesung schreiben wir die Ausgangsbasis oben.)
Beweis: Sei $A^T = (\tilde{a}_{ij})$. Nun gilt für die Determinante:

$$\mathbf{det}\left(A^T\right) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Nun setze $j := \sigma(i)$, dann ist $i = \sigma^{-1}(j)$. Die Kommutativität der Multiplikation liefert:

$$\mathbf{det}\left(A^T\right) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

Noch zu zeigen: $\mathbf{sgn}(\sigma) = \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right)$.
Wir werden für die Behauptung zwei verschiedene Beweise führen:
I. $\sigma = (i_1\, j_1) \cdot (i_2\, j_2) \cdot \ldots \cdot (i_r\, j_r)$
$\Rightarrow \quad \sigma^{-1} = (i_1\, j_1)^{-1} \cdot (i_2\, j_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (i_r\, j_r)^{-1} = (i_1\, j_1) \cdot (i_2\, j_2) \cdot \ldots \cdot (i_r\, j_r)$
II. $\mathbf{id} = \sigma \cdot \sigma^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \mathbf{sgn}(\mathbf{id}) = \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sgn}(\sigma) = \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right)$
Daher:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}\left(A^T\right) &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathbf{S}_n} \mathbf{sgn}(\tau) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\tau(j)} \\ &= \mathbf{det}(A) \end{aligned}$$

Folgerung: Die Determinante, als Funktion der Zeilenvektoren ist ebenfalls charakterisiert durch die Axiome $(i) - (iii)$ einer normierten alternierenden Multilinearform.

3.5.9 Satz (III.5.5): Laplacescher Entwicklungssatz

Gegeben sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. $A_{ij} \in \mathbf{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ entsteht aus A durch streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Hier ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Es entstehen n^2 neue Matrizen.

Eine Matrix kann sowohl nach der i-ten Zeile als auch nach der j-ten Spalte entwickelt werden:

(1) Entwicklung nach der i-ten Zeile entwickelt: $\mathbf{det}\,(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \mathbf{det}\,(A_{ij})$

(2) Entwicklung nach der j-ten Spalte entwickelt: $\mathbf{det}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \mathbf{det}\,(A_{ij})$

Als Beispiel wollen wir nun A nach der 2-ten Zeile entwickeln:

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(A) &= (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \mathbf{det}\,(A_{21}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \mathbf{det}\,(A_{22}) + (-1)^{2+3} \cdot a_{23} \cdot \mathbf{det}\,(A_{23}) \\
&= -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -4 \cdot (18 - 24) + 5 \cdot (9 - 21) - 6 \cdot (8 - 14) \\
&= 24 - 60 + 36 = 0
\end{aligned}$$

A ist also singulär. Bei genauerem Hinsehen wird ersichtlich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir werden hier nur den Beweis für die Entwicklung nach der i-ten Spalte führen. Sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_i & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Die Determinante von A ist nun eine Funktion der Zeilenvektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{det}\,(A) &= \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \mathbf{det}\left(v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j, v_{i+1}, \ldots, v_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{det}\,(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{det} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun formen wir weiter um:

$$\mathbf{det}\,(A) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{j-1}\cdot\mathbf{det}\begin{pmatrix} a_{1,j} & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n}\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,j} & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

$$\overset{(\#)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j-2}\cdot\mathbf{det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{1,j} & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,j} & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\mathbf{det}\,(A_{ij})$$

Anmerkung:

> **Zu $(*)$: Paarweises Vertauschen der Spalten, so daß die j-te Spalte in die erste Spalte übergeht ($j-1$ Schritte).**
>
> **Zu $(\#)$: Paarweises Vertauschen der Zeilen, so daß dieb i-te Zeile in die erste Zeile übergeht ($i-1$ Schritte).**

Die Laplace-Entwicklung ermöglicht eine rekursive Berechnung von Determinanten - Sie ist eher von theoretischer Bedeutung, da aus Gründen der Performance nicht praktikabel. Ermöglicht auch eine rekursive Definition von Determinanten beliebiger Größe.

3.5.10 Ergänzung zur Leibnizschen Determinantenformel S_n

Für S_n gilt: $S_n : \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$, $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ **Bijektion**

3.5.11 Definition (III.5.b): Inversion

Gilt für (i,j) mit $i<j$, daß $\sigma(i)>\sigma(j)$ so spricht man von einer Inversion.
Beispiel für Inversion: Sei σ gegeben mit:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Folgende Paare sind Inversionen: $(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$.

3.5.12 Definition (III.5.c): sgn $(\sigma) := (-1)^{\#\,\text{Inversionen}}$

Für jede Inversion oder Transposition $\tau \in \mathbf{S}_n$ gilt sgn $(\tau) = -1$.
Also gilt:

(i) **sgn** $(\sigma) = 1 \quad \Leftrightarrow$ **Anzahl der Inversionen ist gerade: σ ist eine gerade Permutation**

(ii) **sgn** $(\sigma) = -1 \quad \Leftrightarrow$ **Anzahl der Inversionen ist ungerade: σ ist eine ungerade Permutation**

Auf diese Art und Weise brauchen wir $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ **Vergleiche. Dies ist für große σ nicht mehr praktisch.**

3.5.13 Lemma (III.5.6):

$i, j \in \{1,\ldots,n\}$ **Für jedes $\sigma \in \mathbf{S}_n$ gilt: sgn** $(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$

Beweis: Sei m die Anzahl der Fehlstände von σ. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j} (\sigma(j)-\sigma(i)) &= \left(\prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j)-\sigma(i)) \right) \cdot (-1)^m \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} |\sigma(j)-\sigma(i)| \\
&= (-1)^m \textstyle\prod_{i<j} (j-i)\,(-1)^m \displaystyle\prod_{i<j} |\sigma(j)-\sigma(i)| \\
&= (-1)^m \prod_{i<j} (j-i)
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung hat man sich zu überzeugen, daß die beiden Produkte bis auf die Reihenfolge die gleichen Faktoren enthalten.

3.5.14 (III.5.7): Sätze über das Signum

Es gilt:

(i) **sgn** $(\sigma \circ \tau) =$ **sgn** $(\sigma) \cdot$ **sgn** (τ), **sgn** $: \mathbf{S}_n \to (\{1,\ldots,n\},\cdot)$ **ist Epimorphismus von Gruppen.**

(ii) **sgn** $(i_1,\ldots,i_r) = (-1)^{r-1}$

(iii) **sgn** $(\sigma^{-1}) =$ **sgn** (σ)

Beweis:
Zu (i)**:**

$$\text{sgn}\,(\tau\circ\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{j-i} = \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

Da das zweite Produkt gleich sgn (σ) ist (folgt direkt aus obigen Lemma (III.5.6)), genügt es zu zeigen, daß das erste Produkt gleich sgn (τ) ist.

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} &= \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \\
&= \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i>j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \\
&= \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}
\end{aligned}$$

Da σ bijektiv ist, enthält dieses letzte Produkt, bis auf Reihenfolge, die gleichen Faktoren wie $\prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - \sigma} = \mathbf{sgn}(\tau)$.

Zu (ii): Jedes $\sigma \in \mathbf{S}_n$ läßt sich als Produkt von Transpositionen darstellen (direkte Folgerung aus (i)): $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$, d.h. $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

$\sigma = (i_1 \cdots i_k)$ ist ein Zyklus der Länge k, d.h. σ läßt sich auch in folgender Form als ein Produkt von $k-1$ Inversionen darstellen: $\sigma = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{k-1} i_k)$. Also ist $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$

Zu (iii): siehe Definition (III.5.a)

Aus (i) und (ii) erhalten wir zwei Varianten für die praktische Berechnung des Signums:

(I) $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)(i_{r+1}, \ldots, i_s)(i_{s+1}, \ldots, i_z) \ldots = z_1 \cdot \ldots \cdot z_k$ **wobei z_i ein Zyklus der Länge r_i ist. Nun gilt für $\mathbf{sgn}(\sigma)$:**

$$\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^{r_1 - 1 + \ldots + r_k - 1}$$

(II) $\sigma = \prod$ **Transpositionen:**

$$\sigma = \prod_{k=1}^{r} (i_k, j_k), \quad \mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^r$$

Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Zerlegung in Zyklen: $(1\,6)(2\,5\,3\,7\,4)(8\,10\,9)$. **Also $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{5-1} \cdot (-1)^{3-1} = -1$.**
Nun Zerlegung wir σ in Transposition: $(1\,6)(2\,4)(2\,7)(2\,3)(2\,5)(8\,9)(8\,10)$.
Also: $\mathbf{sgn}(\sigma) = (-1)^7 = -1$.

3.5.15 Permanente - Ungelöstes Problem der Komplexitätstheorie

Sei $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Nun ist $\mathbf{Perm}(A)$ (die Permanente) definiert als

$$\mathbf{Perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$\mathbf{Perm}(A)$ ist ähnlich der Leibnizschen Determinantenformel.
Problem: schnelle Berechnung, denn die Formel ist exponential Komplex. D.h die Rechenschritte wachsen mit $n! \approx n^n = e^{n \cdot \log(n)} \geq 2^n$.

3.5.16 Definition (III.5.d): Adjungierte Matrix $\mathbf{ad}(A)$

Die adjungierte Matrix $\mathbf{ad}(A)$ ist gegeben durch $\mathbf{ad}(A) := \left((-1)^{i+j} \cdot \mathbf{det}(A_{ij})\right)_{ij}$
Die Vorzeichen liefern ein Schachbrettmuster:

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.5.17 Satz (III.5.8)

Sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Nun gilt:

$$(\mathbf{ad}(A))^T \cdot A = \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{E}_n$$

Beweis:

$$(\mathbf{ad}(A))^T \cdot A = \left((-1)^{i+j} \cdot \mathbf{det}(A_{ij})\right)_{ij}^T \cdot (a_{ij}) = (b_{ij})$$

Also gilt für jedes einzelne b_{ij}:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot \mathbf{det}(A_{ik}) \cdot a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{kj} \cdot \mathbf{det}(A_{ik}) \end{aligned}$$

Obige Umformung verstehen wir als Entwicklung nach der i-ten Spalte der Determinante.
In A wird die i-te Spalte gestrichen und durch die j-te Spalte ersetzt. Nun treten zwei verschiedene Fälle auf:

(I) Für $i = j$: $b_{ij} = \mathbf{det}(A)$

(II) Für $i \neq j$: $b_{ij} = 0$, da wir eine Matrix erhalten, deren i-te und j-te Spalte identich sind.

Daher:

$$(\mathbf{ad}(A))^T \cdot A = \begin{pmatrix} \mathbf{det}(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{det}(A) \end{pmatrix} = \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{E}_n$$

Inversenbildung einer Matrix: A invertierbar $\Leftrightarrow \mathbf{det}(A) \neq 0$. Deshalb folgt für invertierbare Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}(A)} \cdot (\mathbf{ad}(A))^T$$

Beispiel:
Sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

und sei $\mathbf{det}(A) = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0$. Für die adjungierte Matrix $\mathbf{ad}(A)$, beziehungsweise die transponierte adjungierte Matrix $(\mathbf{ad}(A))^T$ folgt:

$$\mathbf{ad}(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{det}(A_{11}) & -\mathbf{det}(A_{12}) \\ -\mathbf{det}(A_{21}) & \mathbf{det}(A_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{ad}(A))^T = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die inverse Matrix A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma & -\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta \\ \gamma \cdot \delta - \gamma \cdot \delta & \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun kennen wir zwei Möglichkeiten zur Inversenberechnung:

(I) Formel

(II) Zeilenumformungen von $(A|\, E)$ nach $\left(E|\, A^{-1}\right)$

In späteren Vorlesungen werden noch mehr Möglichkeiten entwickelt.
Folgerung:

$$\mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) = (\mathbf{det}(A))^{n-1}$$

falls $\mathbf{det}(A) \neq 0$:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{ad}(A))^T \cdot A &= \;& \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{E}_n \\ \Rightarrow\; & (\mathbf{ad}(A))^T &= \;& \mathbf{det}(A) \cdot A^{-1} \\ \Rightarrow\; & \mathbf{det}\left((\mathbf{ad}(A))^T\right) &= \;& \mathbf{det}\left(\mathbf{det}(A) \cdot A^{-1}\right) \\ \Rightarrow\; & \mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) &= \;& (\mathbf{det}(A))^n \cdot \mathbf{det}\left(A^{-1}\right) \\ \Rightarrow\; & \mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) &= \;& (\mathbf{det}(A))^n \cdot \tfrac{1}{\mathbf{det}(A)} \\ \Rightarrow\; & \mathbf{det}(\mathbf{ad}(A)) &= \;& (\mathbf{det}(A))^{n-1} \end{aligned}$$

Wir haben folgende (schon bekannte) Eigenschaften der Determinante benutzt:

$$\mathbf{det}(\alpha \cdot \mathbf{M}) = \mathbf{det}(\alpha \cdot v_1, \ldots, \alpha \cdot v_n) = \alpha^n \cdot \mathbf{det}(v_1, \ldots, v_n) = \alpha^n \cdot \mathbf{det}(\mathbf{M})$$

$$\mathbf{det}\left(A^T\right) = \mathbf{det}(A)$$

Bleibt zu zeigen:

$$\mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}$$

Beweis:

$$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \mathbf{det}\left(A \cdot A^{-1}\right) = \mathbf{det}(E) \Rightarrow \mathbf{det}(A) \cdot \mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = 1 \Rightarrow \mathbf{det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}$$

für $\mathbf{det}(A) \neq 0$.

3.5.18 Bemerkungen zu $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$

Allgemein gilt:

$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : A \textbf{ invertierbar}\}$$

$$A \textbf{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{det}(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}(A) = n$$

Bemerkungen:

1. Anzahl $\mathbf{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ =Anzahl $\mathbf{GL}(n,\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}) = (p^n-1)\cdot(p^n-p)\cdot\ldots\cdot(p^n-p^{n-1})$

2. $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$, $\mathbf{M}_i(\beta)$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K}\setminus\{0\} \Rightarrow$ Jede reguläre Matrix ist Produkt von gewissen $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ und $\mathbf{M}_i(\beta)$. Man sagt: $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ und $\mathbf{M}_i(\beta)$ erzeugen $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$.

3. Spezielle lineare Gruppe $\mathbf{SL}(n,\mathbb{K})$

$$\mathbf{SL}(n,\mathbb{K}) := \{A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) : \mathbf{det}(A) = 1\}$$

Behauptung: $\mathbf{SL}(n,\mathbb{K})$ ist eine Untergruppe der $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$

(i) $\mathbf{det}(A\cdot B) = \mathbf{det}(A)\cdot\mathbf{det}(B) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{SL}(n,\mathbb{K})$ ist unter der Multiplikation abgeschlossen.

(ii) Gruppenaxiome:

(1) Einselement $\mathbf{E}_n \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{K})$

(2) Assoziativität vererbt sich von der $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$

(3) Inverses Element:

$$\mathbf{det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}$$

Existenz:

$$\mathbf{det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathbf{det}(A)} \overset{\textbf{n.V.}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

(4) $\mathbf{SL}(n,\mathbb{K})$ wird erzeugt von den $\mathbf{A}_{ij}(\alpha)$ für $i,j \in 1,\ldots,n$, $\alpha \in \mathbb{K}$

4. $\mathbf{SL}(n,\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{Z}) : \mathbf{det}(A) = 1\}$. $\mathbf{SL}(n,\mathbb{Z})$ ist auch Gruppe: E, Assoziativität, Abgeschlossenheit klar.

Inverses Element:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}(A)}\cdot\left((-1)^{i+j}\cdot|A_{ij}|\right) = \underbrace{\left((-1)^{i+j}\cdot|A_{ij}|\right)}_{(*)} \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{Z})$$

Anmerkung: $(*)$ ist ganzzahlig.

Kapitel IV: Normalenform und Eigenwerttheorie

4.1 Kapitel (IV.1): Eigenwerte, Eigenvektoren

4.1.1 Definition (IV.1.a): Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum

Gegeben sei ein Endomorphismus $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ beziehungsweise $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ **heißt Eigenwert von** f **beziehungsweise** A **wenn gilt:**

$$\exists v \neq 0 : f(v) = \lambda \cdot v \quad \textbf{beziehungsweise} \quad \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : A \cdot x = \lambda \cdot x$$

(ii) Gilt $f(v) = \lambda \cdot v$ **mit** $v \neq 0$**, so heißt** v **ein Eigenvektor von** f **zum Eigenwert** λ**.**
Analog: gilt $A \cdot x = \lambda \cdot x$ **mit** $x \neq 0$**, so heißt** x **Eigenvektor von** A **zum Eigenwert** λ**.**

(iii) Eig $(\lambda, f) = \{v \in \mathbf{V} : f(v) = \lambda \cdot v\}$ **wird als Eigenraum von** f **zum Eigenwert** λ **bezeichnet.**
Analog: Eig $(\lambda, A) = \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = \lambda \cdot x\}$ **wird als Eigenraum von** A **zum Eigenwert** λ **bezeichnet.**
Achtung: Im Eigenraum ist auch $\{0\}$ **enthalten, obwohl Null kein Eigenvektor gemäß obiger Definition ist.**

4.1.2 Beispiele für Eigenwerte

a) Drehung um einen Winkel α **im** $\mathbb{R}^2$**, wobei der Ursprung Drehpunkt ist.**
Es handelt sich um eine lineare Abbildung. Um die Matrix aufzustellen betrachten wir was passiert wenn wir die einzelnen Spaltenvektoren (hier e_1 **und** e_2**) um einen Winkel** α **drehen:**

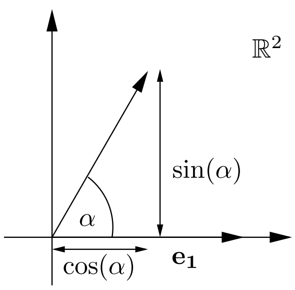

Abbildung IV-1: Drehung von e_1 um α

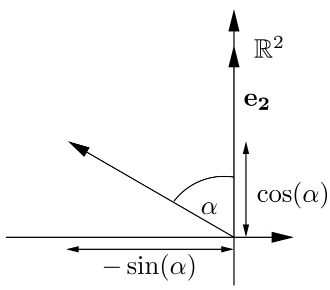

Abbildung IV-2: Drehung von e_2 um α

Damit ergibt sich folgende Matrix für eine Drehung um den Winkel α**:**

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Determinante von D_α **ist ebenfalls leicht zu berechnen:**

$$\mathbf{det}(D_\alpha) = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

det $(D_\alpha) = 1$**, d.h. eine Drehung erhält den Maßstab.**

Nun wollen wir die Eigenwerte berechnen: $D_\alpha \cdot x = \lambda \cdot x$.
Aus geometrischen Gründen folgt: Für $\alpha \neq 0, \pi$ gibt es keine Eigenvektoren.
Für $\alpha = 0$ beziehungsweise $\alpha = \pi$ gilt:

(1) $\alpha = 0$**:** $D_0 = id$**, dann ist** $D_0 \cdot x = x \Rightarrow$ **jeder Vektor** $x \neq 0$ **ist Eigenvektor zum Eigenwert** 1**.**

(2) $\alpha = \pi$**:** $D_\pi = -id$**, dann ist** $D_\pi \cdot x = -x \Rightarrow$ **jeder Vektor** $x \neq 0$ **ist Eigenvektor zum Eigenwert** -1**.**

b) Drehung um einen Winkel α im $\mathbb{C}^2$, wobei der Ursprung Drehpunkt ist.
Also: $D_\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.
Nun müssen wir folgendes komplexes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren obiges Gleichungssystem aus:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) &= \lambda \cdot x \\ x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) &= \lambda \cdot y \end{aligned}$$

Anschließend fassen wir alle Terme mit x beziehungsweise y zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned} x \cdot (\cos(\alpha) - \lambda) - y \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot (\cos(\alpha) - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Nun suchen wir solche λ, die nicht triviale Lösungen gestatten.
Wäre A regulär: $A \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot 0 = 0$ **Also notwendige Bedingung:**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \textbf{ ist singulär } &\Rightarrow \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist in $\mathbb{C}$ immer lösbar: $\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm i \cdot \sin(\alpha) = e^{\pm i\alpha}$.
$\lambda_{1,2}$ reell - genau für $\alpha = 0, \pi$.
Bisher: λ ist Eigenwert $\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0$.
Behauptung:
Die Umkehrung gilt auch: $\lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert.
Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos(\alpha) + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}}_{\doteqdot A} \leq 1 \\ &\Rightarrow \mathbf{dim}(\mathbb{L}(A, 0)) = 2 - \mathbf{rg}(A) \geq 1 \\ &\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0 \quad \textbf{mit} \quad D_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.1.3 Satz (**IV**.1.1)

Sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ **ist Eigenwert** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = 0$

(ii) Ist λ **Eigenwert** $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{Eig}(\lambda, A) = \mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)$
mit $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(\lambda, A)) = n - \mathbf{rg}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$

Beweise:
(i) **"$\Rightarrow$"** λ **Eigenwert** $\quad\Rightarrow\quad \exists x \neq 0$**:** $A \cdot x = \lambda \cdot x \quad\Rightarrow\quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \cdot x = 0.$
Das heißt: $\mathbf{dim}(\mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)) \neq \{0\}$**,** $\mathbf{dim}(\mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)) \geq 1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{rg}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \lneqq n$
$\Rightarrow \quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$ **nicht regulär** $\quad\Rightarrow\quad \mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = 0.$
"$\Leftarrow$" $\mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = 0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$ **ist singulär,** $\mathbf{rg}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \lneqq n$
$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)) \geq 1 \quad\Rightarrow\quad \exists x \neq 0 : (\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \cdot x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A \cdot x = \lambda \cdot x$
(ii) $x \in \mathbf{Eig}(\lambda, A) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda \cdot x = A \cdot x \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda \cdot \mathbf{E} - A) \cdot x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \mathbb{L}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A, 0)$
Anmerkung: Dieser Beweis ist eine beliebte Aufgabe in der mündlichen Prüfung, da er viele Elemente der linearen Algebra auf kompakte Art und Weise kombiniert.

Alternative Berechnung von Eigenwerten

Wir wissen: $\mathbf{det}(A - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$**. Es gibt zwei Möglichkeiten Eigenwerte zu berechnen:**

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad\Leftrightarrow\quad A \cdot x - \lambda \cdot \mathbf{E} \cdot x = 0$$

Nun müssen wir uns nur über den Zusammenhang zwischen $\mathbf{det}(B)$ **und** $\mathbf{det}(-B)$ **klar werden.**
Es ist leicht zu sehen, daß für $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **gelten muß:** $\mathbf{det}(-B) = (-1)^n \cdot \mathbf{det}(B)$

4.1.4 Gestalt von $\mathbf{det}(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$

Zuerst wollen wir uns die Leibnizsche Determinantenformel ins Gedächtnis zurückrufen

$$\mathbf{det}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Wir richten unser Augenmerk auf die n **Faktoren: Aus jeder Zeile wird ein Faktor ausgewählt, so daß jede Spalte einmal vertreten ist.**
Annahme: Wir würden aus zwei verschiedenen Zeilen zwei Elemente aus derselben Spalte auswählen:

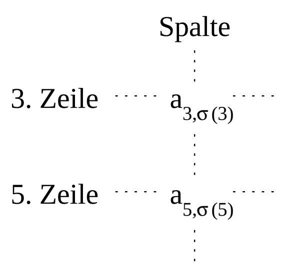

Abbildung IV-3: Auswahl zweier Elemente aus derselben Spalte

Wir können aber diese Auswahl nicht treffen, da es sich bei σ **um eine Bijektion handelt.**

4.1.5 Beispiel für $n = 3$ (die Sarrussche Regel)

Es gilt:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$- a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

Die Sarrussche Regel ist häufig aus der Schule bekannt.
Anmerkungen zu den Vorzeichen:
Betrachten wir nur den Term $a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$ so gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sgn}\,(123) = (-1)^{3-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad +$$

Analog: $a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sgn}\,(132) = (-1)^{3-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad +$$

Aber: $a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sgn}\,(13) = (-1)^{2-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad -$$

Die restlichen Terme sind analog zu behandeln - siehe auch sgn (σ) (Definition: (III.5.c)).
Hier nun noch einmal die Regel von Sarrus zum Merken:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Abbildung IV-4: Regel von Sarrus

Nun wollen wir eine Formel für det $(\lambda\cdot\mathbf{E} - A)$, wobei $(\lambda\cdot\mathbf{E} - A) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, entwickeln.
Wir wissen:

$$\mathbf{det}\,(\lambda\cdot\mathbf{E} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm\,(n - \textbf{fache Produkte})$$

Für die Summe der n-fachen Produkte gilt nun:

$$\sum \pm\,(n - \textbf{fache Produkte}) = (\lambda - a_{11})\cdot(\lambda - a_{22})\cdot\ldots\cdot(\lambda - a_{nn})$$
$$\pm c_2\cdot(n-2) - \textbf{fache Produkte der Form } (\lambda - \alpha_{ii})\ldots \pm c_n$$

wobei c_i Konstanten sind.
Wir erhalten also:

$$\mathbf{det}\,(\lambda\cdot\mathbf{E} - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - a_{ii}) + \sum_{j=2}^{n} c_j\cdot\lambda^{n-j} = \lambda^n - \lambda^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{j\geq 2} d_j\cdot\lambda^{n-j}$$

4.1.6 Definition (IV.1.b): Spur der Matrix

Die Spur der Matrix ist definiert als Spur $(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Also gilt für det $(\lambda \cdot \mathbf{E} - A)$**:**

$$\mathbf{det}\,(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = \lambda^n - \mathbf{Spur}\,(A) \cdot \lambda^{n-1} + d_2 \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + d_n$$

Zur Bestimmung von d_n **setzen wir** $\lambda = 0$ **und erhalten:**

auf der linken Seite: det $(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = \mathbf{det}\,(-A) = (-1)^n \cdot \mathbf{det}\,(A)$

auf der rechten Seite: d_n

Also: $d_n = (-1)^n \cdot \mathbf{det}\,(A)$

4.1.7 Definition (IV.1.c): Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix ist definiert als

$$\mathbf{det}\,(\lambda \cdot \mathbf{E} - A) = \lambda^n - \mathbf{Spur}\,(A) \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \mathbf{det}\,(A)$$

4.1.8 Satz (IV.4.2)

Die Eigenwerte einer Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
Anmerkung: Das charakteristische Polynom, zu einer Matrix A**, wird in vielen Büchern mit** χ_A **bezeichnet.**

4.1.9 Beispiele für die Berechnung von charakteristischen Polynomen

(i) **Sei** $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{K})$ **mit** $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$**. Nun gilt für** $\chi_A(\lambda)$**:**

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda - \delta \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha) \cdot (\lambda - \delta) - \beta \cdot \gamma = \lambda^2 - \lambda \cdot \underbrace{(\alpha + \delta)}_{\mathbf{Spur}\,(A)} + \underbrace{(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma)}_{(-1)^2 \cdot \mathbf{det}\,(A)}$$

(ii) **Nun sei** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**. Wir müssen also die Lösungen von** $\lambda^2 - a \cdot \lambda + b = 0$ **bestimmen. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:**

$$\left(\lambda - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

Diese Gleichung hat eine reelle Lösung falls

$$\frac{a^2}{4} - b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0 \qquad (*)$$

Bei der letzteren Form spricht man auch von der Diskriminantenbedingung. Für λ **ergeben sich damit als Lösungen:**

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

Jetzt wollen wir noch untersuchen wann A keine reellen Eigenwerte besitzt. Es gilt: A hat keine reellen Eigenwerte wenn $\lambda^2 - (\alpha+\delta)\cdot\lambda + (\alpha\cdot\delta - \beta\cdot\gamma) = 0$ keine reelle Lösung hat. Nach $(*)$ gilt dafür

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (\alpha+\delta)^2 \geq 4\alpha\cdot\delta - 4\beta\cdot\gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha\cdot\delta + \delta^2 + 4\beta\cdot\gamma \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha-\delta)^2 + 4\beta\cdot\gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Achtung: A hat in diesem Fall keine reellen Eigenwerte, wohl aber komplexe Eigenwerte.
Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ hat A immer Eigenwerte, da laut dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom

$$z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ (genau n) Lösungen hat.

4.1.10 Satz (IV.1.3):

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $f \in \mathbf{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Dann sind die Eigenwerte von f genau die Eigenwerte von $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. Insbesondere sind die Eigenwerte von $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ unabhängig von der Wahl der Basis.

<u>**Beweis**</u>: **Sei $\Phi_{\mathfrak{A}} \begin{cases} V \to \mathbb{K}^n \\ a_i \mapsto e_i \end{cases}$ Isomorphismus mit $f(v) = \Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}\left(\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\cdot\Phi_{\mathfrak{A}}(v)\right)$ für alle $v \in V$, also gilt für alle $v \in V\setminus\{0\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$:**

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda\cdot v \quad &\Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}\left(\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\cdot\Phi_{\mathfrak{A}}(v)\right) = \lambda\cdot\Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}\left(\Phi_{\mathfrak{A}}(v)\right) = \Phi_{\mathfrak{A}}^{-1}(\lambda\cdot \underbrace{\Phi_{\mathfrak{A}}(v)}_{\doteqdot\, \tilde{v}}) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\cdot\tilde{v} = \lambda\cdot\tilde{v} \end{aligned}$$

<u>**Bemerkungen**</u>:

(i) **Die Eigenvektoren von $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ hängen aber von der Wahl der Basis ab, denn $v \rightsquigarrow \Phi_{\mathfrak{A}}(v)$ bei gleichen Eigenwerten.**

(ii) $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \underbrace{\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})}_{\doteqdot\,\mathbf{T}^{-1}} \cdot \mathrm{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot \underbrace{\mathrm{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})}_{\doteqdot\,\mathbf{T}}$

Generell gilt: Unter $A \mapsto \mathbf{T}^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{T}$ bleiben die Eigenwerte invariant, falls $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$. Sogar das charakteristische Polynom bleibt gleich denn

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(\lambda\cdot\mathbf{E}_n - A) = \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}(\lambda\cdot\mathbf{E}_n - A)\cdot\mathbf{T}\right) &= \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}\lambda\cdot\mathbf{E}_n\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{T}\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\lambda\cdot\mathbf{E}_n - \mathbf{T}^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{T}\right) \end{aligned}$$

4.1.11 Zusammenfassung

$f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ linear, $v \in \mathbf{V}\setminus\{0\}$ heißt Eigenvektor, falls $\exists\lambda \in \mathbb{K}$ mit $f(v) = \lambda\cdot v$, λ heißt Eigenwert. Sprich: v ist ein Eigenvektor zu Eigenwert λ.
Eigenraum zu λ:

$$\mathbf{Eig}\,\{v \in \mathbf{V}:\ f(v) = \lambda\cdot v\} = \{0\} \cup \{\textbf{Eigenvektoren zu } \lambda\}$$

$\mathbf{Eig}(\lambda, f) < \mathbf{V}$, denn

$$\mathbf{Eig}(\lambda, f) = \mathbf{Kern}\,(f - \lambda\cdot\mathbf{id}_{\mathbf{V}})$$

Spezialfall: $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, $f = f_A$: $x \mapsto A\cdot x$ (Matrizentheoretische Fassung)
Charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) := \mathbf{det}(\lambda\cdot\mathbf{E} - A)$ (Im Fischer: $\mathbf{det}(A - \lambda\cdot\mathbf{E})$)

4.2 Kapitel (IV.2): Polynomringe

Problematik von Polynomen und Polynomfunktionen
Beispiele für Polynomfunktion:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(X) = X^3 + 4X^2 - 2$$
$$\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}},\ f(X) = X^3 - X$$
$$\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}},\ f(X) = X^{10} - X^2$$

In $\mathbb{R}$ sind Polynom und Polynomfunktion identisch.
In $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ gilt: $\overline{0}^3 - \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{1}^3 - \overline{1} = \overline{0}$, $\overline{2}^3 - \overline{2} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad f(X) = X^3 - X \equiv 0$ in $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$.
Analog: In $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ gilt: $f(X) = X^{10} - X^2 \equiv 0$
Problem: Funktionen sind Nullfunktionen, sehen aber nicht so aus $\Rightarrow$ Unterscheidung zwischen Polynomen und Polynomfunktionen.
Anmerkung zur Terminologie: Gegeben sei f mit

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i$$

a_i wird als der i-te Koeffizient von f bezeichnet.

4.2.1 Definition (IV.2.a): Gleichheit von Polynomen

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins:

$$\mathbf{R}[X] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i : n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Gegeben seien f, g mit

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i, \quad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j$$

OBdA: $n \leq m$: $f = g \Leftrightarrow$ Für $i = 0, 1, \ldots, n$: $a_i = b_i$, für $i = n+1, \ldots, m$: $b_i = 0$.
Hier ein Beispiel:

$$0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 = 0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2$$

4.2.2 Definition (IV.2.b): Addition von Polynomen

Seien f, g gegeben wie oben. OBdA: $n = m$ (Ansonsten füllen wir mit Nullen auf)

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i + \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \cdot X^k$$

4.2.3 Definition (IV.2.c): Multiplikation von Polynomen

Seien f, g gegeben wie oben.

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) \cdot X^k = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} \right) \cdot X^k$$

4.2.4 Satz (IV.2.1): $\mathbf{R}[X]$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Zur Erinnerung: Ein kommutativer Ring mit Eins ($(\mathbf{R},+,\cdot)$) muß folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) **$(\mathbf{R},+)$ ist abelsche Gruppe**

(ii) **$(\mathbf{R},\cdot)$ ist kommutative Halbgrup e mit Eins**

(iii) **Distributivgesetz**

Beweis: $(\mathbf{R}[X],+)$ ist abelsche Gruppe
Assoziativität: zu zeigen: $(f+g)+h = f+(g+h)$ - folgt direkt aus der Assoziativität in $\mathbb{K}$.
Kommutativität: zu zeigen $f+g = g+f$ - folgt direkt aus der Kommutativität in $\mathbb{K}$.
Nullelement:

$$0_{\mathbf{R}[X]} = \sum 0 \cdot X^i$$

Additives Inverses:

$$-\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) \cdot X^i$$

Beweis: $(\mathbf{R}[X],\cdot)$ ist kommutative Halbgruppe mit Eins.
Wir werden bei diesem Teil des Beweises die Assoziativität nach der Distributivität zeigen.
Kommutativität: zu zeigen:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right)$$

Klar, da $(\mathbf{R},\cdot)$ kommutativ.
Distributivgesetz: Übungsaufgabe 7 auf Übungszettel 2.
Eine Anmerkung zur Notation: $0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 1 \cdot X^2 =: X^2$. Allgemein:

$$a \cdot X^k := 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \ldots + 0 \cdot X^{k-1} + a \cdot X^k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i$$

wobei $a_i = a$ für $i = k$ und $a_i = 0$ für $i \lneqq k$.
Nachprüfen:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i = \textbf{wirkliche Summe der Polynome}$$

<u>Assoziativität</u>: Wir werden die Assoziativität mit Hilfe der Distributivität zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} c_l \cdot X^l\right) \\
= \quad &\left[\left(a_0 \cdot X^0 + \ldots + a_n \cdot X^n\right) \cdot \left(b_0 \cdot X^0 + \ldots + b_m \cdot X^m\right)\right] \cdot \left(c_0 \cdot X^0 + \ldots + c_l \cdot X^l\right) \\
\overset{\textbf{Distr.}}{=} \quad &\textbf{Summe der } \left[\left(a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(b_j \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(c_k \cdot X^k\right)
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} c_l \cdot X^l\right)\right] \\
= \quad &\left(a_0 \cdot X^0 + \ldots + a_n \cdot X^n\right) \cdot \left[\left(b_0 \cdot X^0 + \ldots + b_m \cdot X^m\right) \cdot \left(c_0 \cdot X^0 + \ldots + c_l \cdot X^l\right)\right] \\
\overset{\textbf{Distr.}}{=} \quad &\textbf{Summe der } \left(a_i \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(b_j \cdot X^j\right) \cdot \left(c_k \cdot X^k\right)\right]
\end{aligned}$$

Nun bleibt (wegen der Distributivität) die Assoziativität folgender Produkte zu zeigen:

$$\left[\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(c \cdot X^l\right) = \left(a \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(b \cdot X^j\right) \cdot \left(c \cdot X^l\right)\right]$$

Dazu:

$$\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right) = \sum_{k=0}^{i+j} d_k \cdot X^k$$

wobei die d_k von folgender Gestalt sind:

$$d_k = \left(0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \ldots + 0 \cdot X^{i-1} + a \cdot X^i\right) \cdot \left(0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \ldots + 0 \cdot X^{j-1} + b \cdot X^j\right)$$

Für $k < i + j$: $d_k = 0$, für $k = i + j$: $d_k = a \cdot b$. Damit ergibt sich:

$$\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right) = a \cdot b \cdot X^{i+j}$$

Mit diesem Zwischenergebnis können wir nun die Assoziativität zeigen:
Für die linke Seite gilt: $\left[\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left(b \cdot X^j\right)\right] \cdot \left(c \cdot X^l\right) = (a \cdot b) \cdot c \cdot X^{(i+j)+l}$
Für die rechte Seite gilt: $\left(a \cdot X^i\right) \cdot \left[\left(b \cdot X^j\right) \cdot \left(c \cdot X^l\right)\right] = a \cdot (b \cdot c) \cdot X^{i+(j+l)}$
Die linke und die rechte Seite sind gleich, da in $(\mathbf{R}, \cdot)$ die Koeffizienten und in $(\mathbb{N}_0, +)$ die Exponenten assoziativ sind.
<u>Einselement</u>: $1_{\mathbf{R}[X]} = 1 \cdot X^0$
Noch eine Anmerkung zur Notation:

$a \cdot X^k$ **wird als Monom bezeichnet (in manchen Bücher auch als Term)**

a **ist der Koeffizient des Monoms**

X^k **ist ein Term: Monom mit Koeffizient Eins.**

Jedes Polynom ist die Summe von Monomen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i = \textbf{Summe von Monomen } a_i \cdot X^i$$

4.2.5 Einbettung von $\mathbb{R}$ als konstante Polynome in $\mathbf{R}[X]$

$\mathbb{R} \to \mathbf{R}[X]$, $a \mapsto a \cdot X^0$. **Leicht zu zeigen: injektiv, Ringhomomorphismus.**
Ab jetzt: $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbf{R}[X]$, $a = a \cdot X^0$, $f = a_0 + a_1 \cdot X^1 + \ldots + a_k \cdot X^k$.
"$\hookrightarrow$" symbolisiert die Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbf{R}[X]$.
Für die Eins- und Nullelemente gelten:

$$1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbf{R}[X]}, \quad 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbf{R}[X]}$$

Konvention: Wir können Monome mit Koeffizienten Null weglassen. Zudem können wir bei Monomen mit Koeffizienten Eins den Koeffizienten weglassen:

$$0 + 1 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 + 1 \cdot X^4 = X + X^4$$

4.2.6 Definition (IV.4.d): Grad eines Polynoms

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{f}) = n \quad :\Leftrightarrow \quad f = a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n$$

mit $a_n \neq 0$. **Konvention: grad (Nullpolynom) $= -\infty$ oder nicht definiert.**

4.2.7 Satz (IV.2.2): Gradformel

Sei R Integritätsbereich (= nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins). Dann gilt in $\mathbf{R}[X]$:

(i) $\mathbf{grad}\,(f+g) \leq \mathbf{max}\,\{\mathbf{grad}\,(f), \mathbf{grad}\,(g)\}$, **sogar**
$\mathbf{grad}\,(f+g) = \mathbf{max}\,\{\mathbf{grad}\,(f), \mathbf{grad}\,(g)\}$, **falls** $\mathbf{grad}\,(f) \neq \mathbf{grad}\,(g)$.

(ii) $\mathbf{grad}\,(f \cdot g) = \mathbf{grad}\,(f) + \mathbf{grad}\,(g)$

Beweis:
(i): **Seien f und g gegeben mit** $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i, \quad a_n \neq 0, \qquad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j, \quad b_m \neq 0$
In diesem Fall sei $n \neq m$, etwa $n < m$. Für $f+g$ folgt:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot X + \ldots + (a_n + b_n) \cdot X^n + b_{n+1} \cdot X^{n+1} + \ldots + b_m \cdot X^m$$

$\Rightarrow$ **Behauptung.**
Falls $n = m$: $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot X + \ldots + (a_n + b_n) \cdot X^n \quad \Rightarrow$ **Behauptung.**
(ii): **Seien f und g gegeben mit**

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i, \quad a_n \neq 0, \qquad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j, \quad b_m \neq 0$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot X^j\right) &= \sum_{k=0}^{n+m} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}\right) \cdot X^k \\ &= \sum (\textbf{Monome vom Grad} < n+m) + a_n \cdot b_m \cdot X^{n+m}\end{aligned}$$

Wenn R Integritätsbereich ist muß $a_n \cdot b_m \neq 0$ sein $\Rightarrow$ Behauptung.
Beispiel: Sei $\mathbf{R} = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_4$ (R ist in diesem Fall kein Integritätsbereich):

$$(a + b \cdot X)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot X + b^2 \cdot X^2$$

Für $b = 2$: $(a + b \cdot X)^2 = a^2$ **oder** $(1 + 2 \cdot X)^2 = (3 + 2 \cdot X)^2 = 1$ **in** $\mathbb{F}_4$.

4.2.8 Definition (IV.4.e): Normierung

f **normiert** $:\Leftrightarrow f = a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + 1 \cdot X^n$ **wobei grad** $(f) = n$.
Für ein beliebiges R (kein Integritätsbereich notwendig) mit normiertem f **gilt:**

$$\mathbf{grad}\,(f \cdot g) = \mathbf{grad}\,(f) + \mathbf{grad}\,(g)$$

4.2.9 Satz (IV.2.3): Division mit Rest

Sei $\mathbb{K}$ **ein Körper und seien** $f, g \in \mathbf{K}[X]$, $g \neq 0$. **Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome** q, r **mit**

(i) $f = g \cdot q + r$

(ii) $r = 0$ **oder grad** $(r) <$ **grad** (g)

Beispiel: $X^4 + 1 = \left(X^2 + X + 2\right) \cdot \left(X^2 - X - 1\right) + 3 \cdot X + 3$
Beweis: Wir werden zuerst die Eindeutigkeit und dann die Existenz beweisen:
Eindeutigkeit:

$$f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r' \quad \Rightarrow \quad g \cdot (q - q') = r' - r$$

Angenommen: $r \neq r' \quad \Rightarrow$ **Alle Polynome** $\neq 0$
Wenden wir nun die multiplikative Gradformel (IV.2.2) an so folgt:

$$\mathbf{grad}\,(g) + \mathbf{grad}\,(q - q') = \mathbf{grad}\,(r' - r)$$

Wir erhalten einen Widerspruch, da grad $(r' - r) <$ **grad** (g) **und grad** $(q' - q) \geq 0$.
Also: $r = r' \Rightarrow 0 = g \cdot (q - q')$. **Da** $g \neq 0$ **nach Voraussetzung folgt analog zu oben mit Hilfe der Gradformel** $q = q'$.
$\Rightarrow$ **Eindeutigkeit.**
Existenz:
Per Induktion nach grad (f), $f \neq 0$.
IA: grad $(f) = 0$**: trivial, grad** $(f) = n > 0$
IS: Sei $a_n \neq 0$, **grad** $(f_n) \leq n - 1$
Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: grad $(g) > n \quad \Rightarrow \quad q = 0, r = f$.
2. Fall: grad $(g) = m \leq n \quad \Rightarrow \quad g = b_m \cdot X^m + \ldots$, $b_m \neq 0$.
Es ist $f - a_n \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n-m} \cdot g$ **ein Polynom vom Grad** $\leq n - 1 =: \overline{f}$.
Nach Induktionsvoraussetzung: $\overline{f} = g \cdot \overline{q} + r$. **Einsetzen liefert:**

$$f = \left(a_n \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n-m} + \overline{q}\right) \cdot g + r$$

4.2.10 Division mit Rest im $\mathbf{K}[X]$

Anmerkung: $\mathbb{K}$ **ist natürlich ein Körper.** $(f = q \cdot g + r,\ r = 0$ **oder grad** $(r) \lneqq$ **grad** (g) **für** $g \neq 0)$

Analog zu $\mathbb{Z}$**:** $a = q \cdot b + r$, **wobei** $0 \leq r < |b|$. q **und** r **sind beide eindeutig.**

($\mathbb{Z}$ **und** $\mathbf{K}[X]$ **sind Beispiele für Euklidische Ringe)**

Zur Erinnerung:

Sei R Integritätsbereich $(a \cdot b = 0 \Rightarrow a = \vee b = 0)$

Teilbarkeitsbeziehung: $a|\,b :\Leftrightarrow \exists c : \ a \cdot c = b$.

Eigenschaften:

(i) $a|\,b \wedge a|\,c \Rightarrow a|\,(x \cdot b + y \cdot c)$ **für** $x, y \in \mathbf{K}$

(ii) Sei $a \cdot b \neq 0$. $a|\,b \wedge b|\,a \Leftrightarrow a = \varepsilon \cdot b$. ε **wird als Einheit bezeichnet:** $\varepsilon \cdot \eta = 1$

Beweis zu (ii)

"$\Leftarrow$**": Klar.**

"$\Rightarrow$**":** $a|\,b \wedge b|\,a \Leftrightarrow b = c \cdot a \wedge a = d \cdot b \Rightarrow b = cd \cdot b \Leftrightarrow b \cdot (1 - cd) = 0$. **Da** $b \neq 0$ **laut Voraussetzung:** $1 = cd$, c **Einheit.**

4.2.11 Allgemeine Anmerkungen zur Teilbarkeitslehre

Zur Erinnerung:

a) $d = \mathbf{ggT}\,(a, b)$ **wobei** $a \neq 0$, $b \neq 0$

(i) $d|\,a \wedge d|\,b$

(ii) $e|\,a \wedge e|\,b \Rightarrow e|\,d$ **(schluckt anderen Teiler)**

Allgemein: Definition des größten gemeinsamen Teiler

Existenz: Im Allgemeinen nicht vorhanden

Im Fall der Existenz nur bis auf Einheiten als Faktoren festgelegt

b) $m = \mathbf{kgV}\,(a, b)$

(i) $a|\,m \wedge b|\,m$

(ii) $a|\,n \wedge b|\,n \Rightarrow m|\,n$

Im Fall der Existenz: Bis auf Einheit als Faktor festgelegt.

Anzahl von ggTs und kgVs:

In $\mathbb{N}$**: nur jeweils ein ggT und ein kgV.**

In $\mathbb{Z}$**: zwei ggTs und zwei kgVs**

4.2.12 Teilbarkeit in $\mathbf{K}[X]$

Seien $f, g \in \mathbf{K}[X]$.
Teilbarkeit: $f | g \Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{K}[X]$: $g = f \cdot h$.
Einheit in $\mathbf{K}[X]$: f **Einheit** $\Leftrightarrow \mathbf{grad}(f) = 0$ **(Das heißt:** $f \equiv a \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$**)**
Beweis:
"$\Leftarrow$" $f = a \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, $g = a^{-1} \Rightarrow f \cdot g = 1$
"$\Rightarrow$" $f \cdot g = 1$. **Nach der Gradformel folgt:** $\mathbf{grad}(f) + \mathbf{grad}(g) = \mathbf{grad}(1) = 0$
$\Rightarrow$ $\mathbf{grad}(f) = \mathbf{grad}(g) = 0$, **da** $\mathbf{grad}(\cdot) \in \mathbb{N}_0$.

4.2.13 Existenz des $\mathbf{ggT}(f,g)$ für $\mathbf{K}[X]$ /Existenz einer Zerlegung in irreduzieble Polynome

Zuerst wollen wir noch einmal $\mathbb{Z}$ betrachten:
Warum existiert ein $\mathbf{ggT}(a,b)$ in $\mathbb{Z}$? Die Menge der gemeinsamen Teiler von a und b ist endlich und es existiert ein größter (bezüglich der Ordnung) gemeinsamer Teiler.
Eigenschaft (ii) des $\mathbf{ggT}(a,b)$ folgt aus der Primfaktorzerlegung:

$$a = \prod p^{\alpha_p}, b = \prod p^{\beta_p} \Rightarrow \quad \mathbf{ggT}(a,b) = \pm \prod p^{\mathbf{min}\{\alpha_p, \beta_p\}}$$

Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

$$\prod p^{\delta_p} \Big| \prod p^{\gamma_p} \quad \Leftrightarrow \quad \forall p : \delta_p \leq \gamma_p$$

Analog über die Primfaktorzerlegung können wir das $\mathbf{kgV}(a,b)$ definieren:

$$a = \prod p^{\alpha_p}, b = \prod p^{\beta_p} \Rightarrow \quad \mathbf{kgV}(a,b) = \pm \prod p^{\mathbf{max}\{\alpha_p, \beta_p\}}$$

4.2.14 Teilbarkeitslehre in $\mathbf{K}[X]$

Die Einheiten in $\mathbf{K}[X]$ sind die konstanten Polynome $\neq 0$.
Beispiele:

(a) $\mathbb{R}[X]: f = X^3 - 8, g = X^2 + X + 1$

$$\begin{array}{rcl}
\left(x^3 - 8\right) : \left(x^2 + x + 1\right) & = & X^2 + 2x + 4 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} & & \\
2x^2 - 8 & & \\
\underline{-\left(2x^2 - 4x\right)} & & \\
4x - 8 & & \\
\underline{-(4x - 8)} & & \\
0 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) \qquad g$ **ist in $\mathbb{R}[X]$ irreduziebel.**

(b) $\mathbb{Q}[X]: x^{101} - 4$ **wahrscheinlich keine irreduziblen Faktoren**

(c) $\mathbb{R}[X]: x^4 - 1$ **hat Faktoren:** $(x-1), (x+1), \left(x^2+1\right)$

Es ist leicht zu ersehen, daß eine Faktorisierung mit hohem Rechenaufwand, also auch mit vielen Problemen, verbunden ist.

4.2.15 Definition (IV.2.f): irreduzibel

Ein Polynom f heißt irreduzibel $\Leftrightarrow$ grad$(f) \geq 1$, f hat keine Zerlegungen in Grad-kleinere Faktoren von Grad ≥ 1

4.2.16 Satz (IV.2.4): Polynome: ggT, kgV, irreduzieble Faktoren

Gegeben sei der Polynomring $\mathbf{K}[\mathbf{X}]$ über den Körper $\mathbb{K}$.

(i) **Es existieren ggT und kgV**

(ii) $\mathbf{ggT}(f,g) \cdot \mathbf{kgV}(f,g) = \text{const.} \cdot f \cdot g$

(iii) **Die Faktorisierung in irreduzieble Polynome ist eindeutig, bis auf Reihenfolge und konstante Kaktoren $\neq 0$.**

Beweisskizze: Euklidscher Algorthmus für Polynomdivision $f = f_1$, $g = f_2$:

$$\begin{array}{rrclr} & f_1 & = & q_1 \cdot f_2 + f_3 & f_3 = 0 \vee \mathbf{grad}(f_3) < \mathbf{grad}(f_2) \\ \textbf{Falls } f_3 \neq 0 & f_2 & = & q_2 \cdot f_3 + f_4 & f_3 = 0 \vee \mathbf{grad}(f_4) < \mathbf{grad}(f_3) \\ & & \vdots & & \\ \textbf{Falls } f_{i-1} \neq 0 & f_{i-2} & = & q_{i-2} \cdot f_{i-1} + f_i & f_i = 0 \vee \mathbf{grad}(f_i) < \mathbf{grad}(f_{i-1}) \\ \textbf{Falls } f_i \neq 0 & f_{i-1} & = & q_{i-1} \cdot f_i + f_{i+1} & f_{i+1} = 0 \vee \mathbf{grad}(f_{i+1}) < \mathbf{grad}(f_i) \end{array}$$

Der Algorithmus terminiert, da grad(f_i) immer kleiner wird und eventuell Null wird. Dies bedeutet, das wir nach maximal grad(f_{i+1}) Schritte berechnen müssen. Irgendwann ist $f_{i-1} = q_{i-1} \cdot f_i + 0$, i maximal. Aus dieser Gleichung können wir den ggT ablesen: ggT$(f,g) = f_i$.

<u>Bisher</u>: Die Existenz des ggTs folgt direkt aus dem Euklidschen Algorithmus.

Nun gehen wir zur Faktorzerlegung über.

<u>Behauptung</u>: Es existiert eine Faktorzerlegung in irreduzieble Polynome.

<u>Beweis</u>: Per Induktion nach grad$(f) \geq 1$

"grad$(f) = 1$": Unmöglich, da $f = g \cdot h$, grad(g), grad$(h) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad$ grad$(f) \geq 2$.

"grad$(f) = n$":

> **f ist irreduziebel $\quad \Rightarrow \quad$ fertig**
>
> **Sonst: $f = g \cdot h$, $1 \leq$ grad(g), grad$(h) \leq$ grad(f)**
> **Nach Induktion: $g = \prod p_i \quad p_i$ irreduziebel, $h = \prod q_j \quad q_j$ irreduziebel.**
> $\Rightarrow \quad f = g \cdot h = \prod p_i \cdot \prod q_j$

Eindeutigkeit durch Übergang zum normierten Polynom.

<u>Erweiterter Euklidischer Algorithmus</u>:

$$\mathbf{ggT}\,(f,g) = A \cdot f + B \cdot g$$

wobei $A, B \in \mathbf{K}\,[X]$ **- der euklidische Algorithmus liefert** A **und** B**.**
Konsequenz:
I) Existenz:

> **In** $\mathbb{Z}$**:** p **ist Primzahl:** $p|\, r \cdot s \Rightarrow p|\, r \vee p|\, s$
>
> **In** $\mathbf{K}\,[X]$**:** f **ist irreduzibel:** $f|\, g \cdot h \Rightarrow f|\, g \vee f|\, h$

Beweis: Sei f **irreduzibel,** $f|\, g \cdot h$
Angenommen f **teilt** g **nicht** $\Rightarrow \mathbf{ggT}\,(f,g) = 1 = A \cdot f + B \cdot g$
Multiplikation mit h **liefert:**

$$h = A \cdot f \cdot h + B \cdot g \cdot h = (A \cdot h) \cdot f + \underbrace{B \cdot C \cdot f}_{(*)} = f \cdot (A \cdot h + B \cdot C) \quad \Rightarrow \quad \textbf{Behauptung}$$

Anmerkung zu $(*)$**: Laut Voraussetzung:** $f|\,(g \cdot h)$

II) Eindeutigkeit
Es ist möglich die Eindeutigkeit der Faktorzerlegung aus dem Euklidischen Algorithmus zu zeigen:
Seien $f, g \in \mathbf{K}\,[X]$**,** $g \neq 0$**.**
<u>Euklidischer Algorithmus</u>:

> **Input:** $f_1 = f$**,** $f_2 = g$
>
> **Schleife:** $f_i = f_{i+1} \cdot q_i + f_{i+2}$ **- Wichtig:** $f_{i+2} = 0$ **oder grad** $(f_{i+2}) <$ **grad** (f_{i+1})
>
> **Terminierung der Schleife für** $f_{i+2} = 0$
>
> **Output:** $f_{i+1} = \mathbf{ggT}\,(f,g)$ **(Eindeutigkeit bis auf konstante Faktoren)**

$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_r = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_s$ **wobei** f_i, g_i **irreduzible Polynome seien.**
$f_1|\, g_1 \cdot (g_2 \cdot \ldots \cdot g_s) \Rightarrow f_1|\, g_1 \vee f_1|\,(g_2 \cdot \ldots \cdot g_s) \quad \overset{\mathbf{OE}}{\Rightarrow} \quad g_1 = \mathbf{const} \cdot f_1 \vee f_1|\,(g_2 \cdot \ldots \cdot g_s)$
$\Rightarrow$ **per Induktion** $\ldots \Rightarrow \exists g_1$ **mit** $g_1 = \mathbf{const}_1 \cdot f_1$
OE (Umnummerierung) $g_1 = \mathbf{const}_1 \cdot f_1 \Rightarrow$ **(Kürzen - Konstante in** g_2 **eingegangen)**
$f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_r = g_2 \cdot g_3 \cdot \ldots \cdot g_s$
Per Induktion: $r = s$**, nach Umnummerierung:** $g_i = \mathbf{const}_i \cdot f_i$
Eindeutige (bis auf Reihenfolge) normierte irreduzible Zerlegung: $f = c \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_r$
mit $c \neq 0$ **wobei** f_i **irreduzible Polynome sind.**
Endgültige Formulierung:

$$f = c \cdot \prod p^{\alpha_p}$$

wobei p **die Menge der vorhandenen irreduziblen Polynome durchläuft.**
Anmerkungen zur Primfaktorzerlegung:

> **In der Praxis von geringer Bedeutung, da sehr rechenaufwendig**
>
> **Theoretisch von Nutzen:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{ggT}\left(c \cdot \prod p^{\alpha_p}, c' \cdot \prod p^{\beta_p}\right) &= \prod p^{\mathbf{min}\{\alpha_p, \beta_p\}} \\
\mathbf{kgV}\left(c \cdot \prod p^{\alpha_p}, c' \cdot \prod p^{\beta_p}\right) &= \prod p^{\mathbf{max}\{\alpha_p, \beta_p\}} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{ggT}\,(f,g) \cdot \mathbf{kgV}\,(f,g) &= f \cdot g \cdot \mathbf{const}
\end{aligned}$$

4.2.17 Beispiele zum Euklidschen Algorithmus

(a) $f = x^4 - 1$, $g = x^3 - 1$

$$\begin{aligned} f = x^4 - 1 &= q_1 \cdot \left(x^3 - 1\right) + f_3 \\ f_1 = x^4 - 1 &= x \cdot \left(x^3 - 1\right) + (x - 1) \\ f_2 = x^3 - 1 &= q_2 \cdot (x - 1) + f_4 \\ x^3 - 1 &= \left(x^2 + x + 1\right) \cdot (x - 1) + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{ggT}\,(f, g) = \mathbf{ggT}\left(x^4 - 1, x^3 - 1\right) = x - 1$

(b) $f = 2x^4 - 1$, $g = x^3 - 1$

$$\begin{aligned} f = 2x^4 - 1 &= q_1 \cdot \left(x^3 - 1\right) + f_3 \\ f_1 = 2x^4 - 1 &= 2x \cdot \left(x^3 - 1\right) + (2x - 1) \\ f_2 = x^3 - 1 &= \frac{1}{2}x^2 \cdot (2x - 1) + \frac{1}{2}x^2 - 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right) \cdot (2x - 1) - \frac{7}{8} \\ 2x - 1 &= \left(-\frac{16}{7}x + \frac{8}{7}\right)\left(-\frac{7}{8}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{ggT}\,(f, g) = \mathbf{ggT}\left(2x^4 - 1, x^3 - 1\right) = -\frac{7}{8}$

<u>Bemerkung</u>: $d = \mathbf{ggT}\,(a, b)$**,** ε **Einheit** $\quad \Rightarrow \quad d \cdot \varepsilon = \mathbf{ggT}\,(a, b)$**.**

Deshalb: $\mathbf{ggT}\,(f, g) = \mathbf{ggT}\left(2x^4 - 1, x^3 - 1\right) = 1$

Einsetzen in Polynome

Situation: $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}'$ **(**$\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ **kommutative Ringe mit Eins). Sei** $a \in \mathbf{R}'$ **und**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot X^i \in \mathbf{R}[X]$$

Einsetzen von a **liefert:**

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot a^i \in \mathbf{R}'$$

4.2.18 Satz (IV.2.4) (Einsetzen ist Ringhomorphismus)

(i) $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

(ii) $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$

Beweise:

(i) **Seien** f **und** g **gegeben mit**

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \cdot X^i$$

Nach Definition der Polynom-Addition:

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \cdot X^i$$

Nun setzen wir a **ein und erhalten:**

$$(f + g)(a) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \cdot a^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \cdot a^i + \beta_i \cdot a^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \cdot a^i\right) + \sum_{i=0}^{n} \left(\beta_i \cdot a^i\right) = f(a) + f(g)$$

(ii) **Bekannt: Für die Multiplikation zweier Polynome gilt:**

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot X^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m}\beta_i\cdot X^i\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\cdot\beta_{k-i}\right)\cdot X^k$$

Setzen wir nun a ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(a) &= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\cdot\beta_{k-i}\right)\cdot a^k\\ &= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\beta_{k-i}\cdot a^{k-i}\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq n+m}}\left(\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\beta_j\cdot a^j\right)\right)\\ &= \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq n+m}}\left(\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\beta_j\cdot a^j\right)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot a^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\beta_j\cdot a^j\right)\\ &= f(a)\cdot g(a)\end{aligned}$$

Warum Ringhomomorphismus: a **liefert:** $\Phi:\mathbf{R}[X]\to\mathbf{R}'$, $f\mapsto f(a)$**, es ist**

$$\begin{aligned}\Phi(f+g) &= \Phi(f)+\Phi(g)\\ \Phi(f\cdot g) &= \Phi(f)\cdot\Phi(g)\end{aligned}$$

4.2.19 Satz (IV.2.5): "Abspalten der Nullstellen" - Partialbruchzerlegung

Sei $\mathbb{K}$ Körper, $f\in\mathbf{K}[X]$ (grad$(f)\geq 1$), $a\in\mathbb{K}$

(i) $f(a)=0\Leftrightarrow(X-a)|f \quad\Leftrightarrow\quad f=(X-a)\cdot g(X)$ **für ein** $g\in\mathbf{K}[X]$

(ii) grad$(f)=n \quad\Rightarrow\quad f$ **hat in $\mathbb{K}$ höchstens n Nullstellen**

Beweise:
Zu (i): Division mit Rest: $f=(X-a)\cdot q+r$**. Wir müssen zwei Fälle unterschieden:** $r=0\vee$ **grad**$(r)<1 \quad\Rightarrow\quad$ **grad**$(r)=0$**. Das heißt:** $r=$ **const. Einsetzen von a liefert:**

$$f(a)=(a-a)\cdot g(a)+r(a)=r\quad\Rightarrow\quad f(a)=r=0\quad\textbf{nach Voraussetzung}$$

Das heißt: $f(X)=(X-a)\cdot q(X)+f(a)\quad\Rightarrow\quad$ **Behauptung.**
Zu (ii): Induktionsbeweis:
f **habe eine Nullstellen:** $f=(X-a)\cdot g$, $g\in\mathbf{K}[X]$**. Nach Gradformel: grad**$(g)=n-1$
Weitere Nullstelle von f:

$$f(b)=(b-a)\cdot g(b)$$

$\Rightarrow\quad b$ **Nullstellen von $f\Rightarrow b=a\vee g(b)=0$. Nach Induktion hat g höchstens $n-1$ Nullstellen $\Rightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen.**

Bemerkungen (teilweise mit Beweisen):

1.) $f \in \mathbf{K}[X]$, $f(x) = (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot \ldots \cdot (X - a_i) \cdot g(x)$ **wobei** g **ohne Nullstelle in** $\mathbb{K}$.

2.) Satz (IV.2.5.i) **gilt auch über Ringen, (IV**.2.5.ii) **ist absolut falsch. Beispiel: Sei R** $= \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}[X]$. **Löse** $T^2 - 1 = 0$ **in R. Diese Gleichung hat unendliche viele Lösungen:** $(1 + 2 \cdot X^n)^2 = 1 + 2 \cdot 2 \cdot X^n + (2 \cdot X^n)^2 = 1 + 4 \cdot X^n + 4 \cdot X^{2n} = 1$ **für alle** n.

3.) Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht konstante Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ **besitzt. Äquivalent dazu: Jedes Polynom vom Grad** ≥ 1 **ist Produkt von Linearfaktoren und eventuell einer Konstante.**

Beispiel: $\mathbb{C}$ **ist algebraisch abgeschlossen (**$\Rightarrow$ **irreduzible Polynome in** $\mathbb{C}$ **haben Grad**$=$ 1. **(Fundamentalsatz der Algebra - erster Beweis darüber von Gauß)).**

Beispiel: Berechnung von $T^n - 1 = 0$ **(Berechnung der** n**-ten Wurzeln einer komplexen Zahl)**

Bereits bekannt (Multiplikation zweier komplexen Zahlen):

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi} \\ w &= r' \cdot (\cos(\varphi') + i \cdot \sin(\varphi')) = r' \cdot e^{i\varphi'} \\ z \cdot w &= r \cdot r' \cdot e^{i \cdot (\varphi + \varphi')} \end{aligned}$$

Damit: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n\varphi}$. **In den Übungen schon gezeigt: Formel von Moivre:**

$$z_k = e^{i \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k}$$

mit $k = 0, 1, \ldots n - 1$

4.) Zerlegung von Polynomen in $\mathbb{R}[X]$

(i) irreduzible Polynome haben Grad$=$ 1 **oder Grad**$=$ 2. $X^2 + aX + b$ **ist irreduzibel** $\Leftrightarrow$ $X^2 + aX + b$ **in** $\mathbb{R}$ **nicht lösbar**

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \notin \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \lneqq 0 \end{aligned}$$

(ii) $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$ **ist in** $\mathbb{R}$ **lösbar (Allgemeiner:** $X^n + bX^{n-1} + \ldots + c = 0$ **ist in** $\mathbb{R}$ **für ungerade** n **lösbar). Wir wissen aus der Analysis:**

$$\lim_{x \to -\infty} X^n + bX^{n-1} + \ldots + c = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} X^n + bX^{n-1} + \ldots + c = \infty$$

Da es sich bei diesen Polynomen um stetige Funktion handelt folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß $X^n + bX^{n-1} + \ldots + c$ **mindestens eine Nullstelle hat.**

Die Behauptung (i) **läßt sich mit Hilfe des Fundamentalsatz der Algebra beweisen.**

Sei $f \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, **wobei**

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot X^i$$

Nun ist:

$$f(z) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^i$$

für ein $z \in \mathbb{C}$.

Einschub: Konjugiert komplexe Zahlen:

Sei $z = a + bi$**. Nun gilt:** $\overline{a+ib} = a - bi$

Seien $z, w \in \mathbb{C}$**:** $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ **beziehungsweise** $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Nun gilt auch:

$$0 = \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i \cdot z^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \cdot \overline{z^i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{z}^i \quad \Rightarrow \quad f(\overline{z}) = 0$$

Also: Wenn $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ **und** z **Nullstelle** $\Rightarrow$ $\overline{z}$ **ist auch Nullstelle von** f**.**
$\Rightarrow$ **In** $\mathbb{C}[X]$**:**

$$(X - z) \cdot (X - \overline{z}) | \, f$$

Zudem gilt:

$$(X - z) \cdot (X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z}) \cdot X + z \cdot \overline{z} = \underbrace{X^2 + 2 \cdot \Re(z) \cdot X + |z|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

Also: $f = \left(X^2 + 2 \cdot \Re(z) \cdot X + |z|^2\right) \cdot g$**, wobei** $g \in \mathbb{R}[X]$

5.) <u>Integration über Partialbruchzerlegung</u>
Häufig sind Intergrale der Form

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \, \mathbf{d}x$$

zu lösen, wobei $f, g \in \mathbb{R}[X]$**.**
1. Schritt: $g = f_1 \cdot f_2$**, ggT** $(f_1, f_2) = 1$**. Nach Vorausetzung:** $1 = A \cdot f_1 + B \cdot f_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f_1 \cdot f_2} = \frac{A}{f_2} + \frac{B}{f_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} = \frac{\overline{A}}{f_2} + \frac{\overline{B}}{f_1} = C + \frac{A_1}{f_2} + \frac{A_2}{f_1}$$

wobei C, A_1, A_2 **Polynome sind mit grad** $(A_i) <$ **grad** (f_i)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{f}{g} \, \mathbf{d}x = \int C \, \mathbf{d}x + \int \frac{A_1}{f_2} \, \mathbf{d}x + \int \frac{A_2}{f_1} \, \mathbf{d}x$$

2. Schritt: Schließlich erhalten wir:

$$\int \frac{f}{g} \, \mathbf{d}x = \int C \, \mathbf{d}x + \underbrace{\int \frac{c_i}{(X - a_i)^k} \, \mathbf{d}x + \ldots}_{\textbf{lineare Terme}} + \underbrace{\int \frac{c_j}{(X^2 + aX + b)^l} \, \mathbf{d}x + \ldots}_{\textbf{quadratische Terme}}$$

6.) <u>Faktorisierung der Polynome</u> in $\mathbb{R}[X]$:

$$f(X) = c \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{r_i}}_{(i)} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \left(X^2 + \beta_j \cdot X + \gamma_j\right)^{s_j}}_{(ii)}$$

Da wir uns in einem Polynom-Ring über $\mathbb{R}$ befinden ist f ein Produkt von linearen Termen (i) und quadratischen Termen (ii), wobei die quadratischen Terme irreduzibel sind, also $\left(\frac{\beta_j}{2}\right)^2 - \gamma_j \lneqq 0$.

7.) <u>Integration von gebrochen rationalen Funktionen</u>:

$$\int \frac{f}{g}\,\mathbf{d}X = \int \frac{f}{g_1 \cdot g_2}\,\mathbf{d}X = \int A + \frac{B}{g_1} + \frac{C}{g_2}\,\mathbf{d}X$$

wobei A, B, C Polynome, ggT $(g_1, g_2) = 1$, grad $(g_1) >$ grad (B), grad $(g_2) >$ grad (C). Anwendung der follständigen Faktorisierung liefert:

$$\int A + \frac{B}{g_1} + \frac{C}{g_2}\,\mathbf{d}X = \int A\,\mathbf{d}X + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int \frac{B_i}{(X-\alpha_i)^{r_i}}\,\mathbf{d}X}_{(i)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \int \frac{C_j}{\left(X^2 + \beta_j \cdot X + \gamma_j\right)^{s_j}}\,\mathbf{d}X}_{(ii)}$$

Nun müssen wir die verbleibenden Brüche, welche entweder lineare (i) oder quadratische Terme (ii) im Nenner haben, integrieren:

a) Berechnung der linearen Terme:

$$\int \frac{B}{(X-\alpha)^r}\,\mathbf{d}X$$

Wir können B_i per Division mit Rest zerlegen: $B = \tilde{B} \cdot (X-\alpha) + B(\alpha)$. Damit folgt:

$$\int \frac{B}{(X-\alpha)^r}\,\mathbf{d}X = \int \frac{\tilde{B}}{(X-\alpha)^{r-1}}\,\mathbf{d}X + \int \frac{B(\alpha)}{(X-\alpha)^r}\,\mathbf{d}X$$

wobei grad $(B) < r$ und grad $\left(\tilde{B}\right) < r-1$. Schließlich ist alles zurückgeführt auf:

$$\int \frac{1}{(X-\alpha)^r}\,\mathbf{d}X = \begin{cases} \ln(|X-\alpha|) & r = 1 \\ -\dfrac{1}{r+1} \cdot \dfrac{1}{(X-\alpha)^{r+1}} & r > 1 \end{cases}$$

b) Berechnung der quadratischen Terme

$$\int \frac{C}{\left(X^2 + \beta \cdot X + \gamma\right)^s}$$

Zuerst führen wir eine Variablensubstitution durch. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$X^2 + \beta \cdot X + \gamma = \left(X + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \underbrace{\left[\gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]}_{\doteqdot\, \delta} = \left(X + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \delta = \delta \cdot \left[\left(\frac{X + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\delta}}\right)^2 + 1\right]$$

Nun substituieren wir: $Z := \dfrac{X + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\delta}}$

Schließlich erhalten wir Integrale der Form $\displaystyle\int \frac{C(Z)}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z$

C **läßt sich nun per Division mit Rest weiter zerlegen:** $C(Z) = Q(Z)\cdot\left(Z^2+1\right)+(a\cdot Z+b)$
Wir erhalten:

$$\int \frac{C(Z)}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z = \underbrace{\int \frac{Q(Z)}{(Z^2+1)^{r-1}}\,\mathbf{d}Z}_{(i)} + \underbrace{\int \frac{a\cdot Z+b}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z}_{(ii)}$$

Das Integral (i) **zerlegen wir rekursiv weiter, das Integral** (ii) **ist mittels Substitution und partieller Integration zu berechnen:**

$$\int \frac{a\cdot Z+b}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z = \frac{a}{2}\cdot \underbrace{\int \frac{2Z}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z}_{(iii)} + b\cdot \underbrace{\int \frac{1}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z}_{\doteqdot I_r}$$

(iii) **wird direkt per Substitution integriert.** I_r **intergrieren wir mittels partieller Integration:**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z &= \int 1\cdot\frac{1}{(Z^2+1)^r}\,\mathbf{d}Z\\
&= Z\cdot\frac{1}{(Z^2+1)^r} + 2r\cdot\int\frac{Z^2}{(Z^2+1)^{r+1}}\\
&= \frac{Z}{(Z^2+1)^r} + 2r\cdot\int\frac{Z^2+1-1}{(Z^2+1)^{r+1}}\\
&= \frac{Z}{(Z^2+1)^r} + 2r\cdot I_r - 2r\cdot I_{r+1}
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit folgende Rekursionsformel:

$$I_{r+1} = \frac{1}{2r}\cdot\frac{Z}{(Z^2+1)^r} + \frac{2r}{2r-1}\cdot I_r \quad \textbf{mit} \quad I_1 = \arctan(Z)$$

4.3 Kapitel (IV.3): Diagonalisierbarkeit

Zur Erinnerung:

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ linear, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) = n$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{W}) = m$, $\mathfrak{A}$ sei Basis von V und $\mathfrak{B}$ sei Basis von W

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(f) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad a_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{pmatrix}, \quad f\,(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i$$

Berechnung der Transformationsmatrix:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{f})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung IV-5: Schema für die Transformationsmatrix

Basiswechsel: Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ Basen von V und $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Basen von W.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{id}"] & \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[r, "\mathbf{id}"] & \mathbf{W} \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}'}"] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{f})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"'] \arrow[r, "\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathbf{id})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}'}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung IV-6: Schema für den Basiswechsel

$f = \mathbf{id}_{\mathbf{W}} \circ f \circ \mathbf{id}_{\mathbf{V}}$ wird bezüglich $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ durch $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(f) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$ beschrieben.
Es folgt für die Transformationsformel: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{B}'}\,(f) = \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(f) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$
Anmerkung: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$ und $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}\,(\mathbf{id})$ sind reguläre Matrizen, da zum Beispiel:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'}\,(\mathbf{id}) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id}) = \mathbf{E}$$

4.3.1 Spezialfall: Endomorphismen $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

Wir wählen eine Basis $\mathfrak{A}$ von V mit beschreibender Matrix $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(f)$
(In diesem Fall, da Endomorphismus: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$)
Die Transformationsformel für den Basiswechsel von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ lautet:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}'}\,(f) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'}\,(\mathbf{id}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(f) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}'}_{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}\,(f) \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

wobei $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{K})$

4.3.2 Definition (IV.3.a): Ähnlichkeit von Matrizen

Seien $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. A und B heißen ähnlich, falls ein $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ mit $B = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$ existiert. T wird als konjugierende Matrix bezeichnet.

Bemerkung: Ähnlichkeit ist Äquivalenzrelation

Zur Erinnerung: Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

(i) **Reflexivität** $A \sim A$: $A = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T} = \mathbf{E}_n$

(ii) **Symmetrie** $B \sim A \Rightarrow A \sim B$: $B = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow A = \mathbf{T}^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{T}$,
$\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ **also** $A = \mathbf{S} \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B$

(iii) **Transitivität: Sei zusätzlich** $C \in \mathbf{M_n}(\mathbb{K})$ **und** $A \sim B$, $B \sim C$:
$A \sim B \Leftrightarrow A = \mathbf{S} \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1}$ **mit** $B \sim C \Leftrightarrow B = \mathbf{T} \cdot C \cdot \mathbf{T}^{-1}$ **folgt:**
$A = \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{T} \cdot C \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot C \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{U} \cdot C \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A \sim C$
Bemerkung: $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}$

4.3.3 Definition (IV.3.b): Diagonalisierbarkeit von f

$f : V \to V$ **Endomorphismus,** f **heißt diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ **es existiert eine Basis** $\mathbb{K}$ **von** V **mit** $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

<u>Speziell</u>: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, A **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$**diagonalisierbar.**

<u>Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie</u>:

$\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $f(v_j) = \sum_i \alpha_{ij} v_i$ **entspricht der** j **-ten Spalte von**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \cdots \lambda_j \cdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Spalte}$$

daher $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $\mathfrak{A}$ **ist Basis aus Eigenwerten.**

4.3.4 Satz (IV.3.1):

Seien $f : V \to V$ **ein Endomorphismus,** $\mathfrak{B}$ **eine beliebige Basis von** V**. dann sind äquivalent:**

(i) f **diagonalisierbar**

(ii) V **besitzt eine Basis aus Eigenvektoren**

(iii) $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(f)$ **ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix**

<u>Beweis</u>: **Aquivalenz von** (i) **und** (ii) **siehe (IV.3.b).**
$(i) \Rightarrow (iii)$ **Basiswechsel liefert ähnliche Matrizen** $\Rightarrow \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ **ist ähnlich zu**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ **nach Voraussetzung** $\mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Jede reguläre Matrix ist Matrix eines Basiswechsels $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{A}$ **Basis aus Eigenwerten.** $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)\,\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$

$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$ **in** $\mathbf{T}^{-1}$ **sind die Spalten Eigenvektoren ausgedrückt in der Basis** $\mathfrak{B}$**.**

4.3.5 Charakteristische Polynom von Endomorphismen

Bisher: $\chi_A(\mathbf{T}) = \mathbf{det}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_n - A) \in \mathbf{K}[\mathbf{T}]$
Problem: Die Einträge von $\mathbf{TE_n} - A$ **sind nicht alle in** $\mathbf{K}[\mathbf{T}]$**, die Determinate ist bisher nur über Körper definiert.**
<u>**Zwei Begründungen**</u>**:**
(I) Entwicklung der Determinantentheorie über Ringen, hier $\mathbf{K}[\mathbf{T}]$**, aus der Leibniz'schen Determinantenformel** $\mathbf{det} A = \sum_\sigma \mathbf{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i\sigma(i)}$**, alle Standartsätze (bis auf Alternierende Multilinarform") gelten.**
(II) Suche Körper $\mathbb{L} \supseteq \mathbf{K}[\mathbf{T}]$**. Es gibt einen solchen Körper, und zwar einen kleinsten:**

$$\mathbb{L} = \mathbf{K}[\mathbf{T}] = \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \middle| f, g \in \mathbf{K}[\mathbf{T}], g \neq 0 \right\},$$

den "Körper der rationalen Funktionen".

(a) Gleichheit:
$$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \quad \Leftrightarrow \quad f \cdot g' - f' \cdot g = 0$$

(b) Addition:
$$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{f \cdot g' + f' \cdot g}{g \cdot g'}$$

(c) Multiplikation:
$$\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{f \cdot f'}{g \cdot g'}$$

(d) Inverse:
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{-1} = \frac{g}{f} \qquad f \neq 0$$

(e) Doppelbruch:
$$\frac{\frac{f}{g}}{\frac{f'}{g'}} = \frac{f}{g} \cdot \left(\frac{f'}{g'}\right)^{-1} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g'}{f'} = \frac{f \cdot g'}{g \cdot f'}$$

4.3.6 Satz (IV.3.2)

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charaktristische Polynom ($\chi_A(X)$ ist eine Invariante gegenüber Ähnlichkeiten)
Beweis: $B = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$. **Für das charakteristische Polynom von** B **gilt:**

$$\begin{aligned}\chi_B &= \mathbf{det}(X \cdot \mathbf{E} - B) = \mathbf{det}\left(X \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\mathbf{T} \cdot (X \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\mathbf{T} \cdot [X \cdot \mathbf{E} - A] \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{det}(\mathbf{T}) \cdot \chi_A(X) \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}\right) \\ &= \chi_A(X)\end{aligned}$$

da $\mathbf{det}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{det}\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{det}(\mathbf{E}) = 1$
Konsequenz: Spur und Determinante bleiben bei Ähnlichkeit unverändert, denn:

$$\chi_A(X) = X^n - \mathbf{Spur}(A) \cdot X^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n \cdot \mathbf{det}(A)$$

Bisher: A **ähnlich zu** B **(oft:** $A \approx B$**)** $\Rightarrow \chi_A = \chi_B$
Warnung: $\chi_A = \chi_B \not\Rightarrow A$ **ähnlich zu** B
Beispiel: Sei A **und** B **gegeben mit**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die charaktristischen Polynome gilt:

$$\chi_A(T) = \begin{vmatrix} T-1 & 0 \\ 0 & T-1 \end{vmatrix} = (T-1)^2, \quad \chi_B(T) = \begin{vmatrix} T-1 & 1 \\ 0 & T-1 \end{vmatrix} = (T-1)^2$$

Angenommen es existiert $\mathbf{T} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ **mit** $\mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = B$**, aber** $\mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot E \cdot \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow B = E$. **Aber** $B \neq E$

4.3.7 Definition (IV.3.c): Charakteristisches Polynom von f

Wähle Basis $\mathfrak{A}$ **von V, setze** $\chi_f(X) := \mathbf{det}\left(X \cdot E - \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\right) = \chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}(X)$
Wohldefiniertheit des charakterisitschen Polynoms von f **(Unabhängigkeit von der Wahl der Basis): Sei** $\mathfrak{B}$ **eine weitere Basis von V, dann gilt:** $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot \mathbf{T}^{-1}$ **für** $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$. **Also:**

$$\chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}(X) = \chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)}(X)$$

4.3.8 Satz (IV.3.3): Eigenwerte von Endomorphismen

Die Eigenwerte von f **sind genau die Nullstellen von** χ_f
Beweis: f **wird in der Basis** $\mathfrak{A}$ **durch** $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ **beschrieben:**

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot v_i, \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \left(\boxed{\alpha_{ij}} \right)$$

Allgemein gilt für Eigenwerte: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\exists v \neq 0$**:** $f(v) = \lambda \cdot v$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Das heißt: $f(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow A \cdot x = \lambda \cdot x$, $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. **Wir haben bereits gezeigt, daß die Behauptung für Matrizen korrekt ist, also auch für** f.

4.3.9 Beispiel für Eigenwerte eines Endomorphismus

Vergleiche auch Aufgabe 11 vom dritten Übungszettel der LinA II.
$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}$: **{Polynome über** $\mathbb{R}$, $\mathbf{grad}\,(f) \leq 4\} = \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. **Für** $f \neq 0$: $\frac{d}{dt}(f) = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = 0$, $f =$ **const. Damit folgt für den Eigenraum:** $\mathbf{Eig}\left(\frac{d}{dt}, 0\right) = \mathbb{R} \cdot 1$
Beschreibung durch Basis $\mathfrak{A} = \left(1, t, t^2, t^3, t^4\right)$

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für das charakteristische Polynom folgt:

$$\chi_{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} = X^5$$

Damit ist die einzige Nullstelle $x_0 = 0$ **einziger Eigenwert.**

4.3.10 Beschreibung der Eigenräume eines Endomorhpismus

Es gilt: $\mathbf{Eig}\,(f, \lambda) = \{v|\, f(v) = \lambda \cdot v\} = \mathbf{Kern}\,(f - \lambda \cdot \mathbf{id})$
Denn: $f(v) = \lambda \cdot v = (\lambda \cdot \mathbf{id})(v) \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda \cdot \mathbf{id})(v) = 0$
Aus der Dimensionsformel folgt: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{Eig}\,(f, \lambda)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) - \mathbf{rg}\,(f - \lambda \cdot \mathbf{id})$
Darstellung der Eigenräume mittels beschreibender Matrizen:
$\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ **sei Basis,** $A = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. **Nun gilt:**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f - \lambda \cdot \mathbf{id}) = \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) - \lambda \cdot \mathbf{E}$$

Damit folgt: $\mathbf{dim}\,(\mathbf{Eig}\,(f, \lambda)) = \mathbf{dim}\,(\mathbf{V}) - \mathbf{rg}\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}} - \lambda \cdot \mathbf{E}\right)$ **und weiter:**

$$\mathbf{Eig}\,(f, \lambda) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, (A - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \doteqdot \mathbf{Eig}\,(A, \lambda)$$

4.3.11 Weiter Charakterisierungen der Diagonalisierbarkeit

Zur Erinnerung an (**IV**.3.b), (**IV**.3.1): $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **heißt diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ **es existiert Basis** $\mathfrak{A}$ **mit**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

(i) $\mathfrak{A}$ **ist Basis von Eigenvektoren**

(ii) λ_i **sind Eigenwerte von** f**, da**

$$\chi_f(X) = \mathbf{det}\begin{pmatrix} X-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X-\lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$$

Zur Erinnerung an (II.4.6) - Direkte Summe zweier Untervektorräume:
Seien $\mathbf{U},\mathbf{V} < \mathbf{W}$**,** $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \{u+v \mid u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V}\}$**. Nach der Dimensionsformel (II.4.4):**

$$\mathbf{dim}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) + \mathbf{dim}(\mathbf{U}\cap\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{U}) + \mathbf{dim}(\mathbf{V})$$

Diese beiden Sätze sind beliebtes Material für eine mündliche Prüfung bei Hern Becker.
Zur Erinnerung: Definition der direkten Summe von zwei Unterräumen:
U+V heißt direkte Summe $\Leftrightarrow$ **jedes Element von U+V hat eine eindeutige Darstellung der Form** $u+v$ **wobei** $u \in \mathbf{U}$**,** $v \in \mathbf{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \phi$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{dim}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{U}) + \mathbf{dim}(\mathbf{V})$
Notation: $\mathbf{U}\oplus\mathbf{V}$**.**

4.3.12 Definition (IV.3.d): Direkte Summe von Unterräumen (Mehr als zwei)

Gegeben seien $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r < \mathbf{V}$**. Der Unterraum**

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{U}_r = \sum_{i=1}^{r}\mathbf{U}_i = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_r \mid u_i \in \mathbf{U}_i \ \textbf{für} \ i = 1,\ldots,r\}$$

heißt direkt, wenn jedes Element von $\sum_{i=1}^{r}\mathbf{U}_i$ **eine eindeutige Darstellung der Form** $\sum_{i=1}^{r} u_i$**,** $u_i \in \mathbf{U}_i$ **hat. Notation:** $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{U}_r$
Äquivalente Formulierungen:

(i) **Die Summe** $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{U}_r$ **ist direkt**

(ii) **Für alle** $i = 1,\ldots,r$ **gilt:** $\mathbf{U}_i \cap \left(\sum_{i\neq j}\mathbf{U}_j\right) = 0$

(iii) $\mathbf{dim}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{U}_r) = \sum_{i=1}^{r}\mathbf{dim}(\mathbf{U}_i)$

Für die Beweise siehe Aufgabe 14 vom vierten Übungszettel der LinA II.

4.3.13 Beispiel: Direkte Summen von Unterräumen im $\mathbb{R}^3$

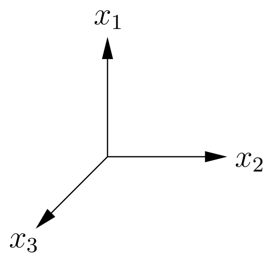

Abbildung IV-7: Der $\mathbb{R}^3$

Die Unterräume seien gegeben mit $\mathbf{U}_i = x_i$-Achse. Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Nun gilt:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = u_1 + u_2 + u_3$$

mit $u_i \in \mathbf{U}_i \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \mathbf{U}_3$

4.3.14 Satz (IV.3.4): Die Summe von Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten ist direkt

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_i) = \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_1) \oplus \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_2) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_r)$$

<u>Beweis</u>: Sei $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_i)$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden.

Zuerst zu zeigen: Eindeutigkeit der Darstellung.

Äquivalent zu zeigen: $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_r \quad \Rightarrow \quad v_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$.

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit der Darstellung

“$\Rightarrow$” Sei die Summe direkt, $v = \sum_{i=1}^{r} v_i = \sum_{i=1}^{r} 0 = 0$, $0 \in \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_i)$, alle $v_i = 0$

“$\Leftarrow$” Voraussetzung: Null nur trivial darstellbar. Sei $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r = v_1' + v_2' + \ldots + v_r'$ wobei $v_i, v_i' \in \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_i)$

$\Rightarrow \quad 0 = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') + \ldots + (v_r - v_r')$. Aber: $(v_i - v_i') \in \mathbf{Eig}\,(f, \lambda_i)$. Nach Voraussetzung folgt: $v_i - v_i' = 0 \Leftrightarrow v_i = v_i'$

Nachdem wir die Eindeutigkeit der Darstellung gezeigt haben, werden wir den Rest des Beweises mit zwei verschiedenen Argumenten führen:

<u>1. Beweis</u>:

Sei $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$, $f\,(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$. Zu zeigen $v_i = 0$. Anwendung von f liefert:

$$0 = f\,(v_1) + f\,(v_2) + \ldots + f\,(v_r) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r$$

Wenden wir nun f erneut an, so erhalten wir: $0 = \lambda_1^2 \cdot v_1 + \lambda_2^2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_r^2 \cdot v_r$

Haben wir nun f $(r-1)$-mal angewendet, so erhalten wir folgendes homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & \lambda_1^0 \cdot v_1 & + & \lambda_2^0 \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^0 \cdot v_r \\
0 & = & \lambda_1^1 \cdot v_1 & + & \lambda_2^1 \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^1 \cdot v_r \\
0 & = & \lambda_1^2 \cdot v_1 & + & \lambda_2^2 \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^2 \cdot v_r \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & = & \lambda_1^{r-1} \cdot v_1 & + & \lambda_2^{r-1} \cdot v_2 & + & \ldots & + & \lambda_r^{r-1} \cdot v_r
\end{array}$$

Dies erinnert uns an die Vandermondsche Matrix ($\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det(\mathbf{A})$):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i\le j\le r} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$\prod\limits_{1\le i\le j\le r} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ **genau dann, wenn alle λ_i paarweise verschieden sind.**

Allgemeines Schema zur Lösung für $r = 3$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &\overset{(i)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &\overset{(ii)}{=} (b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c+a-(b+a)) \\ &= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b) \end{aligned}$$

Anmerkungen:

(i) Entwicklung nach der ersten Zeile

(ii) Aufspaltung der Terme in der zweiten Spalte nach dritter Binomischer Formel und Herausziehen der Faktoren in jeder Zeile

Vergleiche Aufgabe 4 auf dem ersten Übungsblatt LinA II.
Formal erhalten wir nun:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \lambda_3^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Alle $v_i = 0$ (Für $\det(A) \neq 0$)**
2. Beweis: Per Induktion nach r.
Gegeben: $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, r$
Induktionsanfang: $r = 1$: trivial (jede Summe aus einem Unterraum ist immer direkt)
Induktionsschritt: $r - 1 \rightsquigarrow r$
Nach Voraussetzung: $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$, $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$
Wenden wir nun f an, so erhalten wir: $0 = v_1 \cdot \lambda_1 + v_2 \cdot \lambda_2 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r$
Multiplizieren wir nun die Voraussetzung mit λ_1 und subtrahieren von der folgenden, so ergibt sich:

$$0 = (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot v_2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\cdot v_3 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)\cdot v_r$$

Per Induktion folgt: alle $(\lambda_i - \lambda_1)\cdot v_i = 0$ für $i = 2, 3, \ldots, r$.
Da $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j \Rightarrow v_2 = v_3 = \ldots = v_r = 0 \Rightarrow v_1 = 0$

Dimension der Eigenräume

(i) $\mathbf{Eig}(f,\lambda) = \mathbf{Kern}(f-\lambda\cdot\mathbf{id})$, **denn** $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) - \mathbf{rg}(f-\lambda\cdot\mathbf{id})$

(ii) Zu beweisen: $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) \leq$ **Vielfachheit von** λ **als Nullstelle des charakteritischen Polynoms**

4.3.15 Definition (IV.3.e): Vielfachheit einer Nullstelle

Sei $g(T) \in \mathbf{K}(T)$ **mit** $g(\alpha) = 0$.
Nun spalten wir solange eine Nullstelle bis der Rest des Polynoms $h(T)$ **für** α **keine Nullstelle mehr hat:**

$$g(T) = (T-\alpha)^{r_\alpha} \cdot h(T)$$

r_α **wird nun als Vielfachheit oder Multiplizität von** α **bezeichnet.**

4.3.16 Definition (IV.3.f): f-invarianter Unterraum

Gegeben: $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **(Endomorphismus),** $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ **heißt** f**-invariant Unterraum, wenn gilt:**

$$f(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$$

4.3.17 Beispiele für f-invariante Unterräume

(a) $\{0\}$ **und V sind immer invariant (pathologische Fälle)**

(b) $\mathbb{K}\cdot v$ **ist** f**-invariant** $\quad\Leftrightarrow\quad$ v **ist ein Eigenvektor**

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$ **und** $f =$ **Drehung** 60^0 **im** $\mathbb{R}^2$. **In diesem Fall sind nur** $\{0\}$ **und** $\mathbb{R}^2$ **invariant.**

(d) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}^3$ **und** $f =$ **Drehung im** $\mathbb{R}^3$. **In diesem Fall sind nur** $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$ **und die Drehachse invariant.**

(e) $\mathbf{Eig}(f,\lambda)$ f**-invariant:** $v \in \mathbf{Eig}(f,\lambda) \quad\Rightarrow\quad f(v) = \lambda\cdot v \in \mathbf{Eig}(f,\lambda)$
(Denn: $f|_{\mathbf{Eig}(f,\lambda)} =$ **Multiplikationen mit** λ**)**

4.3.18 Lemma (IV.3.5)

Sei U ein f**-invarinater Unterraum**

$$\Rightarrow \quad \chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T)\cdot g(T)$$

Beweis: Sei $\mathbf{V} = \mathbf{U}\oplus\mathbf{U}'$ **und sei** $(u_1,\dots u_r, u_{r+1},\dots,u_n)$ **sei Basis von V, mit** $u_1,\dots,u_r \in \mathbf{U}$ **und** $u_{r+1},\dots,u_n \in \mathbf{U}'$.

Die Beschreibung von f **in dieser Basis hat Blockstruktur:** $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$

Anmerkungen:

$f(u_1) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{1i} \cdot u_i$ **(U ist f-invarianter Unterraum von V, jedoch über u_i für $i = r+1,\dots,n$ ist keine Aussage möglich)**

A **ist eine $r \times r$-Matrix und B ist eine $(n-r) \times (n-r)$-Matrix**

Damit erhalten wir nun folgendes charakteristische Polynom $\chi_f(T)$:

$$\begin{aligned}\chi_f(T) &= \mathbf{det}\left(\begin{array}{c|c} T\cdot\mathbf{E}_r - A & -B \\ \hline 0 & T\cdot\mathbf{E}_{n-r} - C\end{array}\right) \\ &= \mathbf{det}(T\cdot\mathbf{E}_r - A)\cdot\mathbf{det}(T\cdot\mathbf{E}_{r-n} - C)\end{aligned}$$

Weiter: $A = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}(f|_{\mathbf{U}})$ **mit Basis** $\mathfrak{A} = (u_1,\dots,u_r)$**. Es folgt die Behauptung:**

$$\chi_f(T) = \chi_{f|_U}(T)\cdot g(T) \quad \textbf{wobei} \quad g(\lambda) \neq 0$$

D.h.: $\chi_f(T) = (T-\lambda)^{r_\lambda}\cdot g(T)$ **wobei** $g(\lambda)\neq 0$ **und** λ **Eigenwert**

4.3.19 Definition (IV.3.g): Algebraische Vielfachheit, geometrische Vielfachheit

$\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) :=$ **geometrische Vielfachheit von λ,**
$r_\lambda :=$ **algebraische Vielfachheit**

4.3.20 Satz (IV.3.6): geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Es gilt: $\mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda)) \leq r_\lambda$
Beweis: $\mathbf{Eig}(f,\lambda)$ **ist f-invariant:**

$$f|_{\mathbf{Eig}(f,\lambda)} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist $r\times r$-Matrix, $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda))$**. Für das charakteristische Polynom gilt:**

$$\chi_{f|_{\mathbf{Eig}(f,\lambda)}} = (T-\lambda)^r \quad\Rightarrow\quad \chi_f(T) = (T-\lambda)^r\cdot\tilde{g}(T)$$

Es folgt die Behauptung: $r \leq r_\lambda$

4.3.21 Beispiel: geometrische Vielfachheit $\lneqq$ algebraischer Vielfachheit

Sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \chi_A(T) = (T-1)^2$$

$\Rightarrow\quad \lambda = 1$ **ist einziger Eigenwert. Rechnen wir nun den Eigenraum aus, so erhalten wir:**

$$\mathbf{Eig}(A,1) = \mathbf{Kern}(A-\mathbf{E}) = \mathbf{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \mathbb{K}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für dieses Beispiel: $r = 1 \lneqq r_\lambda = 2$

4.3.22 Hauptsatz (IV.3.7):

Gegeben sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ Endomorphismus (beziehungsweise $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$). Dann sind äquivalent:

(i) f **(beziehungsweise A) sind diagonalisierbar**

(ii) V ist direkt Summe der Eigenräume: $\mathbf{V} = \bigoplus_\lambda \mathbf{Eig}(f,\lambda)$ **(bzw.** $\mathbf{V} = \bigoplus_\lambda \mathbf{Eig}(A,\lambda)$**)**

(iii) Zwei Teile:

(1) χ_f **(beziehungsweise χ_A) zerfällt über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren**

(2) Für jeden Eigenwert stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*: **f diagonalisierbar $\Rightarrow$ es existiert eine Basis aus Eigenvektoren**

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}(f,\lambda_i) = \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Eig}(f,\lambda_i)$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: **Man erhält eine Basis der Form**

$$\dot{\bigcup_\lambda} \left\{ v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, \ldots, v_{\lambda_{n_\lambda}} \right\}$$

Stellen wir nun f in dieser Basis da, so erhalten wir:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{B_{\lambda_1}} & & & \\ & \boxed{B_{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_{\lambda_n}} \end{pmatrix} \quad \textbf{mit} \quad B_{\lambda_r} = \begin{pmatrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Damit folgt für das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$:

$$\chi_f(T) = \prod_\lambda (T-\lambda)^{r_\lambda} \qquad (*)$$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*:

Laut (a): $\chi_f(T) = \prod (T-\lambda)^{r_\lambda}$. **Laut** (b): $r_\lambda = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(f,\lambda))$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}\left(\bigoplus_\lambda \mathbf{Eig}(f,\lambda)\right) = \sum r_\lambda \overset{(*)}{=} \mathbf{grad}\left(\chi_f(T)\right) = \mathbf{dim}(\mathbf{V})$$

4.3.23 Bemerkungen

1.) $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **diagonalisierbar** $\overset{\textbf{Def.}}{\Leftrightarrow}$ f_A **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow A = \mathbf{M}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(f_A)$ **ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix:**

$$\mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textbf{für } T \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$$

Dabei:

> **T ist nicht eindeutig bestimmt, wohl aber die Eigenwerte** λ_i
>
> $\mathbf{T}^{-1}$ **hat als Spalten Eigenvektoren, weil** $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathbf{E}}^{\mathfrak{A}'}(\mathbf{id})$.

2.) Die zweite Bemerkung ist ein Korrolar:

4.3.24 Korrolar (IV.3.8)

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n$ **(beziehungsweise** $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$**). Hat** f **(beziehungsweise** A**)** n **verschiedene Eigenwerte in** $\mathbb{K}$**, so ist** f **(beziehungsweise** A**) diagonalisierbar.**
Beweis: Folgt aus (**IV**.3.6) **und** (**IV**.3.7)**: Alle** $r_\lambda = 1$**. Aus** (**IV**.3.6)**:** $\dim(\mathbf{Eig}(f, \lambda)) = r_\lambda$

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_n)$$

3.) Situation: $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathbf{K}[T]$
Behauptung: f **hat in** $\mathbb{C}$ **eine mehrfache komplexe Nullstelle** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{ggT}(f, f') \neq 1$
Anmerkung: In diesem Fall ist mit f' **tatsächlich die Ableitung gemeint.**
Für den Beweis wollen wir zwei Fälle unterscheiden:
Fall 1: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $f(T) = (T - \alpha)^r \cdot g(T)$ **mit** $g(\alpha) \neq 0$**. Für die Ableitung gilt:**

$$\begin{aligned} f'(T) &= r \cdot (T - \alpha)^{r-1} \cdot g(T) + (T - \alpha)^r \cdot g'(T) \\ &= (T - \alpha)^{r-1} \cdot \underbrace{[r \cdot g(T) + (T - \alpha) \cdot g(T)]}_{\doteqdot\, h(T)} \end{aligned}$$

mit $h(\alpha) \neq 0$**.** $\mathbf{ggT}(f, f') = (T - \alpha)^{r-1} \cdot p(T)$ **mit** $p(\alpha) \neq 0$**.**
Für $r > 1$**:** $\mathbf{ggT}(f, f') \neq 1$
Sind alle Nullstellen einfach - für $r = 1$**, das heißt** $\mathbf{ggT}(f, f') = 1$ **(Rückrichtung).**
Fall 2: Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$**:** $\mathbf{ggT}(f, f')$ **bleibt unverändert beim Übergang von** $\mathbb{K}$ **zu** $\mathbb{C}$
Wichtig: ggT-Berechnung ohne Kenntnis der Nullstellen

4.) Trigonalisierbarkeit - wird in Kapitel IV-§5 noch ausführlicher behandelt

4.3.25 Definition (IV.3.h): Trigonalisierbarkeit von f beziehungsweise A

f heißt trigonalisierbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis $\mathfrak{C}$ mit

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ heißt trigonalisierbar

$$\Leftrightarrow \quad A \textbf{ ist ähnlich zu } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.3.26 Satz (IV.3.9)

f (beziehungsweise A) trigonalisierbar $\Leftrightarrow \chi_f$ (beziehungsweise χ_A) zerfällt vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{K}$.
"$\Leftarrow$" $\chi_f(T) = \prod (T - \lambda_i)$ (Klar)
"$\Rightarrow$" Algorithmus: Wähle v_1 Eigenvektor zu λ_1: $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$. Nun beschreiben wir v_1 in der Standardbasis:

$$v_1 = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$$

OE: $\alpha_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad v_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ **ist Basis, wobei**

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right) \cdot e_i$$

Nun wollen wir A in der neuen Basis beschreiben:

$$\boxed{\mathbf{T}_0 \cdot A \cdot \mathbf{T}_0^{-1}} \doteqdot \tilde{A}$$

wobei

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \leftarrow \quad \dfrac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} \quad \rightarrow \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \alpha_{1j} \end{array} \right)$$

da für die j-ten Spalten von $\tilde{A}$ gilt:

$$A_{e_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot e_i = \alpha_{1j} \cdot e_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ij} \cdot e_i = \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \alpha_{1j} \right)$$

Wir erhalten:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots\cdots * \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & B \end{array} \right), \qquad \chi_B = \prod_{i=2}^{n} (T - \lambda_i)$$

Per Rekusion: $\mathbf{T}_1 \in \mathbf{GL}(n-1, \mathbb{K})$ mit

$$\mathbf{T} \cdot B \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1 \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots\cdots\cdots\cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1 \cdot B \cdot \mathbf{T}_1^{-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Damit gilt für T:

$$T := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{T}_1 \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \mathbf{T}_0, \qquad \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.3.27 Frobenius-Begleitmatrix

Bemerkung: $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad \chi_A(T)$ ist normiertes Polynom vom Grad n.
Frage: Tritt jedes derartige Polynom auf?
Wenn wir schon so fragen ist die Antwort wohl: Ja.
Gegeben $f(T) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot T + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot T^{n-1} + T^n$. Nun habe A_n die folgende Form:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Wird als Frobenius-Begleitmarix bezeichnet

Behauptung: $\chi_{A_n} = f$
Wir führen den Beweis per Induktion:
Sei $n = 2$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \chi_{A_2} &= \mathbf{det}(T \cdot \mathbf{E}_2 - A_2) = \begin{vmatrix} T & \alpha_0 \\ -1 & T + \alpha_1 \end{vmatrix} \\ &= T \cdot (T + \alpha_1) - (-1 \cdot \alpha_0) = T^2 + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0 \end{aligned}$$

Sei nun $n = 3$:

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \chi_{A_3} &= \mathbf{det}\,(T \cdot \mathbf{E}_3 - A_3) = \begin{vmatrix} T & 0 & \alpha_0 \\ -1 & T & \alpha_1 \\ 0 & -1 & T+\alpha_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nun entwicklen wir nach der ersten Zeile und erhalten:

$$\begin{aligned} \chi_{A_3} &= \begin{vmatrix} T & 0 & \alpha_0 \\ -1 & T & \alpha_1 \\ 0 & -1 & T+\alpha_2 \end{vmatrix} \\ &\overset{1.\ \textbf{Zeile}}{=} T \cdot \begin{vmatrix} T & \alpha_1 \\ -1 & T+\alpha_2 \end{vmatrix} + \alpha_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & T \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= T \cdot \left(T^2 + \alpha_2 \cdot T + \alpha_1\right) + \alpha_0 \\ &= T^3 + \alpha_2 \cdot T^2 + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0 \end{aligned}$$

Für $n \rightsquigarrow n+1$ gehen wir analog vor, indem wir die Determinante nach der ersten Zeile entwickeln.

4.4 Kapitel (IV.4): Minimalpolynom und Satz von Cayley-Hamilton

4.4.1 Einsetzen von Matrizen und Endomorphismen in Polynome

Es gilt: $f(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot T^i \quad \in \mathbb{K}[T]$

Auf Matrizenebene:

Einbettung: $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \hookleftarrow \mathbb{K},\ \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathbf{E}$

Verknüpfungen: $A + B,\ A \cdot B$

$f(A) = \alpha_0 \cdot A^0 + \alpha_1 \cdot A^1 + \ldots + \alpha_n \cdot A^n = \alpha_0 \cdot E + \alpha_1 \cdot A^1 + \ldots + \alpha_n \cdot A^n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

Auf Endomorphismenebene:

Einbettung: $\mathbf{End}(\mathbf{V}) \hookleftarrow \mathbb{K},\ \alpha \mapsto \alpha \cdot \mathbf{id_V}$

Verknüpfungen: $f + g,\ f \circ g$

$f(\varphi) = \alpha_0 \cdot \varphi^0 + \alpha_1 \cdot \varphi^1 + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi^n = \alpha_0 \cdot \mathbf{id_V} + \alpha_1 \cdot \varphi^1 + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi^n \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$

4.4.2 Beispiel für das Einsetzen von Matrizen in ein Polynom

Seien A gegeben mit:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \chi_A(T) = T^2 - (a+d) \cdot T + (ad - bc)$$

Setzen wir nun A in χ_A ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= A^2 - (a+d) \cdot A + (ad-bc) \cdot \mathbf{E} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ba + bd \\ ca + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ba - bd \\ ca + dc - ca - cd & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\textbf{Null im Ring}) \end{aligned}$$

4.4.3 Vorbereitungen für den Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton

Für Matrizen gelten folgende Rechenregeln:

(i) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$

(ii) $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$

(iii) $f(A)(x) = \left(\sum_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i \right)(x) = \sum_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i(x)$

Nahezu analog gelten folgende Rechenregeln für Endomorphismen:

(i) $(f+g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$

(ii) $(f \cdot g)(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$ **!Kommutativität!**

(iii) $f(\varphi)(x) = \left(\sum_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i\right)(\varphi) = \sum_{I=0}^{n} \alpha_i \cdot A^i(\varphi)$

4.4.4 Satz (IV.4.1): Satz von Cayley-Hamilton

Es gilt:

$$\chi_A(A) = 0, \qquad \chi_\varphi(\varphi) = 0$$

Beweis: Was ist zu zeigen?

Für $\chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i$ **gilt:** $\big(\chi_\varphi(\varphi)\big)(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$

Sei $\chi_\varphi = T^n + \alpha_{n-1} \cdot T^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0$**.**

Nun ist $\forall v \in \mathbf{V}$ **zu zeigen:**

$$\varphi^n(v) + \alpha_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}(v) + \ldots + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \alpha_0 \cdot \mathbf{id_V}(\mathbf{v}) = 0$$

Wir sprechen in diesem Fall auch von einer "universellen linearen Abhängigkeit der Vektoren $\mathbf{id_V}(v), \varphi(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v), \varphi^n(v)$**".**

Sei $v \in \mathbf{V}$ **gegeben.**

Betrachte $\mathbf{U} = \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v), \varphi^k(v)\rangle$**,** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = k+1 \leq n$**.**

Behauptung: k **ist das minimale** l **mit** $\varphi^{k+1}(v) \in \langle \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^l(v)\rangle$

Behauptung: U ist φ**-invariant:**

$$\varphi(\mathbf{U}) = \langle \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^k(v), \varphi^{k+1}(v)\rangle$$

da $\varphi^{k+1}(v) \in \mathbf{U}$**.**

Nach Lemma (IV.3.5) gilt:

$$\chi_\varphi(T) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(T) \cdot g(T) \quad \Rightarrow \quad \chi_\varphi(\varphi) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi) \circ g(\varphi) = g(\varphi) \circ \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi)$$

Anwendung auf v **liefert:**

$$\chi_\varphi(\varphi)(v) = g(\varphi)\left(\chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi)(v)\right)$$

Nun beschreiben wir $\varphi|_\mathbf{U}$ **in der Basis** $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^k(v)$ **von U (Insgesamt** $k+1$ **Vektoren):**

$$v \to \varphi(v), \varphi(v) \to \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \to \varphi^k(v), \varphi^k(v) \to \varphi^{k+1}(v) = \alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_k \cdot \varphi^k(v)$$

Damit ergibt sich für die beschreibende Matrix:

$$\mathbf{M}(\varphi|_\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & +\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & +\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & +\alpha_{k-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & +\alpha_k \end{pmatrix}$$

Dies sollte uns an die Frobenius-Begleitmatrix erinnern. Somit kennen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} &\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(T) = -\alpha_0 - \alpha_1 \cdot T - \ldots - \alpha_k \cdot T^k + T^{k+1} \\ \Rightarrow\quad &\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(\varphi) = -\alpha_0 \cdot \mathbf{id}_{\mathbf{V}} - \alpha_1 \cdot \varphi - \ldots - \alpha_k \cdot \varphi^k + \varphi^{k+1} \end{aligned}$$

Anwendung auf v liefert:

$$\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(\varphi)(v) = -\alpha_0 \cdot v - \alpha_1 \cdot \varphi(v) - \ldots - \alpha_k \cdot \varphi^k(v) + \varphi^{k+1}(v) = 0$$

Damit folgt: $\chi_\varphi(\varphi)(v) = g(\varphi)(0) = 0$

4.4.5 Definition (IV.4.a): Minimalpolynom: $\mathbf{m}_A(T)$, $\mathbf{m}_\varphi(T)$

$\mathbf{m}_A(T)$ beziehungsweise $\mathbf{m}_\varphi(T)$ heißen Minimalpolynom von A beziehungsweise φ, wenn $\mathbf{m}_A(T)$ beziehungsweise $\mathbf{m}_\varphi(T)$ ein normiertes Polynom vom kleinsten Grad ist, daß A beziehungsweise φ zur Nullstelle hat.

4.4.6 Satz (IV.4.2)

Das Minimalpolynom ist eindeutig bestimmt und teilt jedes Polynom, daß A beziehungsweise φ zur Nullstelle hat.

Für den Beweis: $\mathbf{m} := \mathbf{m}_A$

Sei f ein Polynom mit $f(A) = 0$ und sei $f = q\cdot\mathbf{m}+r$, wobei $r = 0$ oder grad $(r) \lneqq$ grad (m).

Anwendung auf A liefert:

$$\Rightarrow\quad \underbrace{f(A)}_{=0} = q(A) \cdot \underbrace{\mathbf{m}(A)}_{=0} + r(A) \quad\Rightarrow\quad r(A) = 0$$

Nach der Definition des Minimalpolynoms folgt: $r = 0$, **das heißt:** $\mathbf{m}| f$.

Es folgt auch weiter: Das Minimalpolynom ist eindeutig.

4.4.7 Satz (IV.4.3)

Das Minimalpolynom ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms und hat dieselben irreduziblen Faktoren wie letzteres.

Anmerkung: In $\mathbb{C}$: Eigenwerte sind genau die Nullstellen von $\mathbf{m}_\varphi$. Beweis siehe (4.4.14).

4.4.8 Beispiele für Minimalpolynom und charakeristisches Polynom

1.) Sei A gegeben mit

$$A = \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \chi_A(T) = (T-1)^n$$

$\mathbf{m}_A$ ist das normiertes Polynom kleinsten Grades mit $\mathbf{E}_n$ als Nullstelle.

Sei $f(T) = (T-1)$, $f(\mathbf{E}_n) = (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n) = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{m}_{\mathbf{E}_n} = (T-1)$

2.) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\alpha \neq \beta$, und sei A gegeben mit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad \chi_A(T) = (T-\alpha)\cdot(T-\beta)$

Nun gilt es drei Möglichkeiten für das minimale Polynom:

(i) $\mathbf{m}_A = (T-\alpha)$

(ii) $\mathbf{m}_A = (T-\beta)$

(iii) $\mathbf{m}_A = \chi_A$

Es gilt: Für $\mathbf{m}_A = (T-\alpha)$ **müßte folgen** $0 = A - \alpha \cdot \mathbf{E}$ **- dies ist falsch. Analog erhalten wir einen Widerspruch für** $\mathbf{m}_A = (T-\beta)$
$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_A = \chi_A$

3.) Sei A **gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(T) = (T-1)^2$

Nun gilt es zwei Möglichkeiten für das minimale Polynom:

(i) $\mathbf{m}_A = (T-1)$

(ii) $\mathbf{m}_A = \chi_A$

Da $\mathbf{m}_A = (T-1)$ **einen Widerspruch liefert (wie oben) folgt:** $\mathbf{m}_A = \chi_A$

4.) Sei A **gegeben mit**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für die Frobenius-Begleitmatrix ist das charakteristische Polynom bekannt:

$$\chi_A(T) = T^n + \alpha_{n-1} \cdot T^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot T + \alpha_0$$

grad $(\mathbf{m}) = n$. **Laut** $0 = A^k + \beta_{k-1} \cdot A^{k-1} + \ldots + A \cdot \beta_1 + \beta_0$, $k < n$ **folgt:**

$$e_1, A \cdot e_1 = e_2, A^2 \cdot e_1 = e_3, \ldots, A^k \cdot e_1 = e_{k+1}$$

Widerspruch, da wir lineare Abhängigkeit erhalten $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_A = \chi_A$

4.4.9 Vorbemerkungen zum Beweis von Satz (IV.4.3)

Zur Erinnerung: U < V, U ist φ**-invariant:** $\varphi(\mathbf{U}) < \mathbf{U}$ **(Auch:** $\Rightarrow \quad \chi_\varphi(T) = \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}(T) \cdot g(T)$**)**
Grund: Blockstruktur der Transformationsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

4.4.10 Lemma (**IV**.4.4)

Sei $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ und $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ seien φ-invariant. Dann gilt:

(i) $\mathbf{m}_\varphi(T) = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right)$

(ii) $\chi_\varphi(T) = \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}(T) \cdot \chi_{\varphi|_\mathbf{W}}(T)$

<u>Beweis von *(ii)*</u>: schon erledigt. Zur Erinnerung in Kurzform:
Wähle Basis $\mathfrak{A} = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ wobei $u_1, \ldots, u_r \in \mathbf{U}$ und $w_1, \ldots, w_s \in \mathbf{W}$. Die beschreibende Matrix hat Blockstruktur:

$$\mathbf{M}_\mathfrak{A}^\mathfrak{A}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ **Behauptung.**
<u>Beweis von *(i)*</u>:
Im ersten Schritt zu zeigen: kgV $\left(m_{\varphi|_\mathbf{U}}, m_{\varphi|_\mathbf{W}}\right) \big| f$
$f(\varphi)$ **bedeutet:**

$$f(T) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot T^i \quad \Rightarrow \quad f(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i$$

Zudem gilt: $f(\varphi)(v) = 0\ \forall v \in \mathbf{V}$.
Nun wählen wir $v = u \in \mathbf{U}$. Einsetzen von u liefert:

$$f(\varphi)(u) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i\right)(u) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi^i(u) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \left(\varphi|_\mathbf{U}\right)^i(u) = f\left(\varphi|_\mathbf{U}\right) = 0\ \forall u \in \mathbf{U}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \big| f$.
Analog erhalten wir für $v = w \in \mathbf{W}$: $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \big| f$
Damit folgt die Behauptung: kgV $\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right) \big| f$
Im zweiten Schritt bleibt zu zeigen: $g = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right) \quad \Rightarrow \quad g(\varphi) = 0$
Nach Voraussetzung:

$$g(T) = \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \cdot h(T) = h(T) \cdot m_{\varphi|_\mathbf{U}}(T)$$

Wenden wir nun g auf den Endomorphismus φ an, so folgt:

$$g(\varphi) = h(\varphi) \circ \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi)$$

Setzen wir nun $u \in \mathbf{U}$ ein, so erhalten wir:

$$g(\varphi)(u) = h(\varphi)\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}(\varphi)(u)\right) = h(\varphi)\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}\left(\varphi|_\mathbf{U}\right)(u)\right) = h(\varphi)(0) = 0$$

Bisher: $g(\varphi)(u) = 0$ **für** $u \in \mathbf{U}$
Analog zu zeigen: $g(\varphi)(w) = 0$ **für** $w \in \mathbf{W}$
Damit folgt aus dem ersten und zweiten Schritt: $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right)$
$\Rightarrow \quad g(\varphi)(u + w) = 0\ \forall u \in \mathbf{U}, \forall w \in \mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad g(\varphi) = 0$, **da** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$

4.4.11 Beispiel, Anwendungen

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ und sei A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \doteq \left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \quad 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \end{array}\right)$$

Es folgt: $A \cdot e_1 = 2 \cdot e_1 \quad \Rightarrow \quad$ **$\mathbf{U} = \langle e_1 \rangle$ ist A-invariant ($\mathbf{U}$ ist in diesem Fall die x_1-Achse)**
Zudem gilt:

$$A \cdot e_2 = 3 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3, \quad A \cdot e_3 = 4 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3$$

$\Rightarrow \quad$ **$\mathbf{W} = \langle e_2, e_3 \rangle$ ist A-invarinat ($\mathbf{W}$ ist in diesem Fall die (x_2, x_3)-Ebene)**

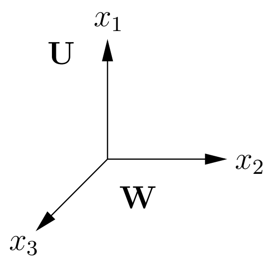

Abbildung IV-8: **U** und **W** im $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \quad$ **$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ ist A-invariante direkte Zerlegung. Für das charaktristische Polynom von A gilt:**

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= (T-2) \cdot \chi_B(T) \\ &= (T-2) \cdot \left(T^2 - 9T - 2\right) \\ &= (T-2) \cdot \left(T - \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{89}{4}}\right) \cdot \left(T - \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{89}{4}}\right) \end{aligned}$$

Nun wollen wir das Minimalpolynom von A bestimmen. Es gilt:

$$m_A(T) = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{A_0}(T), \mathbf{m}_B(T)\right)$$

Für A_0 gilt:

$$A_0 = (2) = 2 \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{A_0}(T) = (T-2)$$

Nun müssen wir noch $\mathbf{m}_B(T)$ bestimmen. Hierzu zwei Versuche:

(1) (schlechter) Versuch: Angenommen:

$\mathbf{grad}\left(\mathbf{m}_B(T)\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad B - \alpha \cdot \mathbf{E} = 0$ **(offensichtlich falsch)**
$\mathbf{grad}\left(\mathbf{m}_B(T)\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_B(T) = T^2 + \alpha \cdot T + \beta \quad \Rightarrow \quad B^2 + \alpha \cdot B + \beta \cdot \mathbf{E} = 0$
Wir erhalten ein Gleichungssystem für α und β, daß wir mühsam ausrechnen müssen.

(2) (fundierter) Versuch: Wir wissen: $\mathbf{m}_B(T) | \chi_B(T) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_B(T) = (T - \alpha)$ oder $\mathbf{m}_B(T) = \chi_B(T)$
Also: $\mathbf{m}_A = \mathbf{kgV}\left(T-2, \chi_B\right) = (T-2) \cdot \chi_B$ (da in diesem Fall $(T-2)$ und χ_B keine gemeinsamen Nullstellen haben)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \chi_A(T) &= (T-2) \cdot \left(T^2 - 9T - 2\right) \\ &= T^3 - 9T^2 - 2T^2 + 18T - 2T + 4 \\ &= T^3 - 11T^2 + 16T + 4 \end{aligned}$$

Nun wollen wir die A-Iteraten von $v = (1, 1, 0)$ betrachten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
A \cdot v &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (2, 3, 5) \\
A^2 \cdot v &= A \cdot (A \cdot v) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= (4, 29, 45)
\end{aligned}$$

Behauptung: $\left(v, A \cdot v, A^2 \cdot v\right)$ **ist Basis des** $\mathbb{R}^3$
Als Beweis rechnen wir den Rang der folgenden Matrix aus:

$$\mathbf{rg}\left(v, A \cdot v, A^2 \cdot v\right) = \mathbf{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 29 \\ 0 & 5 & 35 \end{pmatrix} = 3$$

Beschreibung von A in dieser Basis:
Für die ersten beiden Spalten gilt: $A(v) = (0, 1, 0)$ **und** $A(A \cdot v) = (0, 0, 1)$. **Damit erhalten wir:**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ? \\ 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir noch die dritte Spalte berechnen. Hierzu müsen wir die folgende Gleichung lösen:

$$A\left(A^2 \cdot v\right) = \alpha \cdot v + \beta \cdot A \cdot v + \gamma \cdot A^2 \cdot v$$

Hierzu können wir zwei Methoden anwenden:

(1) Methode: Wir lösen das lineare Gleichungssystem für α, β, γ.

(2) Methode: Verwendung von m_A oder χ_A und Cayley-Hamilton:

$$A^3 - 11A^2 + 16A + 4\mathbf{E} = 0$$

Setzen wir nun v ein, so erhalten

$$A^3 \cdot v - 11A^2 \cdot v + 16A \cdot v + 4\mathbf{E} \cdot v = 0$$

Nun lösen wir nach $A \cdot \left(A^2 \cdot v\right) = A^3 \cdot v$ auf und erhalten ein Darstellung von $A^3 \cdot v$ in der Basis von $\mathfrak{A}$:

$$A^3 \cdot v = 11A^2 \cdot v - 16A \cdot v - 4\mathbf{E} \cdot v$$

Damit erhalten wir unsere endgültige Transformationsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot A \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Dies ist die Frobenius-Begleitmatrix von χ_A

4.4.12 Lemma (IV.4.5)

Sei $\mathbf{m}_\varphi = p^k$, p irreduzibel $\Rightarrow$ $\chi_\varphi = p^l$ mir $k \leq l$

<u>Beweis</u>:

Angenommen χ_φ ist keine Potenz von p, etwa $\chi = p^l \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}$ wobei p_i irreduzibel und $l_i \geq 1$, $r \geq 2$.

Also: $\chi_\varphi = p^l \cdot g$ mit $\mathbf{ggT}\left(p^l, g\right) = 1$ für $g \neq 1$ (g ist keine Konstante)

Dann folgt nach Lemma (IV.4.6): $\mathbf{V} = \underbrace{\mathbf{Kern}\left(p^l(\varphi)\right)}_{\doteqdot \mathbf{U}} \oplus \underbrace{\mathbf{Kern}\left(g(\varphi)\right)}_{\doteqdot \mathbf{W}}$

Die Summanden sind φ-invariant $\Rightarrow$ $\mathbf{m} = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right)$

Auf U: $p^l(\varphi) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} \big| p^l$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} = p^{r'}$ mit $r' \leq r$

Auf W: $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}} \big| g = \left(p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}\right)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} = p_2^{l_2'} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r'}$ mit $l_i' \leq l_i$

Angenommen: alle $l_i' = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} = 1$ $\Rightarrow$ $\mathbf{W} = \{0\}$

Dies ist Widerspruch zu $\chi_\varphi = p^l \cdot g$ für $g \neq 1$.

Somit: Wenigstens ein $l_i \neq 0$ $\Rightarrow$ $m_\varphi = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}}, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{W}}\right) \neq p$-Potenz

---

4.4.13 Lemma (IV.4.6): Zerlegungslemma

Sei $f(\varphi) = 0$, $f = g \cdot h$, $\mathbf{ggT}(g, h) = 1$ (g und h haben eine Teilerfremde Zerlegung). Dann folgt:

(i) $\mathbf{Kern}(g(\varphi))$ und $\mathbf{Kern}(h(\varphi))$ sind φ-invariante Unterräume

(ii) $\mathbf{V} = \underbrace{\mathbf{Kern}(g(\varphi))}_{\doteqdot \mathbf{U}} \oplus \underbrace{\mathbf{Kern}(h(\varphi))}_{\doteqdot \mathbf{W}}$

<u>Beweis</u>:

Zu (i): $g(\varphi)$ ist Endomorphismus, also $\mathbf{Kern}(g(\varphi)) < \mathbf{V}$.

Bleibt zu zeigen: Invarianz: $\varphi(\mathbf{Kern}(g(\varphi))) \subseteq \mathbf{Kern}(g(\varphi))$

Sei $g(\varphi)(v) = 0$. Zu zeigen: $g(\varphi)(\varphi(v)) = 0$

Sei $g = \sum\limits_i a_i \cdot T^i$ $\Rightarrow$ $g(\varphi) = \sum\limits_i a_i \cdot \varphi^i$

$h(T) = T$ liefert: $h(\varphi) = \varphi$.

Das heißt: Wir haben $(g(\varphi) \circ h(\varphi))(v) = 0$ zu zeigen.

Für Endomorphismen gilt: $g(\varphi) \circ h(\varphi) = (g \cdot h)(\varphi) = (h \cdot g)(\varphi) = h(\varphi) \circ g(\varphi)$

Damit: $g(\varphi)(\varphi(v)) = g(\varphi)(h(\varphi)(v)) = h(\varphi)(g(\varphi)(v)) = \varphi(g(\varphi)(v)) = \varphi(0) = 0$

Zu (ii): Aus $\mathbf{ggT}(g, h) = 1$ folgt nach dem erweiterten Euklidischen Algorithmus:

$$1 = g_1 \cdot g + h_1 \cdot h \quad \Rightarrow \quad \mathbf{id} = g_1(\varphi) \circ g(\varphi) + h_1(\varphi) \circ h(\varphi)$$

Wir wollen zwei Dinge zeigen:

(1) $\mathbf{Kern}(g(\varphi)) \cap \mathbf{Kern}(h(\varphi)) = 0$

(2) $\mathbf{V} = \mathbf{Kern}(g(\varphi)) + \mathbf{Kern}(h(\varphi))$

Zu (1)**: Sei** $v \in \mathbf{Kern}\,(g\,(\varphi)) \cap \mathbf{Kern}\,(h\,(\varphi))$**.**
Nach $\mathbf{id} = g_1\,(\varphi) \circ g\,(\varphi) + h_1\,(\varphi) \circ h\,(\varphi)$ **folgt:**

$$v = \mathbf{id}\,(v) = g_1\,(\varphi)\,\underbrace{(g\,(\varphi)\,(v))}_{=0} + h_1\,(\varphi)\,\underbrace{(h\,(\varphi)\,(v))}_{=0} = g_1\,(\varphi)\,(0) + h_1\,(\varphi)\,(0) = 0$$

Zu (2)**: Gegeben** $v \in \mathbf{V}$**. Dann gilt:**

$$\mathbf{id} = g_1\,(\varphi) \circ g\,(\varphi) + h_1\,(\varphi) \circ h\,(\varphi) = g\,(\varphi) \circ g_1\,(\varphi) + h\,(\varphi) \circ h_1\,(\varphi)$$

Es folgt:

$$v = \underbrace{g\,(\varphi)\,(g_1\,(\varphi)\,(v))}_{\in \mathbf{Kern}\,(h\,(\varphi))} + \underbrace{h\,(\varphi)\,(h_1\,(\varphi)\,(v))}_{\in \mathbf{Kern}\,(g\,(\varphi))}$$

Nun setzen wir zur Vereinfachung $x := g_1\,(\varphi)\,(v)$ **und wenden** h **an. Wir erhalten:**

$$h\,(\varphi)\,(g\,(\varphi)\,(x)) = [h\,(\varphi) \circ g\,(\varphi)]\,(x) = [(h \cdot g)\,(\varphi)]\,(x) = f\,(\varphi)\,(x) \overset{(*)}{=} 0$$

Anmerkung: $(*)$ **Nach Voraussetzung:** $f\,(\varphi)\,(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g\,(\varphi)\,(g_1\,(\varphi)\,(v)) \in \mathbf{Kern}\,(h\,(\varphi))$
Analog erhalten wir: $h\,(\varphi)\,(h_1\,(\varphi)\,(v)) \in \mathbf{Kern}\,(g\,(\varphi))$
Wichtig: $g\,(\varphi|_{\mathbf{U}}) = 0$**,** $h\,(\varphi|_{\mathbf{W}}) = 0$

4.4.14 Beweis von Satz (IV.4.3)

Wie nicht anders zu erwarten folgt der Beweis aus den Lemmata (IV.4.4), **(IV.**4.5), **(IV.**4.6)**.**
Sei $\mathbf{m}_\varphi = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ **die Zerlegung in irreduzible Faktoren.**
Da $\mathbf{m}_\varphi\,(\varphi) = 0$**,** $\mathbf{m}_\varphi = p_1^{r_1} \cdot \underbrace{p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}}_{\doteqdot h}$ **ist, folgt:**

$$\mathbf{V} = \mathbf{Kern}\,(p_1^{r_1}\,(\varphi)) \oplus \mathbf{Kern}\,(h\,(\varphi)) =: \mathbf{U} + \mathbf{W}$$

$p_1^{r_1}\,(\varphi|_{\mathbf{U}}) = 0$**,** $h\,(\varphi|_{\mathbf{W}}) = 0$**,** φ**-invariante Zerlegung.**
Weitere Anwendung von Lemma (IV.4.6) **liefert eine** φ**-invariante Zerlegung von V:**

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{Kern}\,(p_i^{r_i}\,(\varphi))}_{\doteqdot \mathbf{U}_i}\,, \quad p_i^{r_i}\,\left(\varphi|_{\mathbf{U}_i}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = p_i^{s_i}$**,** $s_i \leq r_i$ **(sogar** $s_i = r_i$**). Aus (IV.**4.5) **folgt** $(r_i \leq t_i)$**:**

$$\chi_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = p_i^{t_i} \overset{(\mathbf{IV}.4.4)}{\Rightarrow} \chi_\varphi = \prod \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{t_i} \qquad \textbf{bei } \mathbf{m}_\varphi = \prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i}$$

Damit

$$\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{l} p_i^{r_i} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{l} p_i \,\Big|\, \mathbf{m}_\varphi \quad \textbf{und} \quad \prod_{i=1}^{l} p_i \,\Big|\, \chi_\varphi$$

4.4.15 Vorbemerkungen zum Beweis von Satz (IV.4.7)

m ist Produkt verschiedener Linearfaktoren $\Leftrightarrow$ φ (beziehungsweise A) diagonalisierbar.

Beweis:

"$\Rightarrow$" $\mathbf{m} = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$. Nach dem vorigen Lemma folgt:

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Kern}\,(\varphi - \lambda_i \cdot \mathbf{id}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda_i)$$

Also ist φ diagonalisierbar.

"$\Leftarrow$" φ ist diagonalisierbar. Es folgt:

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda_i)\,, \qquad \varphi\,(\mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda)) \subseteq \mathbf{Eig}\,(\varphi, \lambda)$$

Nach den obigen Lemmata folgt:

$$\mathbf{m} = \mathbf{kgV}\left(\ldots, m_{\varphi|_{\mathbf{Eig}(\ldots,\ldots)}}, \ldots\right) : \varphi|_{\mathbf{Eig}(\ldots,\ldots)} : \varphi\,(v) = \lambda \cdot v \quad \Rightarrow \quad \varphi|_{\mathbf{Eig}(\ldots,\ldots)} = T - \lambda$$

Also: $m = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$

4.4.16 Beispiel zu Satz (IV.4.7)

Bestimme alle $A \in \mathbf{M}_2\,(\mathbb{R})$ mit $A^3 = \mathbf{E}$.

Wir wissen: $A^3 = \mathbf{E}$ $\Rightarrow$ A ist Nullstelle von $T^3 - 1$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m}| T^3 - 1$. Außerdem wissen wir: $\mathbf{grad}\,(\mathbf{m}) \leq 2$.

Wir können $T^3 - 1$ weiter zerlegen:

$$T^3 - 1 = (T - 1) \cdot \left(T^2 + T + 1\right)$$

wobei $\left(T^2 + T + 1\right)$ irreduzibel über $\mathbb{R}$. Damit bestehen zwei Möglichkeiten für das Minimalpolynom:

(i) $\mathbf{m} = T - 1$ **(das heißt: $A = \mathbf{E}$)**

(ii) $\mathbf{m} = T^2 + T + 1$

Bemerkung: $m = T^2 + T + 1 \quad \Rightarrow \quad A^3 = \mathbf{E}$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{m} = T^k + \alpha_1 \cdot T^{k-1} + \ldots + \alpha_k \quad \Rightarrow \quad A^k + \alpha_1 \cdot A^{k-1} + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \forall v : A^k \cdot v = -\alpha_k \cdot v - \alpha_{k-1} \cdot A \cdot v - \ldots - \alpha_1 \cdot A^{k-1} \cdot v \end{aligned}$$

Hier in diesem Fall: $A^2 \cdot v + A \cdot v + \mathbf{E} \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

Angenommen wir hätten v mit $(v, A \cdot v)$ Basis von $\mathbb{R}^2$. In dieser Basis:

$$f_A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Frobenius} \\ \textbf{Begleitmatrix} \end{array} \right.$$

Unter dieser Annahme gilt:

$$\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(2, \mathbb{R})$$

Können wir solche v finden? Ja, jedes v ungleich Null paßt.
Sonst bei $v \neq 0$: $A \cdot v = \lambda \cdot v \quad \Rightarrow \quad T - \lambda | \chi_A \quad \Rightarrow \quad T - \lambda |$ m. Dies ist ein Widerspruch, da m keine reelle Nullstelle hat.
Daher: $A^3 = \mathbf{E}$, wobei $A \neq \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(2, \mathbb{R}): \quad \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Umkehrung?
Sei $\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =: A_0 \quad \Rightarrow \quad A = \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S}$. Damit folgt für A^3:

$$A^3 = \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0^3 \cdot \mathbf{S}$$

Es ist $(A_0)^3 = \mathbf{E}_2 \quad (\Leftarrow \chi_{A_0} = T^2 + T + 1) \quad \Rightarrow \quad A^3 = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E}_2$
Damit:

$$\left\{ A \in \mathbf{M}_2\,(\mathbb{R}) | \, A^3 = \mathbf{E}_2, A \neq \mathbf{E}_2 \right\} = \left\{ \mathbf{S}^{-1} \cdot A_0 \cdot \mathbf{S} \middle| \, \mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(2, \mathbb{R}) \right\}$$

4.5 Kapitel (IV.5): Elementarteilersatz und Jordansche Normalenform

4.5.1 Ziel dieses Abschnittes

“Einfache” $A := \mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi)$ oder ähnlicher Matrizen $\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}$ herzustellen.

4.5.2 Vorbemerkungen:

1. Fall: $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline 0 & E \end{array}\right) \leftrightarrow \varphi -$ **invarinater Unterraum**

$\varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} \cdot v_i$ **und** $\varphi(\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle) \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle$

2. Fall: $\mathrm{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ **wobei** $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle$ **Basis von** C **und** $\langle v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\rangle$ **Basis von** D **bilden. Dann gilt für V:** $\mathbf{V} = \underbrace{\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle}_{\varphi - \textbf{invariant}} \oplus \underbrace{\langle v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\rangle}_{\varphi - \textbf{invariant}}$

Daher notwendige Untersuchung von φ-invarianten Unterräumen:
Sei U φ-invariant, das heißt: $\varphi(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$ **und sei** $v \in \mathbf{U}$.
Dann: $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^k(v), \ldots \in \mathbf{U}$

4.5.3 Definition (IV.5.a): φ-zyklischer Unterraum: $\langle v\rangle_\varphi$

Wir definieren: $\langle v\rangle_\varphi := \left\langle \left\{ \varphi^k(v) \middle| \, k \in \mathbb{N}_0 \right\} \right\rangle$ **erzeugt von v, als den kleinster φ-invarianten Unterraum, der v enthält.**

4.5.4 Beispiel für φ-zyklischen Unterraum

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ **und A gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **sowie** $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung von $\langle v\rangle_A$: Es gilt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0,0) = v \quad \Rightarrow \quad A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot v = v$$

Per Induktion folgt: $A^n \cdot v = v$. **Damit:** $\langle v\rangle_A = \mathbb{R} \cdot v$.
Bestimmung von $\langle w\rangle_A$: Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot w &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,1,2) \\ \Rightarrow \quad A^2 \cdot w &= A \cdot (A \cdot w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0,4,4) \end{aligned}$$

Sind nun $w, A \cdot w, A^2 \cdot w$ linear abhängig? Ja, denn

$$A^2 \cdot w = (4,4,0) = 4A \cdot w - 4w$$

Damit können wir nun jedes weitere A^k ausrechnen:

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot \left(A^2 \cdot w\right) = A \cdot (4A \cdot w - 4 \cdot w) = 4A^2 \cdot w - 4A \cdot w \\ &= 4 \cdot (4A \cdot w - 4w) - 4A \cdot w = 16A \cdot w - 4A \cdot w - 16w = 12A \cdot w - 16w \end{aligned}$$

Per Induktion: $A^k \cdot w = \alpha_k \cdot A \cdot w + \beta_k \cdot w \quad \Rightarrow \quad \langle w \rangle_A = \langle w, A \cdot w \rangle$ **(2 dimensionaler Raum)**
Bestimmung von $\langle z \rangle_A$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1,2) \\ \Rightarrow \quad A^2 \cdot w &= A \cdot (A \cdot w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,4,4) \end{aligned}$$

Sind nun $\left(z, A \cdot z, A^2 \cdot z\right)$ linear abhängig?
Hierzu betrachten wir die Determinante der Matrix mit $\left(z, A \cdot z, A^2 \cdot z\right)$ als Spaltenvektoren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(z, A \cdot z, A^2 \cdot z\right) \ \textbf{regulär} \quad \Rightarrow \quad \langle z \rangle_A = \mathbb{R}^3$$

4.5.5 Obere Abschätzung für dim $\left(\langle v \rangle_\varphi\right)$

Sei $\mathbf{m}_T = T^k + \alpha_1 \cdot T^{k-1} + \ldots + \alpha_k \quad \Rightarrow \quad \varphi^k(v) = -\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k-1} \cdot \varphi^i(v)$.

In diesem Fall: $\langle v \rangle_\varphi = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \right\rangle \quad \Rightarrow \quad$ **dim** $\left(\langle \mathbf{v} \rangle_\varphi\right) \leq$ **grad** $(\mathbf{m}_\varphi)$

4.5.6 Definition (IV.5.b): $\mathbf{m}_{\varphi,v}(T)$

$\mathbf{m}_{\varphi,v}(T)$ ist das normierte Polynom kleinsten Grades mit $[\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)](v) = 0$

4.5.7 Beispiele zu $\mathbf{m}_{\varphi,v}(T)$

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ und A gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **sowie** $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Bestimmung von $\mathbf{m}_{A,v}$: $\mathbf{m}_{A,v} | (T-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{A,v} = (T-1)$
Bestimmung von $\mathbf{m}_{A,w}$: Wir wissen aus (4.5.4):

$$A^2 \cdot w - 4A \cdot w + 4w = \left[\left(T^2 - 4T + 4\right)(A)\right](w) = \left[(T-2)^2(A)\right](w) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{A,w} = (T-2)^2$$

Bestimmung von $\mathbf{m}_{A,z}$: Bisher aus Berechnung von $\mathbf{m}_{A,v}$ und $\mathbf{m}_{A,w}$

$$\mathbf{m}_{A,v} | (T-1) \quad \textbf{und} \quad \mathbf{m}_{A,w} | (T-2)^2$$

Damit: $\mathbf{m}_A = (T-1) \cdot (T-2)^2$ (normiertes Polynom, Grad 3)
$\Rightarrow \quad \chi_A = (T-1) \cdot (T-2)^2$. **Da $\langle z \rangle_A = \mathbb{R}^3$ folgt:**

$$\mathbf{m}_{A,z} = \mathbf{m}_A$$

4.5.8 Satz (**IV**.5.1)

Sei g ein Polynom mit $g(\varphi) = 0$.

(i) $[\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)](v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | g$

(ii) $\mathbf{m}_{\varphi,v}$ **ist eindeutig und** $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \mathbf{m}_{\varphi}$

Beweis zu (i): **Division mit Rest - analog zum Beweis für das Minimalpolynom** (**IV**.4.2)**:**
Es gilt: $g = q \cdot \mathbf{m}_{\varphi,v} + r$, **wobei** $r = 0$ **oder grad** $(r) <$ **grad** $(\mathbf{m}_{\varphi,v})$. **Nach Einsetzen eines Endomorphismus** φ **folgt:**

$$g(\varphi) = q(\varphi) \circ \mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi) + r(\varphi)$$

Anwendung auf v **liefert:**

$$\underbrace{g(\varphi)(v)}_{(*)} = q(\varphi) \underbrace{(\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)(v))}_{(\#)} + r(\varphi)(v) \quad \Rightarrow \quad r(\varphi)(v) = 0$$

Zu $(*)$: $= 0$ **nach Vorraussetzung.**
Zu $(\#)$: $= 0$ **nach Definition.**
Beweis zu (ii): **Angenommen es gäbe zwei Polynome. Diese müßten sich gegenseitig teilen. Da sie aber laut Voraussetzung normiert sind können sie nur identisch sein.**

4.5.9 Satz (**IV**.5.2)

Sei grad $(\mathbf{m}_{\varphi,v}) = k$. **Dann gilt**

(i) dim $\left(\langle v\rangle_{\varphi}\right) = k$

(ii) $\langle v\rangle_{\varphi} = \left\langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{k-1}(v)\right\rangle$ **(Bilden Basis)**

(iii) $\mathbf{U} := \langle v\rangle_{\varphi}$, $\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}}} = \chi_{\varphi|_{\mathbf{U}}}$

<u>**Beweis zu** (i), (ii)</u>: **Wir wissen:**

$$\mathbf{m}_{\varphi,v} = T^k + \alpha_1 \cdot T^{k-1} + \ldots + \alpha_k \quad \Rightarrow \quad \varphi^k + \alpha_1 \cdot \varphi^{k-1} + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{id_V} = 0$$

Anwendung auf v **liefert:** $\varphi^k(v) = \sum_{i=0}^{k-1} (-\alpha_{k-i}) \cdot \varphi^i(v) \in \left\langle v, \varphi(v) \dots, \varphi^{k-1}(v)\right\rangle =: \mathbf{U}_0$

<u>**Behauptung**</u>: $\langle v\rangle_{\varphi} = \mathbf{U}_0$
Beweis: Zu zeigen: alle $\varphi^l(v) \in \mathbf{U}_0$.
Wir haben oben bereits gesehen, daß dies für $l = 0, 1, \dots, k-1, k$ **richtig ist.**
Für $l = k+1$ **werden wir einen Induktionsbeweis führen:**
Sei $\varphi^l(v) = \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i \cdot \varphi^i(v)$, **dann:**

$$\begin{aligned}
\varphi^{l+1}(v) &= \varphi\left(\varphi^l(v)\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=0}^{l-2} \beta_i \cdot \varphi^i(v) + \beta_{l-1} \cdot \varphi^{l-1}(v)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i \cdot \varphi^i(v) + \beta_{l-1} \cdot \varphi^l(v) \in \left\langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{l-1}(v)\right\rangle \quad \textbf{nach Voraussetzungen}
\end{aligned}$$

Bisher: $\mathbf{U} = \langle v \rangle_\varphi = \left\langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbf{U}) \leq k$
Angenommen: $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = l \lneqq k$
Behauptung: $\mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle$
Beweis: $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v), \varphi^l$ **sind linear abhängig, da** $l+1$ **Vektoren. Also existiert eine nicht triviale Relation:**

$$\alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_l \cdot \varphi^l(v) = 0$$

Angenommen $\alpha_l \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^l(v) \in \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle$
$\Rightarrow \quad \mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{l-1}(v) \right\rangle$
Angenommen $\alpha_l = 0$**: Seien** $\alpha_m \neq 0$ **und** $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_l = 0$
$\Rightarrow \quad \varphi^m \in \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \left\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) \right\rangle$ **wobei** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) \leq m \lneqq l$**. Es gibt also eine triviale Darstellung der Form**

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_l \cdot \varphi^l(v) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \left[\left(\alpha_0 \cdot v + \alpha_1 \cdot \varphi(v) + \ldots + \alpha_l \cdot \varphi^l(v) \right)(\varphi) \right](v) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | \, \alpha_0 + \alpha_1 \cdot T + \ldots + \alpha_l \cdot T^l \quad \Rightarrow \quad l \geq k$ **- wir erhalten einen Widerspruch.**
$\Rightarrow$ **Daher:** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = k$
__Beweis zu (*iii*)__**: bereits gezeigt:** $\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{grad}\left(\chi_{\varphi|_\mathbf{U}} \right) = k$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | \, \mathbf{m}_{\varphi|_\mathbf{U}} | \, \chi_{\varphi|_\mathbf{U}}$$

Zudem stimmen die Grade der beiden äußeren Polynome, die überdies normiert sind, überein. Nach der Gradformel folgt die Behauptung.

4.5.10 Satz (IV.5.3): Maximum in φ-zyklischen Unterräumen

Es gibt $v \in \mathbf{V}$ **mit** $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$**. Folglich:** $\mathbf{grad}(\mathbf{m}_\varphi) =$ **Maximum aller Dimensionen** φ**-zyklischer Unterräume.**
Beweis: Zuerst betrachten wir einen Spezialfall und führen diesen dann auf den allgemeinen Fall zurück:
1.) Spezialfall: $\mathbf{m} = p^k$**, wobei** p **irreduzibles Polynom und** $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} = p^l$ **mit** $l \leq k$
Angenommen: $l < k-1$ **für alle** v
$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^{k-1}$**, anders ausgedrückt:** $p^{k-1} = g_v \cdot \mathbf{m}_{\varphi,v}$**, Anwendung auf** φ **und anschließendes Einsetzen von** v **liefert:**

$$p^{k-1}(\varphi) = g_v(\varphi) \circ \mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \left[p^{k-1}(\varphi) \right](v) = g_v(\varphi) \underbrace{\left(\mathbf{m}_{\varphi,v}(\varphi)(v) \right)}_{= 0 \ \textbf{n. D.}} = 0$$

Nach den Voraussetzungen folgt: $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^{k-1}$ **- wir erhalten einen Widerspruch.**
Also gibt es v **mit** $\mathbf{m}_{\varphi,v} | \, p^k$**,** $\mathbf{m}_{\varphi,v} = p^k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{k-1}(\varphi)(v) \neq 0$**. Anders formuliert:**

$$\{ v | \, \mathbf{m}_{\varphi,v} \neq \mathbf{m}_\varphi \} = \textbf{Kern} \underbrace{\left(p^{k-1}(\varphi) \right)}_{\neq 0} = \textbf{echter Unterraum von } \mathbf{V}$$

2.) Allgemeiner Fall: $\mathbf{m}_\varphi = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ **normiert und** p_i **seien paarweise verschieden. Nach dem Zerlegungslemma (IV.4.6) folgt:**

$$\mathbf{V} = \bigoplus \underbrace{\textbf{Kern}\left(p_i^{k_i} \right)}_{\mathbf{U}_i}, \quad \textbf{wobei } \varphi \textbf{ invariante Zerlegung}$$

Auf $\mathbf{U}_i$ gilt nun: $p_i^{k_i}\left(\varphi|_{\mathbf{U}}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} \Big| p_i^{k_i}$.
Wegen Lemma $(\mathbf{IV}.4.4)$ **gilt:**

$$\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}} = p_i^{k_i}$$

Daher gibt es $v_i \in \mathbf{U}_i$ **mit** $\mathbf{m}_{\varphi,v_i} = p_i^{k_i}$. **Setze** $v = v_1 + \ldots + v_r$. **Analog zu** $(\mathbf{IV}.4.4)$ **folgt:**

$$\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{kgV}\left(\mathbf{m}_{\varphi,v_i}\right) = \mathbf{kgV}\left(p_i^{k_i}\right) = \mathbf{m}_\varphi$$

4.5.11 Algorithmische Berechnung zur Suche von v mit $\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{m}_v$

(1) Finde v mit $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$

(2) Finde Zerlegung $v = \langle v\rangle_\varphi \oplus \mathbf{U}$, wobei $\mathbf{U}$ φ-invariant sei.

(3) Zerlege $\mathbf{U}$ weiter

Zu (i) können wir zwei Methoden anwenden:
1. Methode: Folge dem Beweis (nicht stets zu empfehlen)
2. Methode: Mit Wahrscheinlichkeit nahezu Eins gilt: $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$ (über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)
Wir wählen ein $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zufällig - zudem sei A gegeben wie oben:

$$x = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Anwendung von A auf x liefert:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = (9,3,10) \\ \Rightarrow \quad A^2 \cdot x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = (9,16,20) \end{aligned}$$

Nun wollen wir die lineare Unabhängigkeit von $x, A\cdot x, A^2\cdot x$ zeigen. Hierzu betrachten wir die Determinante mit Spaltenvektoren $x, A\cdot x, A^2\cdot x$

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ -1 & 3 & 16 \\ 5 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 17 \\ 5 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 9\cdot(60-85) = -225 \neq 0$$

Damit: $\mathbf{m}_{A,x} = \mathbf{m}_A$.
Diese 2. Methode klappt aus folgendem Grund:

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \, \mathbf{m}_A \neq \mathbf{m}_{A,x}\} \subseteq \bigcup_{\textbf{endlich}} \textbf{Unterräume der Dimension } \leq n-1$$

Zu (ii): $\mathbf{V} = \langle v\rangle_\varphi \oplus \mathbf{U}'$, wobei $\mathbf{U}'$ eventuell noch nicht invariant.
Falls $\varphi(\mathbf{U}') \subseteq \mathbf{U}'$ sind wir fertig.
Falls $\varphi(\mathbf{U}') \nsubseteq \mathbf{U}'$, dann wähle anderes $\mathbf{U}'$ und überprüfe erneut.

4.5.12 Satz (IV.5.4): Elementarteilersatz

Gegeben $\Psi \in \mathbf{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$. Dann gilt:

(i) $\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle v_i \rangle_\varphi$ **und für** $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}}$ $(\mathbf{U}_i = \langle v_i \rangle_\varphi)$ **gilt:**

- **(1)** $\mathbf{m}_1 |\, \mathbf{m}_2 |\, \mathbf{m}_3 |\, \ldots |\, \mathbf{m}_r$
- **(2)** $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}_\varphi$
- **(3)** $\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{r} \mathbf{m}_i$

(ii) Die $\mathbf{m}_i$ sind durch die Eigenschaften

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle v_i \rangle_\varphi \quad \textbf{und} \quad \mathbf{m}_1 |\, \mathbf{m}_2 |\, \mathbf{m}_3 |\, \ldots |\, \mathbf{m}_r |$$

eindeutig festgelegt. (Sie heißen eine Elementardarstellung von φ)

<u>Algorithmischer Beweis</u>:
Man wähle $v \in \mathbf{V}$ mit $\mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v}$.
Betrachte $\langle v \rangle_\varphi = \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v) \rangle$, wobei $k = \mathbf{grad}\,(\mathbf{m}_{\varphi,v})$
Zwischenziel: $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{U}$, wobei $\mathbf{U}$ φ-invarinat ist.
Dann: $\varphi|_{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}$ betrachten, per Rekursion folgt die Behauptung, da die Dimension immer kleiner werden.
Wir haben: $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{W}$, wobei $\mathbf{W}$ Vektorraumkomplement ist. $\mathbf{W}$ ist eventuell nicht φ-invariant.
Nun prüfen wir nach, ob $\mathbf{W}$ φ-invariant ist:
Wähle $w \in \mathbf{W}$, dann $\varphi(w) = v' + w'$ eindeutige Darstellung mit $v' \in \langle v \rangle_\varphi$, $w' \in \mathbf{W}$
Wir definieren: $\Psi : \mathbf{W} \to \mathbf{W} : w \mapsto w'$, wobei Ψ Endomorhpismus von $\mathbf{W}$.
<u>Nachweisen der Linearität von Ψ</u>: Hier nur zum Beispiel die Addition:

$$(w + w_1)' \stackrel{!}{=} w' + w_1'$$

Dazu:

$$\varphi(w + w_1) = \varphi(w) + \varphi(w_1) = (v' + w') + (v_1' + w_1') = \underbrace{(v' + v_1')}_{\in \mathbf{V}} + \underbrace{(w' + w_1')}_{\in \mathbf{W}}$$

Also: $\Psi(w + w_1) = w' + w_1' = \Psi(w) + \Psi(w_1)$
Analog zeigen wir die skalare Multiplikation $\quad\Rightarrow\quad$ Ψ ist linear.
Per Induktion betrachten wir $(\mathbf{W}, \Psi)$, man hat also den Elementarteilersatz für $(\mathbf{W}, \Psi)$
<u>Jetzt: technische Schwierigkeit</u>:
Zusammenhang von $(\mathbf{V}, \varphi)$ und $(\mathbf{W}, \Psi)$: Es ist $\varphi(w) = v' + \Psi(w)$, $v' \in \langle v \rangle_\varphi$.
Anwendung von φ liefert:

$$\varphi^2(w) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi(v' + \Psi(w)) \stackrel{\varphi\,\textbf{linear}}{=} \underbrace{\varphi(v')}_{\in \langle v \rangle_\varphi} + \varphi\underbrace{(\Psi(w))}_{\in \mathbf{W}} = v'' + v''' + \Psi^2(w)$$

wobei $v'', v''' \in \langle v \rangle_\varphi$. Also: $\varphi^2(w) = \overline{v} + \Psi^2(w)$, $\overline{v} = v'' + v''' \in \langle v \rangle_\varphi$

Dito - per Induktion: $\varphi^k(w) = \overline{\overline{v}} + \Psi^k(w)$, **wobei** $\overline{\overline{v}} \in \langle v \rangle_\varphi$

<u>Bedeutung für Einsetzen in Polynome</u>:

Gegeben: $h(T) \quad \Rightarrow \quad h(\varphi)(w) = v' + h(\Psi)(w)$, $v' \in \langle v \rangle_\varphi$

<u>Folgerung</u>: Sei $h = \mathbf{m}_\varphi$

$\Rightarrow \quad h(\varphi)(w) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_\varphi(\Psi)(w) = 0$ **für alle** $w \in \mathbf{W} \quad \Rightarrow$ **Tatsache** $\mathbf{m}_\Psi | \mathbf{m}_\varphi$

Nach Induktion dürfen wir annehmen:

$$\mathbf{W} = \langle w_2 \rangle_\varphi \oplus \langle w_3 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle w_r \rangle_\varphi$$

<u>Versuch</u>: Gilt $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{W} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \langle w_2 \rangle_\varphi \oplus \langle w_3 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle w_r \rangle_\varphi$**?**

Sei $\mathbf{m}_i$ **=Minimalpolynom von** Ψ **auf** $\langle w_i \rangle_\Psi$**.**

Das heißt (unter anderem): $\mathbf{m}_i(\Psi)(w_i) = 0$, $\mathbf{m}_i | \mathbf{m}_\Psi | \mathbf{m}_\varphi$

Nun wollen wir testen, ob die Summe $\langle v \rangle_\varphi + \langle w_2 \rangle_\varphi$ **direkt ist.**

Angenommen: Sei $v' + w' = 0$, $v' \in \langle v \rangle_\varphi$, $w' \in \langle w_2 \rangle_\varphi$ **wobei** $v', w' \neq 0$. **Dann:**

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \cdot \varphi^i(v) = h(\varphi)(v) \quad \textbf{mit} \quad h = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \cdot T^i \\ w' &= g(\varphi)(w_2) \end{aligned}$$

Daher ist zu untersuchen: $0 = h(\varphi)(v) + g(\varphi)(w_2)$.

Es gibt eine (offenkundige) Relation dieser Art:

$$\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = v' + \underbrace{\mathbf{m}_2(\Psi)(w_2)}_{=0} = v' = h(\varphi)(v)$$

<u>Wir haben</u>: $\mathbf{m}_2 | \mathbf{m}_{\varphi,v}$, $\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = v' \in \langle v \rangle_\varphi$

<u>Behauptung</u>: $\exists v'' \in \langle v \rangle_\varphi$ **mit** $\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = \mathbf{m}_2(\varphi)(v'')$

Berechnung von v''**:**

Nach Voraussetzung: $\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = h(\varphi)(v) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot \mathbf{m}_2\right)(\varphi)(w_2) = \mathbf{m}_\varphi(\varphi)(w_2) = 0$

Andererseits: $\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2}(\varphi) \circ (\mathbf{m}_2(\varphi)(w_2)) = \frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2}(\varphi)(h(\varphi)(v)) = \left(\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h\right)(\varphi)(v)$

Daher: $\left(\frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h\right)(\varphi)(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_\varphi = \mathbf{m}_{\varphi,v} | \frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h$

Das heißt: $\mathbf{m}_\varphi \cdot f = \frac{\mathbf{m}_\varphi}{\mathbf{m}_2} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = f \cdot \mathbf{m}_2$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{m}_2(\varphi)(w_2) = (m_2 \cdot f)(\varphi)(v) = m_2(\varphi)\left(\frac{f(\varphi)(v)}{v''}\right)$$

<u>Folgerung</u>: $\mathbf{m}_2(\varphi) \cdot (w_2 - v_2'') = 0$ **(wir haben dem** v'' **den Index zwei gegeben)**

Setze $v_i = w_i - v_i'' \quad \Rightarrow \quad m_i(\varphi)(v_i) = 0$, $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{r} \langle v_i \rangle_\varphi$

Nachrechnen: $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \langle v_2 \rangle_\varphi \oplus \langle v_2 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle v_r \rangle_\varphi$ **(dies sparen wir uns hier)**

Dies ist ein algorithmischer Beweis: Folgende Schritte:

(i) Wahl von v

(ii) $\mathbf{V} = \langle v \rangle_\varphi \oplus \mathbf{W}$ **(Vektoraumzerlegung)**

(iii) Beschreibung von Ψ **auf W: In der Basis** $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v), w_1, w_2, \ldots, w_l$ **beschreibende Martrix von** φ**:**

$$\mathbf{M}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} * & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Zudem ist $\mathbf{M}(\Psi) = C$

(iv) Modifikation der w_i**, so daß wir die passenden** v_i **erhalten.**

<u>Zur Eindeutigkeit</u>: Beweis per Rekursion:
Angenommen $\mathbf{m}_1 | \mathbf{m}_2 | \mathbf{m}_3 | \ldots | \mathbf{m}_r$ **und** $\mathbf{m}'_1 | \mathbf{m}'_2 | \mathbf{m}'_3 | \ldots | \mathbf{m}'_s$**.**
Sicher gilt: $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}'_s = \mathbf{m}_\varphi$ **(Das Minimalpolynom ist eindeutig)**
Angenommen: $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}'_s, \mathbf{m}_{r-1} = \mathbf{m}'_{s-1}, \ldots, \mathbf{m}_{r-k} = \mathbf{m}'_{s-l}$
Dann: $\mathbf{m}_{k-1}$ **ist normiertes Polynom kleinsten Grades mit** $\mathbf{m}_{k-1}(\varphi)(v) \subseteq \langle v_1 \rangle_\varphi \oplus \langle v_2 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle v_{t+1} \rangle_\varphi$, $k = r - t$
Dito: $\mathbf{m}_{l-1}(\varphi)(v) \subseteq \langle v'_1 \rangle_\varphi \oplus \langle v'_2 \rangle_\varphi \oplus \ldots \oplus \langle v'_{t+1} \rangle_\varphi$, $l = s - t$
Weiterhin gilt: $\exists \sigma : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **Automorphismus (bijektive lineare Abbildung) mit**

$$\varphi \left(\bigoplus_{i=1}^{t+1} \langle v_i \rangle \right) = \bigoplus_{i=1}^{t+1} \langle v'_i \rangle$$

Daraus folgt: $\mathbf{m}_{k-1} = w'_{l-1}$

4.5.13 Korollar (IV.5.5)

$\mathbf{m}_\varphi = \mathcal{X}_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **V ist** φ**-zyklisch.**
Beweis:
"$\Leftarrow$": Schon oft gezeigt.
"$\Rightarrow$" Zwei Beweise für die Rückrichtung:
1.) Beweis folgt aus Elementarteilersatz:

$$\mathcal{X}_A = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{m}_r, \quad \textbf{d.h. } \mathbf{m}_r = \mathbf{m}_\varphi$$

Hier: $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \ldots = \mathbf{m}_{r-1} = 1$**, das heißt:** $r = 1 \quad \Rightarrow \quad$ **V zyklisch.**
2.) Bereits früher (als ein Baustein des Elementarteilersatzes) gezeigt: $\exists v$**:** $\mathbf{m}_{\varphi,v} = \mathbf{m}_\varphi$
Hier: $\mathbf{dim}\left(\langle \mathbf{v} \rangle_\varphi\right) = \mathbf{grad}(\mathbf{m}_{\varphi,v}) \overset{\textbf{Vor.}}{=} \mathbf{dim}(\mathcal{X}_\varphi) = \mathbf{dim}(\mathbf{V}) \quad \Rightarrow \quad \langle v \rangle_\varphi = \mathbf{V}$

4.5.14 Korollar (**IV**.5.6)

Zwei Matrizen im $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sind ähnlich genau dann, wenn sie dieselben Elementarteiler haben.
"$\Leftarrow$" Nach Korollar (IV.5.5):

$$A \text{ ähnlich zu } \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

wobei die A_i durch $\mathbf{m}_i$ bestimmt werden. Daher ist A ähnlich zu gemeinsamer Matrix. Somit sind A, B ähnlich.
"$\Rightarrow$" Sei $B = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}$ mit $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$
Zerlegung von $\mathbb{K}^n$ in invariante Unterräume: $\mathbb{K}^n = \bigoplus \langle v_i \rangle_A$. Anwendung von S liefert:

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus \mathbf{S} \cdot \langle v_i \rangle_A$$

Nun lautet die generelle Frage: Was ist $\mathbf{S} \cdot \langle v_i \rangle_A$? Es gilt:

$$\mathbf{S} \cdot \langle v_i \rangle_A = \mathbf{S} \cdot \left\langle v, Av, A^2v, \ldots \right\rangle = \left\langle \mathbf{S} \cdot v, \mathbf{S} \cdot Av, \mathbf{S} \cdot A^2v, \ldots \right\rangle$$

Nun gilt: $B \cdot (\mathbf{S}v) = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot v) = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot v = \mathbf{S} \cdot Av$
Damit folgt für die Potenzen von B:

$$B^i = \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^i \cdot (\mathbf{S} \cdot v) \overset{(*)}{=} \mathbf{S} \cdot A^i \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot v) = \mathbf{S} \cdot A^i v$$

Zur Erinnerung zu $(*)$:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^2 &= \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{E} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A^2 \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^3 &= \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^2 \cdot \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A^2 \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot A^3 \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ \Rightarrow \quad \left(\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}\right)^i &= \mathbf{S} \cdot A^i \cdot \mathbf{S}^{-1} \end{aligned}$$

Daher: $\mathbf{S}(\langle v \rangle_A) = \langle \mathbf{S}v \rangle_B$. Also: $\mathbb{K}^n = \bigoplus \langle \mathbf{S}v_i \rangle_B$
<u>Behauptung</u>: Das Minimalpolynom von B auf $\langle \mathbf{S}v_i \rangle_B$ sei $\mathbf{m}_i$.
Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i(B) &= \left(\sum \alpha_{k-i} \cdot T^i\right)(B) = \sum \alpha_{k-i} \cdot B^i = \sum \alpha_{k-i} \cdot \mathbf{S} \cdot A^i \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S} \cdot \left(\sum \alpha_{k-i} \cdot A^i\right) \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}_i(A) \cdot \mathbf{S}^{-1} = 0 \quad \textbf{auf } \langle \mathbf{S}v_i \rangle_B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Minimalpolynom von B auf $\langle \mathbf{S}v_i \rangle_B$ teilt $\mathbf{m}_i$ (Minimalpolynom von A auf $\langle v_i \rangle_A$).
Es folgt die Behauptung, da laut Voraussetzung das Minimalpolynom symmetrisch in A und B ist:
Bisher: $A \rightsquigarrow B = \mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1}$, $\langle v \rangle_A \rightsquigarrow \langle \mathbf{S}v \rangle_B$
Daraus: $B \rightsquigarrow A = \mathbf{S}^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \cdot B \cdot \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1}$, $\langle \mathbf{S}v \rangle_B \rightsquigarrow \left\langle \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S}v \right\rangle_A = \langle v \rangle_A$
Daher: Entsprechende Minimalpolynome teilen sich wechselseitig und sind normiert
$\Rightarrow$ Gleichheit

4.5.15 Beispiele: Projektion

Projektion: $p = p_{\mathbf{U}}$**:** $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$
$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'$, $p_{\mathbf{U}}(u+u') = u$ **für** $u \in \mathbf{U}$, $u' \in \mathbf{U}'$
1.) $p^2 = p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} | T^2 - T = T \cdot (T-1)$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{Kern}(p) \oplus \mathbf{Kern}(p - \mathbf{id}) = \underbrace{\mathbf{Eig}(p,0)}_{\doteqdot \mathbf{U}'} \oplus \underbrace{\mathbf{Eig}(p,1)}_{\doteqdot \mathbf{U}}$$

$\mathbf{dim}(\mathbf{U}) = r \quad \Rightarrow \quad \chi_p(T) = T^{n-1} \cdot (T-1)^r$,
$\mathbf{m}_1 | \, \mathbf{m}_2 | \ldots | \, \mathbf{m}_k = \mathbf{m} = T \cdot (T-1)$, $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{m}_k = T^{n-r} \cdot (T-1)^r$
Wie sehen nun die $\mathbf{m}_i$ **aus? Es gibt zwei Möglichkeiten:**

(i) $p \neq 0$, **id, dann:** $\mathbf{m} = T^2 - T$

(ii) Entweder: $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k = \ldots = \mathbf{m}_{h-(k-1)}$, $\mathbf{m}_{h-k} = \ldots = \mathbf{m}_1 = T$
oder: $\mathbf{m} = \mathbf{m}_k = \ldots = \mathbf{m}_{h-(k-1)}$, $\mathbf{m}_{h-k} = \ldots = \mathbf{m}_1 = (T-1)$

Also:
a) $T \cdot (T-1)$ h**-mal,** T $(h-k)$**-mal. Damit folgt für das charakteristische Polynom:**

$$\chi_A = [T \cdot (T-1)]^h \cdot T^{k-h} = T^k \cdot (T-1)^h \quad \textbf{für } k \geq h$$

$\Rightarrow \quad n - r = k, \ r = h, \ n - r \geq n \quad \Rightarrow \quad 2r \leq n$
b) $T \cdot (T-1)$ h**-mal,** $(T-1)$ $(h-k)$**-mal. Damit folgt für das charakteristische Polynom:**

$$\chi_A = [T \cdot (T-1)]^h \cdot (T-1)^{k-h} = T^h \cdot (T-1)^k \quad \textbf{für } k \geq h$$

$\Rightarrow \quad n - r = k, \ r = k, \ r \geq n - r \quad \Rightarrow \quad 2r \geq n$
Also: Elementarteilesequenz allein bestimmt durch $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(p,1))$
Damit $p^2 = p$, $q^2 = q$**. Nach Korollar (IV.5.6):** p **und** q **sind ähnlich**
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(p,1)) = \mathbf{dim}(\mathbf{Eig}(q,1))$
Direkter Beweis (nicht über Elementarteilersatz):
"$\Rightarrow$" $q = S \cdot p \cdot S^{-1} \quad \Rightarrow \quad S$ **liefert Isomorphismus zwischen Eigenräumen zu gegebenem Eigenwert.**
"$\Leftarrow$" $\mathbf{V} = \mathbf{Eig}(p,0) \oplus \mathbf{Eig}(p,1) = \mathbf{Eig}(q,0) \oplus \mathbf{Eig}(q,1)$.
Hier: $\mathbf{Eig}(p,1) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Eig}(q,1)$, **wobei** φ **Isomorhismus**
$\Rightarrow \quad \mathbf{Eig}(p,0) \xrightarrow{\Psi} \mathbf{Eig}(q,0)$, **wobei** Ψ **Isomorhismus, da die Dimensionen übereinstimmen.**
Das heißt: p **und** q **sind (bezüglich verschiedener Basen) durch**

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \cdot \cdots \cdot 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{E}_r \\ 0 & \end{array}\right)$$

beschreibbar.

Das Jordansche Normalenproblem für Matrizen

Gegeben $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

Zum Beispiel über $\mathbb{C}$: $\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i)^{r_i}$, **wobei** $\lambda_i \neq \lambda_j$ **für** $i \neq j$. **Dann**

1.) $\mathbf{V} = \bigoplus \mathbf{Kern}\,(A - \lambda_i \cdot \mathbf{E})^{r_i}$

4.5.16 Definition: (IV.5.c): Kern $(A - \lambda_i \cdot \mathbf{E})^{r_i}$ **- Verallgemeinerte Eigenräume oder Haupträume**

Kern $(A - \lambda_i \cdot \mathbf{E})^{r_i}$ **werden als verallgemeinerte Eigenräume oder Haupträume bezeichnet.**
Es gilt: Eig $(A, \lambda_i) \subseteq$ **Kern** $(A - \lambda_i \cdot \mathbf{E})^{r_i}$
2.) Damit erhalten wir durch Basiswechsel:

$$\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & & \\ & \boxed{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_n} \end{pmatrix}$$

wobei die einzelnen C_i **die Beschreibung von** $(A - \lambda_i \cdot \mathbf{E})^{r_i}$ **liefern.**
3.) $v_1, \ldots, v_k$ **seien Basis von** $\mathbf{U} = \mathbf{Kern}\,(A - \lambda \cdot \mathbf{E})^r$, $B := A - \lambda \cdot \mathbf{E}$. **Auf U:** $B^r = 0$
$\Rightarrow$ **alle auftretenden Blöcke gehören zu nilpotenten Matrizen.**
Sei $B^r = 0$, $v_1, B \cdot v_1, B^2 \cdot v_1, \ldots, B^{r-1} \cdot v_1$ **und** $B^r \cdot v_1 = 0$. **Der Elementarteilersatz liefert nun:**
Es existieren $v_1, \ldots, v_l$ **mit:**

$$\mathbf{U} = \langle v_1 \rangle_B \oplus \langle v_2 \rangle_B \oplus \ldots \oplus \langle v_l \rangle_B$$

in der Basis $\left(v_1, B \cdot v_1, \ldots, B^{t-1} \cdot v_1, v_2, B \cdot v_2, \ldots, B^s \cdot v_2\right)$, **wobei** $B^t \cdot v = 0$, **wird** B **wie folgt beschrieben:**

$$\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_n} \end{pmatrix}$$

wobei für die einzelnen B_i **gilt:**

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bezüglich der Basis $\left(B^{t-1} \cdot v_1, B^{t-2} \cdot v_1, \ldots, v_1, B^{s-1} \cdot v_2, B^{s-2} \cdot v_2, \ldots, v_2 \ldots\right)$ **hat die beschreibende Matrix ebenfalls Blockstruktur, wobei für die einzelnen** B_i **in diesem Fall gilt:**

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wollen wir nun A in der letzteren Basis beschreiben, so erhalten wir:

$$A = \lambda \cdot \mathbf{E} + B \quad \Rightarrow \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_1} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_n} \end{pmatrix}$$

mit den einzelnen J_i mit folgender Gestalt:

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Schließlich erhält man eine ähnliche Matrix:

$$\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_1(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_2(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_n(\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

In der Jordanschen Normalenform tauchen alle Eigenwerte auf. Es ist möglich, daß zu einem Eigenwert mehrere Jordanblöcke existieren.

4.5.17 Definition (IV.5.f): Jordanblock

Wir definieren den Jordanblock folgendermaßen:

$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}_k(\lambda) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ ist eine quadratische Matrix.

4.5.18 Definition (IV.5.g): Jordanmatrix

Wir definieren eine Jordanmatrix folgendermaßen:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{\mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{J}_{k_n}(\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

Hier bei können die verschiedenen λ_k auch gleich sein.

4.5.19 Satz (IV.5.7): Jordansche Normalenform

Folgende Aussagen sind äquivalent für $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

(i) A **ist ähnlich zu einer Jordanmatrix**

(ii) $\chi_A = \prod (T - \lambda_i)$ **in** $\mathbf{K}[T]$

Die Jordanmarix ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Blöcke.
Sei $B = A - \lambda \cdot \mathbf{E}$. Dann: die Anzahl der k-reihigen Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist gegeben mit

$$\textbf{Anzahl Jodanblöcke zum Eigenwert } \lambda = \mathbf{rg}\left(B^{k-1}\right) - 2 \cdot \mathbf{rg}\left(B^k\right) + \mathbf{rg}\left(B^{k+1}\right)$$

(Insbesondere: In $\mathbb{C}$ ist jede Matrix ähnlich zu einer Jordanmatrix)

Zu (ii): $m_\varphi = \chi_\varphi$: V hat eine Basis $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v)$. In dieser Basis wird φ wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dies ist die Frobenius-Begleitmatrix zu χ_φ.
Nach der letzten Spalte gilt:

$$\chi_\varphi = T^n + \alpha_1 \cdot T^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

Nach Cayley Hamilton folgt:

$$\varphi^n(v) = -\alpha_n \cdot v - \alpha_{n-1} \cdot \varphi(v) - \ldots - \alpha_1 \cdot \varphi^{n-1}(v)$$

4.5.20 Herstellung der Jordanschen Normalenform für "kleine" Matritzen.

Nach Herrn Becker sind kleine Matrizen je nach Können zwischen (3×3) und (10×10) Felder groß.
Wir gehen folgendemaßen vor:

(1) $\chi_A(T) = \prod (T - \lambda_i)^{r_i}$, **die Eigenwerte λ_i bestimmen (die Vielfachheit der Eigenwerte ist nicht so wichtig)**

(2) Anzahl der k-reihigen Jordanblöcke bestimmen:

$$\#\mathbf{J}_k(\lambda_i) = \mathbf{rg}\left(B^{k-1}\right) - 2 \cdot \mathbf{rg}\left(B^k\right) + \mathbf{rg}\left(B^{k+1}\right)$$

wobei $B = A - \lambda \cdot \mathbf{E}$ (Wir fangen mit $k = 1$ an und machen solange weiter bis alle Jordanblöcke gefunden sind)

Aus (1) und (2) folgt die Jordansche Normalenform.
Bestimmung von $\mathbf{S} \cdot A \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J}$. Zwei Möglichkeiten:

(i) Folge dem Beweis

(ii) Löse $\mathbf{S} \cdot A = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$, betrachte Einträge von S als Unbekannte: Wähle im Lösungsraum des linearen Gleichungssystems für S ein reguläre Matrix aus.

Kapitel V: Bilineare Räume

5.1 Kapitel (V.1): Bilinearformen

5.1.1 Vorbemerkungen

Bilineare Räume sind Räume mit einer Bilinearform.
Objekt = (Vektorraum, Bilnearform)
Hauptbeispiele (kennen wir bereits): ($\mathbb{R}^2$, **Skalarprodukt**), ($\mathbb{R}^3$, **Skalarptrodukt**)
Bekannt: Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot y_1$ **mißt den Abstand zweier Punkte.**

Für den Euklidischen Abstand gilt: $\mathbf{d}(P,Q) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle}$

Das Skalarprodukt ist ein Beispiel für eine lineare Abbildung. $\langle \cdot \rangle$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(i) **linear in jedem Argument**

(ii) **symmetrisch:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Uns ist zudem eine multilineare Abbildung bekannt:

$$\underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n\textbf{-mal}} \to \mathbb{K}\textbf{:} \quad \mathbf{det}\,(\cdot) \quad \textbf{als Funktion der Spaltenvektoren}$$

Wir haben bereits gezeigt:

(i) **Die Determinate ist linear in jedem Element**

(ii) **nicht symmetrisch, sondern alternierend. Für** $i \neq j$:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & v_i & \cdots & v_j & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{pmatrix} = -\mathbf{det}\begin{pmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & v_j & \cdots & v_i & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{pmatrix}$$

Behauptung: Sei $\sigma \in \mathbf{S}_n$. **Dann:**

$$\mathbf{det}\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = \mathbf{sgn}\,(\sigma) \cdot \mathbf{det}\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Beweisskizze: $\mathbf{det}\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = \alpha(\sigma) \cdot \alpha(\tau) \cdot \mathbf{det}\,(v_1, v_2, \ldots, v_2)$.
Wir wissen: $\alpha(\sigma) \cdot \alpha(\tau) = \alpha(\sigma\tau) = \alpha(\tau) \cdot \alpha(\sigma)$, $\alpha\,(\textbf{Transposition}) = -1$
$\Rightarrow \quad \mathbf{S}_n = \langle \textbf{Transpositionen} \rangle \quad \Rightarrow$ **Behauptung.**

5.1.2 Definition (V.5.a): Bilinearform

$\mathbf{V}, \mathbf{W}$ **seien** $\mathbb{K}$**-Vektorräume.**
Dann heißt $s : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to \mathbb{K}$ **bilineare Abbildung beziehungsweise Bilinearform, wenn folgendes gilt:**

(i) **Linearität im ersten Argument:** $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$, $\forall v,\, v' \in \mathbf{V}$, $\forall w \in \mathbf{W}$ **gilt:**

$$s\,(\alpha \cdot v + \alpha' \cdot v',\, w) = \alpha \cdot s\,(v,\, w) + \alpha' \cdot s\,(v',\, w)$$

(ii) **Linearität im zweiten Argument.** $\forall \beta, \beta' \in \mathbb{K}$, $\forall v \in \mathbf{V}$, $\forall w,\, w' \in \mathbf{W}$ **gilt:**

$$s\,(v,\, \beta \cdot w + \beta' \cdot w') = \beta \cdot s\,(v,\, w) + \beta' \cdot s\,(v,\, w')$$

Als alternative Formulierung, obiger Eigenschaften, hier eine Kurzfassung:
$\forall w$: $s\,(\cdot,\, w)$: $\mathbf{V} \to \mathbb{K}$ **linear,** $\forall v$: $s\,(v, \cdot)$: $\mathbf{W} \to \mathbb{K}$ **linear.**

5.1.3 Beispiele für Bilinearformen

(a) Der Dualraum: $\mathbf{V}$, $\mathbf{W} = \mathbf{V}^* = \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$. Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* & \to & \mathbb{K} \\ (x, \lambda) & \mapsto & \lambda(x) \end{array}$$

Um zu zeigen, daß der Dualraum eine Bilinearform ist müssen wir die Linearität im ersten und zweiten Argument nachweisen:

Zu (i): $(\cdot, \lambda)$ linear nach Definition von $\mathbf{V}^*$ (siehe Definition Dualraum (3.1.9))

Zu (ii): $\lambda \mapsto \lambda(x)$ linear in λ nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathbf{V}^*$

(b) Ein Beispiel aus der Analysis: $\mathbf{V} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig$\}$

Behauptung: $\mathbf{V}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

Aus f, g stetig folgt: $\alpha \cdot f$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $f \circ g$ stetig (siehe Analysis)

Behauptung: $\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}) = \infty$ (Nicht endlich dimensional)

Zum Beispiel: $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \hookrightarrow & \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f|_{[a,b]} \end{array}$ **für $a < b$.**

Nun definieren wir ein <u>Skalarprodukt für Funktionen</u>:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, \mathbf{d}t$$

Die Linearität im ersten und zweiten Argument ist leicht zu zeigen:

Addition:

$$(f + f', g) \mapsto \int_a^b (f + f') \cdot g\, \mathbf{d}t = \int_a^b (f \cdot g + f' \cdot g)\, \mathbf{d}t = \int_a^b f \cdot g\, \mathbf{d}t + \int_a^b f' \cdot g\, \mathbf{d}t = (f,g) + (f',g)$$

Skalare Multiplikation:

$$(\alpha \cdot f, g) \mapsto \int_a^b (\alpha \cdot f) \cdot g\, \mathbf{d}t = \int_a^b \alpha \cdot (f \cdot g)\, \mathbf{d}t = \alpha \cdot \int_a^b f \cdot g\, \mathbf{d}t = \alpha \cdot (f,g)$$

Anmerkung (wird in der Analysis behandelt, daher hier nicht von so großer Bedeutung): $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ liefert einen wichtigen metrischen Raum:

$$\mathbf{d}(f,g) := \sqrt{\int_a^b (f-g)^2\, \mathbf{d}t}$$

Der Abstand zweier Funktionen ist Null, wenn sie identisch sind. Ein anderes Beispiel für zwei Funktionen mit Abstand Null ist:

$$f = c, \qquad g = \begin{cases} c & x \neq x_0 \\ d & x = x_0 \end{cases} \qquad \textbf{für } c \neq d$$

Für $x \neq x_0$ sind die Funktionen identisch, ansonsten $(x = x_0)$ unterscheiden sie sich nur in einem Punkt.

(c) Sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Es sei gegeben:

$$(x,y) \quad \mapsto \quad x^T \cdot A \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right)$$

Für die i-te Stelle von x gilt nun: $x_i \cdot A \cdot y = x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \right)$**. Damit erhalten wir:**

$$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

(d) Nun wollen wir einen Spezialfall von (c) betrachten: Sei $A = \mathbf{E}_n$. Es folgt:

$$\langle x, y \rangle := x^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Wir erhalten das aus der Schule bekannte Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist unsere "Standard"-Bilinearform auf dem $\mathbb{K}^n$.

Wir wollen nun (c) ebenfalls als Skalarprodukt interpretieren und vereinbaren die folgende Notation:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ (x,\, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle = x^T \cdot A \cdot y \end{cases}$$

Eigenschaften einer Bilinearform über einen Endomorphismus

5.1.4 Definition (V.1.b): symmetrische, alternierende Bilinearfom

$\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seien $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ (Bilinearform über einem Endomorphismus). Dann definieren wir:

(i) Eine Form heißt symmetrische Bilinearform, wenn gilt:

$$\forall v, w \in \mathbf{V}: \; s(v,w) = s(w,v)$$

(ii) Eine Form heißt alternierende Bilinearform, wenn gilt:

$$\forall v \in \mathbf{V}: \; s(v,v) = 0$$

Falls $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ können wir eine äquivalente Bedingung formulieren:

$$\forall v \in \mathbf{V}: \; s(v,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall v, w \in \mathbf{V}: \; s(v,w) = -s(w,v)$$

5.1.5 Definition (V.1.c): positiv-definiet beziehungsweise positiv-semidefiniet

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seien $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(i) Eine Bilinearform ist positiv-definiet, wenn $\forall v \in \mathbf{V}$ gilt: $s(v,v) \gneqq 0$

(ii) Eine Bilinearform ist positiv-semidefiniet, wenn $\forall v \in \mathbf{V}$ gilt: $s(v,v) \geq 0$

5.1.6 Beispiele für symmetrische, alternierende beziehungsweise positiv-definiete, positiv-semidefiniete Bilinearformen

Wir werden einige der Beispiele aus (5.1.3) weiter untersuchen:

Zu b) Leicht zu sehen: Bilinearform ist symmterisch und positiv-semidefiniet

$$\Rightarrow \quad s\,(f,f) = \int\limits_a^b f^2\,\mathbf{d}t \geq 0$$

Behauptung: Obige Billinearform ist auch positiv-definiet.

Zu Zeigen: Sei f stetig und $\int\limits_a^b f^2\,\mathbf{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$

Beweis:

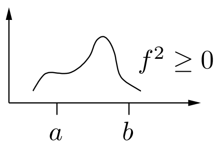

Abbildung V-9: Skizze

Sei etwa $f^2\,(c) > 0$ mit $c \in [a,b]$.

$$\Rightarrow \quad f^2\,(d) > 0 \textbf{ auf } (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f^2\,\mathbf{d}t \geq \int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f^2\,\mathbf{d}t \geq \min_{(c-\varepsilon,c+\varepsilon)} \left(f^2\right) \cdot 2\varepsilon > 0$$

Es folgt die Behauptung.

Zu d) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist diese Bilinearform symmetrisch und positiv-definiet (gezeigt in (1.3.2) **Norm eines Vektors).**

<u>Eine symmetrische positiv definiete Bilinearform wird als Skalarprodukt bezeichnet</u>.
Standardskalarprodukt:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \qquad \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Zu c) Sei $n = 2$ und A gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nun gilt:

$$\langle x, Ay\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$$

Die Bilinearform ist also symmetrisch. Ist sie auch positiv-semidefiniet. Nein, denn $\langle \mathrm{e}_2, A\mathrm{e}_2\rangle = -1$. Damit kann die Bilinearform natürlich auch nicht positiv definiet sein.

5.1.7 Zur Erinnerung: Orthogonalität und Skalarprodukt

Im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es gilt: $u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad \langle u,v\rangle = 0$.
Den Winkel zwischen u und v können wir folgendermaßen bestimmen:

$$\cos\measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \textbf{wobei} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

(Als Erinnerung an (**I**.3.1)**)**

5.1.8 Definition (V.1.d): Orthogonalität (verallgemeinert)

Sei $s : \mathbf{V}\times\mathbf{W}\to\mathbb{R}$ eine Bilinearform. Wir definieren:

$$v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad s(v,w) = 0$$

In diesem Fall sind u und v orthogonal zueinander.

5.1.9 Definition (V.1.e): linkes und rechtes Radikal l-Rad(s), r-Rad(s)

Gegeben $s : \mathbf{V}\times\mathbf{W}\to\mathbb{K}$ Bilinearform. Wir definieren:

(i) **l-Rad**$(s) := \{v\in\mathbf{V}|\, v\perp\mathbf{W}\} \quad\Leftrightarrow\quad s(v,w) = 0 \quad \forall w\in\mathbf{W}$

(ii) **r-Rad**$(s) := \{w\in\mathbf{W}|\, \mathbf{V}\perp w\} \quad\Leftrightarrow\quad s(v,w) = 0 \quad \forall v\in\mathbf{V}$

Anmerkung: Ist die Bilinearform symmetrisch, dann: l-Rad$(s) =$ **r-Rad**(s)

5.1.10 Definition (V.1.f): ausgeartete Bilinearform

s **heißt nicht ausgeartet, wenn l-Rad**$(s) =$ **r-Rad**$(s) = \{0\}$
Bemerkung: $0_{\mathbf{V}}\in$ **l-Rad**(s), $0_{\mathbf{W}}\in$ **r-Rad**(s), **denn** $s(0,w) = 0\,\forall w\in\mathbf{W}$, $s(v,0) = 0\,\forall v\in\mathbf{V}$.

5.1.11 Beispiele zu linken und rechtem Radikal

Zu (5.1.3) **a)** $\mathbf{V}\times\mathbf{V}^*$, $(x,\lambda)\mapsto\lambda(x)$,
Behauptung:

$$\textbf{l-Rad} = \{x|\,\forall\lambda\in\mathbf{V}^* : \lambda(x) = 0\} = \{0\},$$

denn zu jedem $x\neq 0\,\exists\lambda : \mathbf{V}\to\mathbb{K}$ **mit** $\lambda(x) = 1$.
Beweis: Ergänze $x = v_1$ **zu einer Basis** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **von V. Definiere** λ **wie folgt:**

$$x\mapsto 1, \qquad v_2, v_3, \ldots, v_n \mapsto \ \textbf{irgendwohin}, \qquad \left[\lambda\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda(v_i)\right]$$

Es gilt gemäß der Definition der Nullabbildung:

$$\textbf{r-Rad} = \{\lambda\in\mathbf{V}^*|\,\forall x\in\mathbf{V} : \lambda(x) = 0\} = \{0\}$$

Zu (5.1.3) **b)** $(f,g) \mapsto \int_a^b f \cdot g \,\mathbf{d}t$

Da diese Bilinearform symmetrisch ist gilt: l-Rad = r-Rad. Weiter:

$$\textbf{l-Rad} = \left\{ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \,|\, \forall g : g \ \textbf{stetig:} \ g:[a,b] \to \mathbb{R} \ \textbf{gilt:} \ \int_a^b f \cdot g \,\mathbf{d}t = 0 \right\} = \{0\}$$

denn insbesondere muß gelten: $\int_a^b f^2 \,\mathbf{d}t = 0$**. Bereits in** (5.1.7) **gezeigt:** $\Rightarrow \quad f \equiv 0$

Nun noch ein zusätzliches Beispiel:

(e) Sei s **gegeben mit:** $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Es gilt:

$$\textbf{l-Rad} = \textbf{r-Rad} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \forall y_1, y_2, y_3 : x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_3$$

Bei dieser Punktmenge handelt es sich um die z**-Achse.**

5.1.12 Beschreibung durch Matrizen: $s : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$

Hinführung:

(a) $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$**, Matrizen über Basisauswahl:** $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \cdot w_i$

(b) $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$**, Wähle Basis** $\mathfrak{A}$ **von V:** $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$**. Dann:**

$$s(v,w) = s\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot v_j\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \cdot \beta_j \cdot s(v_i, v_j)$$

Anmerkung: $(*)$ **folgt aus der Bilinearität von** s**.**

5.1.13 Definition (V.1.g): Matrix von s bezüglich Basis $\mathfrak{A}$

Sei $\mathfrak{A}$ **Basis von V und** s **eine Bilinearform:** $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$**. Dann definieren wir**

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) := \left(s(v_i, v_j)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \right)$$

als die Matrix von s **bezüglich der Basis** $\mathfrak{A}$**.**

5.1.14 Vorbemerkungen: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ legt s fest

Es gilt (wie oben):

$$s(v,w) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \cdot \beta_j \cdot s(v_i, v_j)$$

Hier dieselbe Aussage als Matrizentheoretische Formulierung;

$$v = \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i \quad \leftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_n), \qquad w = \sum_{j=1}^n y_j \cdot v_j \quad \leftrightarrow \quad (y_1, \ldots, y_n)$$

Dann gilt:

$$s(v,w) = (x_1,\ldots,x_n)\cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s(v,w) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot s(v_i,v_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} s(v_i,v_j)\cdot y_j\right)}_{i\textbf{-te Koordinate}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)_i = (x_1,\ldots,x_n)\cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.1.15 Satz (V.1.1) Symmetriesätze

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n$ und sei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) **Die Zuordnung $s \mapsto \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der Bilinearformen auf V und $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$**

(ii) **s symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ symmetrisch $\left(\Leftrightarrow \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)^T\right)$**

(iii) **Wenn s symmetrisch, dann**

$$\textbf{l-Rad}(s) = \textbf{r-Rad}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Im Übertragenen Sinn: l-Rad (s) = r-Rad $(s) \leftrightarrow$ Kern $\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)$ (Zu $(*)$: Mit der 0 wird klarerweise ein Vektor beschrieben)

(iv) **s ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ ist regulär**

Beweise:

Zu (i): Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ beliebig.

Zu zeigen: Es existiert eine Bilinearform s auf V mit $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = A$ (Surjektivität) und s ist durch A eindeutig bestimmt (Injektivität).

Eindeutigkeit: Notwendig gilt:

$$s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i\right) = \underbrace{(x_1,\ldots,x_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{(*)}$$

Also ist s eindeutigt bestimmt, weil zu jedem $v \in \mathbf{V}$, eindeutig bestimmte $x_i \in \mathbb{K}$ mit $v = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n$ existieren, also ist s injektiv.

<u>Existenz</u>: Zu zeigen ist: die durch $(*)$ definierte Abbildung ist wirklich eine Bilinearform:

(i) Bild $(s) \subseteq \mathbb{K}$ **klar**

(ii) Linearität im ersten und zweiten Argument:

Seien $v, v', w, w' \in \mathbf{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ **wobei**

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad v' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i, \quad w' = \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot v_i$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} s(\lambda \cdot v + v', w) &\overset{\textbf{Def.}}{=} (\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) + (x_1', \ldots, x_n')) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &\overset{\textbf{Distr.}}{=} \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x_1', \ldots, x_n') \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &\overset{\textbf{Def.}}{=} \lambda \cdot s(v, w) + s(v', w) \end{aligned}$$

Analog zeigen wir die Linearität im zweiten Argument:

$$s(v, \mu \cdot w + w') = \mu \cdot s(v, w) + s(v, w')$$

Also ist s **surjektiv und somit bijektiv (die Injektivität haben wir zuvor gezeigt).**

Zu (ii)**:**

“$\Rightarrow$” Sei s **symmetrisch** $\Rightarrow \quad s(v_i, v_j) = s(v_j, v_i)\ \forall i, j$

$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)_{ij} = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)_{ji}\ \forall i, j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ **ist symmetrisch.**

“$\Leftarrow$” Sei $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ **symmetrisch**

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i\right) &= \underbrace{(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}} \\ &= \left((x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)^T \\ &= (y_1, \ldots, y_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = s\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad s$ **ist symmetrisch.**

Zu (iii)**: Es gilt:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Rad}\,(s) &= \left\{ v \in \mathbf{V} \mid s\,(v,w) = 0\ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \right) = 0\ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0\ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) = (0, \ldots, 0) \right\} \\
&\overset{(*)}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, \mathbf{M}^{\mathfrak{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Anmerkung: $(*)$ **folgt aus der Symmetrie von** s

Zu (iv)**: Es gilt:**

$$\begin{aligned}
\textbf{l-Rad}\,(s) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) = (0, \ldots, 0) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right) \right\}
\end{aligned}$$

Analog:

$$\textbf{r-Rad}\,(s) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right) \right\}$$

s **nicht ausgeartet** $\quad\Leftrightarrow\quad \textbf{l-Rad}\,(s) = \textbf{r-Rad}\,(s) = \{0\}$

$\Leftrightarrow\quad \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right) = \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right)^T = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)$ **ist regulär.**

5.1.16 Bemerkung zu Satz (V.1.1)

Der Satz besagt unter anderem, daß man den allgemeinen Fall einer Bilinearform s auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{A}$ reduzieren kann. $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, für $\tilde{s} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ erhalten wir:

$$\tilde{s}\,(x, y) = x^T \cdot A \cdot y = \langle x, Ay \rangle \qquad \langle x, Ay \rangle = \sum x_i A y_i$$

Vergleiche dazu die Theorie der linearen Abbildungen: Seien $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ n beziehungsweise m-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ als Basis von $\mathbf{V}$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ als Basis von $\mathbf{W}$. Dann:

$$\varphi_{\mathfrak{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V} \qquad \varphi_{\mathfrak{A}}\,(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

$$\varphi_{\mathfrak{B}} : \mathbb{K}^m \to \mathbf{W} \qquad \varphi_{\mathfrak{B}}\,(w_1, \ldots, w_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot v_i$$

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineare Abbildung. Dann existiert genau eine Matrix

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\,(f) \in \mathbf{M}_{m,n}\,(\mathbb{K})$$

so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathrm{f})"'] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung V-10: Kommutatives Diagramm

5.1.17 Satz (V.1.2): Basiswechsel für Bilinearformen

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Basen von $\mathbf{V}$ und sei s eine Bilinearform auf $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ die Transformationsmatrix. Dann gilt:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}\,(s) \cdot \mathbf{T}$$

Vergleiche: Sei $f \in \mathbf{End}\,(\mathbf{V})$. Alaso:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\,(f) = \underbrace{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}\,(\mathbf{id})}_{(*)} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}\,(f) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})$$

wobei $(*) = \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}\,(\mathbf{id})\right)^{-1}$
<u>Beweis</u>: Sei $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \ldots, w_m)$. Es gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot w_i = \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot w_i$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} s(v,w) &= s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot w_i\right) = (x_1',\ldots,x_n') \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \\ &= \left[\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \left[\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] \\ &= (x_1,\ldots,x_n) \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1,\ldots,x_n) \cdot \left(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T}\right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot w_i\right) \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit von $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ folgt: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T}$

5.1.18 Definition (V.1.h): Kongruenz zweier Matrizen

Seien $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$
Zwei Matrizen $A, B \in \mathbf{Sym}(n,\mathbb{K})$ heißen kongruent, wenn ein $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ existiert mit

$$B = \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$$

<u>Bahauptung</u>: Die Kongruenz zweier Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.
<u>Beweis</u>: Wir müssen folgende Eigenschaften nachweise:

(i) Reflexivität

(ii) Symmetrie

(iii) Transitivität

Zu (i): Setze $\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.
Zu (ii): Sei $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ mit $B = \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$. Dann:

$$A = \left(\mathbf{S}^T\right)^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^T \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Wir wissen: $\mathbf{S}^{-1} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.
Zu (iii): Seien $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ mit $B = \mathbf{S}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{S}_1$ und $C = \mathbf{S}_2^T \cdot B \cdot \mathbf{S}_2$. Dann:

$$C = \mathbf{S}_2^T \cdot \left(\mathbf{S}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{S}_1\right) \cdot \mathbf{S}_2 = \left(\mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{S}_1^T\right) \cdot A \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) = (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)^T \cdot A \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)$$

Wir wissen: $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, da $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ Gruppe $\quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.

5.2 Kapitel (V.2): Orthogonalbasen

5.2.1 Zur Erinnerung

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Die Verallgemeinerung des Skalarproduktes auf symmetrische Bilinearformen über einem Vektorraum V liefert damit die folgende Definition:

5.2.2 Definition (V.2.a): Orthogonalität, Orthogonalraum

Sei s symmetrische Bilinearform auf V, $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ und $u, v \in \mathbf{V}$. Wir definieren:

(i) $u \perp v$ **(in Worten: u orthogonal zu v), wenn gilt** $s(u, v) = 0$

(ii) $\mathbf{U}^\perp = \{v \in \mathbf{V} | \, s(u, v) = 0 \; \forall u \in \mathbf{U}\}$

Bemerkungen:
(a) $\mathbf{U}^\perp < \mathbf{V}$, $\mathbf{U}^\perp = \mathbf{Rad}(s)$ **wobei**

$$\mathbf{U}^\perp = \{v \in \mathbf{V} | \, s(w, v) = 0 \; \forall w \in \mathbf{V}\}$$

(b) $\mathbf{U} \perp \mathbf{U}$ **ist möglich. Zum Beispiel:**
Sei $\mathbf{V} = \mathbb{K}^2$ **und** $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$**.**
Dann ist $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp$**, denn**

$$s((\lambda, \lambda), (y_1, y_2)) = \lambda \cdot y_1 - \lambda \cdot y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \textbf{für } \lambda \neq 0$$

Aber: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp$**, denn**

$$s \langle (\lambda, 0), (y_1, y_2) \rangle = \lambda \cdot y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \textbf{für } \lambda \neq 0$$

5.2.3 Definition (V.2.b): Orthogonale Zerlegung

Sei s symmetris che Bilinearform auf V. Wir definieren:
$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \perp \mathbf{U}_2 \perp \ldots \perp \mathbf{U}_r$ **ist eine Zerlegung von V als direkte Summe**

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{U}_r$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft $s(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = 0$ **für** $i \neq j$ **- Kurzfassung:** $\mathbf{U}_i \perp \mathbf{U}_j$**.**

5.2.4 Beispiel für eine orthogonale Zerlegung

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{K}^2$ und sei s symmetrische Bilinearform mit

$$s\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$$

Es ist $\mathbb{K}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \perp \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, **denn** $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{0\}$.
Zudem: $s\left((\lambda, 0), (0, \mu)\right) = 0 \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

5.2.5 Satz (V.2.1): Abspaltung des Radikals

Sei s eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbf{V}$ und $\mathbf{U}$ sei ein Komplement von $\mathbf{Rad}(s)$, das heißt $\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(s) \oplus \mathbf{U}$. Dann gilt:

(i) $\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(s) \perp \mathbf{U}$

(ii) $s|_{\mathbf{U}}$ **ist nicht ausgeartet**

Beweis: Siehe Aufgabe $(35 - \mathbf{LinAII})$

5.2.6 Definition (V.2.c): Orthogonalbasis

$\mathbf{V}$ sei ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit char($\mathbb{K} \neq 2$) und s eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbf{V}$. Eine Basis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbf{V}$ heißt Orthogonalbasis, wenn gilt: $v_i \perp v_j$ für $i \neq j$.
Mit anderen Worten: $\mathbf{V} = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_2 \rangle \perp \ldots \perp \langle v_n \rangle$

5.2.7 Satz (V.2.2): Existenz von Orthogonalbasen

Sei $\mathbf{V}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und sei s eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbf{V}$.
Dann besitzt $\mathbf{V}$ eine Orthogonalbasis.
Zum Beweis benötigen wir das folgende Abspaltungslemma.

5.2.8 Lemma (V.2.3): Abspaltungslemma

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n < \infty$, $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ und $\dim(\mathbf{U}) = r$. Dann gilt:

(i) $\dim\left(\mathbf{U}^{\perp}\right) \geq n - r$

(ii) Ist $s|_{\mathbf{U}}$ **nicht ausgeartet, so gilt:** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \perp \mathbf{U}^{\perp}$

Beweis:

Zu (i): Sei $\mathfrak{A}_1 = (v_1, \ldots, v_r)$ Basis von U. Wir ergänzen $\mathfrak{A}_1$ zu einer Basis

$$\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n) \quad \textbf{von } \mathbf{V}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\perp} &= \{v \in \mathbf{V} | \, s(u,v) = 0 \, \forall u \in \mathbf{U}\} \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{r} y_i \cdot v_i \right) = 0 \, \forall \, (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{K}^r \right\} \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \, \forall \, (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = (0, \ldots, 0, *, \ldots, *) \right\} \qquad (r \textbf{ Nullen}) \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n)^T \in \textbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)_{i,j} \right)_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n}} \right\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{dim}\left(\mathbf{U}^{\perp}\right) \geq n - r$

Zu (ii): Es ist $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} = \mathbf{Rad}\left(s|_{\mathbf{U}}\right) = \{0\}$. Mit (i) folgt die Behauptung.

5.2.9 Beweis zu Satz (V.2.2)

Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang: $n = 1$: klar
Induktionsschluß: $(n-1) \rightsquigarrow n$
Wir untersuchen zwei Fälle:
1. Fall: Sei s Nullabbildung $\quad \Rightarrow \quad$ Behauptung (trivial)
2. Fall: Sei s nicht Nullabbildung. Dann existiert ein $v_1 \in \mathbf{V}$ mit $s(v_1, v_i) \neq 0$, denn es existieren $v, w \in \mathbf{V}$ mit $s(v,w) \neq 0$. Ist $s(v,v) = s(w,w) = 0$, so ist

$$\begin{aligned}
s(v+w, v+w) &= s(v,v) + s(w,w) + 2 \cdot s(v,w) \\
&= 2 \cdot s(v,w) \neq 0 \quad \textbf{falls char}\,(\mathbb{K}) \neq 2
\end{aligned}$$

d.h. $s|_{\langle v_i \rangle}$ ist nicht ausgeartet. Nach dem Abspaltungslemma (V.2.3) gilt also:
$\mathbf{V} = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_1 \rangle^{\perp}$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist $\langle v_1 \rangle^{\perp} = \langle v_2 \rangle \perp \ldots \perp \langle v_n \rangle$.
Also: $\mathbf{V} = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_2 \rangle \perp \ldots \perp \langle v_n \rangle$
Bemerkungen:

(a) **Der Beweis von Satz (V.2.2) gibt an, wie man die Orthogonalbasis konstruiert.**

(b) **Ist $\mathfrak{A}$ eine Orthogonalbasis von V, so hat $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ Diagonalgestalt.**

5.2.10 Satz (V.2.4)

Über einem Körper mit Carakteristik $\neq 2$ ist jede symmetrische Matrix kongruent zu einer Diagonalmatrix.

Beweis: Sei $A \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{K})$, s definiert durch $s(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$ ist symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{K}^n$. Nach Satz (V.2.2) existiert eine Orthogonalbasis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{K}^n$ bezüglich s:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \textbf{Diagonalmatrix} = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})\right)^T \cdot \underbrace{A}_{\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)} \cdot \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})\right)$$

Zur Erinnerung: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$

5.2.11 Beispiel für Konstruktion einer Orthogonalbasis

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Sym}(3, \mathbb{R})$ **und sei s gegeben mit** $s(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$**.**

Da $s(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = s(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = s(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 0$ **müssen wir einen anderen Vektor wählen.**

Es gilt:

$$s(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2 \cdot s(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2 \quad \textbf{(siehe Satz (V.2.2))}$$

Also wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**. Nun wollen wir** $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$ **bestimmen. Es gilt:**

$$(1, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 5)$$

Also: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbf{Kern}(1, 1, 5) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =: \mathbf{U}_1$

Sei $\mathfrak{A}_1 = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$**. Nun betrachte** $s|_{\mathbf{U}_1}$**. Es gilt:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}_1}\left(s|_{\mathbf{U}_1}\right) =: \tilde{A}$$

$\tilde{a}_{11} \neq 0$**, wähle** $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$**. Es folgt analog zu oben:**

$$\mathbf{e}_1 \cdot \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = (-20,\ -4) \rightsquigarrow (5, 1)$$

Nun bestimmen wir den Kern und erhaltenm v_3:

$$\mathbf{Kern}(5,\ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_2 \rangle^{\perp} \cap \mathbf{U}_1 = \left\langle - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Setzen wir nun ein, so folgt:

$$s\left(\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right)=(-1,5)\cdot\begin{pmatrix}-20&-4\\-4&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=-30$$

Damit:

$$\begin{pmatrix}1&5&0\\1&0&-5\\0&-1&1\end{pmatrix}^T\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1&5&0\\1&0&-5\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s(v_1,v_1)&0&0\\0&s(v_2,v_2)&0\\0&0&s(v_3,v_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-20&0\\0&0&-30\end{pmatrix}$$

Noch leichter geht es durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen. Jede Spaltenumformung entspricht der Multiplikation einer invertierbaren Matrix $\mathbf{S}_1$ von rechts. Jede Zeilenumformungentspricht einer Multiplikation mit $\mathbf{S}_1^T$ von links.
Führt man sämtliche Spaltenumformungen an der Einheitsmatrix durch, so erhält man die Transformationmatrix:

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\2&3&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&5\\1&0&3\\2&3&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}2&1&5\\1&0&3\\5&3&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}2&1&5\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{25}{2}\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{25}{2}\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{23}{2}\end{pmatrix}$$

Analog wenden wir die Operationen auf $\mathbf{E}_3$ an.
Um zu zeigen, daß char $(\mathbb{K})\neq 2$ sein muß hier ein Gegenbeispiel:
Sei char $(\mathbb{K})=2,\ A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ und eine symmetrische Bilinearform s gegeben mit

$$s(x,y)=(x_1,x_2)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}=2x_1\cdot x_2=0$$

Wäre also A kongruent zu einer Diagonalmatrix B, so wäre $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

5.2.12 Satz $(\mathbf{V}.2.2)'$: Satz $(\mathbf{V}.2.2)$ für char $(\mathbb{K})=2$

Sei char $(\mathbb{K})=2$, $\mathbf{V}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei s eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbf{V}$.
Dann besitzt $\mathbf{V}$ eine orthogonale Zerlegung:

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}_1\perp\ldots\perp\mathbf{U}_r\perp\mathbf{W}_1\perp\ldots\perp\mathbf{W}_s$$

mit dim $(\mathbf{U}_i)=1$ und dim $(\mathbf{W}_j)=2\ \forall i,j$. Ist $\mathbf{W}_j=\langle u,v\rangle$, so ist $s(u,u)=s(v,v)=0$ und $s(u,v)=1$.

5.2.13 Satz $(\mathbf{V}.2.4)'$: Satz $(\mathbf{V}.2.4)$ für char $(\mathbb{K})=2$

Sei char $(\mathbb{K})=2,\ A\in\mathbf{Sym}(n,\mathbb{K})$.
Dann: A ist kongruent zu einer Matrix B mit

$$B=\begin{pmatrix}\boxed{B_1}&&&\\&\boxed{B_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\boxed{B_\lambda}\end{pmatrix}\quad\textbf{wobei}\quad B_i=(\alpha_i)\quad\textbf{oder}\quad B_i=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

5.2.14 Definition (V.2.d): quadratische Form

Sei s eine symmetrische Bilinearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{V}$. Dann wird die Abbildung $q : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $q(v) = s(v, v)$ als die dazugehörige quadratische Form bezeichnet. Es gilt:

$$q(\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot s(v, v) \quad \textbf{für } \lambda \in \mathbb{K}.$$

5.2.15 Symmetrischer Gauß-Jordan Algorithmus (symmetrische Umformungen)

a) Wir wissen: Die $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ wird erzeugt von Umformungsmatrizen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r \quad \textbf{wobei} \quad \mathbf{U}_i \ \textbf{Umformungsmatrizen}$$

b) Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} &= (\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r)^T \cdot A \cdot (\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r) \\ &= \mathbf{U}_r^T \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_2^T \cdot \mathbf{U}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r \\ &= \mathbf{U}_r^T \cdot \ldots \cdot \left(\mathbf{U}_2^T \cdot \left(\mathbf{U}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{U}_1\right) \cdot \mathbf{U}_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r \end{aligned}$$

Basisoperationen: Umformungsmatrizen: $A \rightsquigarrow \mathbf{U}^T \cdot A \cdot \mathbf{U}$

Sei $\mathbf{U} \leftrightarrow$ Addition des α-fachen einer Zeile beziehungsweise Spalte zu einer anderen Zeile beziehungsweise Spalte. Sei $\mathbf{U}$ gegeben mit

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \alpha & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right)$$

Für die Multiplikation folgt:

$$\mathbf{U}^T \cdot A \cdot \mathbf{U} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right) \cdot \left(\boxed{\alpha_{ij}}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \alpha & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right)$$

Zur Vereinfachung rechnen wir mit symmetrischen (2×2)-Matrizen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + \alpha b & b + \alpha d \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2\alpha b + \alpha^2 d & b + \alpha d \\ b + \alpha d & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\alpha = -\dfrac{b}{d}$ für $d \neq 0$, so erhalten wir Diagonalgestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{d} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b^2}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Ist nun $d = 0$, so formen wir die Matrix um:

Sei $\mathbf{V}_{1,2} \leftrightarrow$ Vertauschung der ersten und zweiten Spalte beziehungsweise Zeile.

In diesem Fall gilt für die Transformationsmatrix: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$

Für eine (2×2)-Matrix erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

5.2.16 Satz (V.2.5): Gram-Schmidt

Situation: Sei $(\mathbf{V}, s)$ bilinearer Raum, $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis mit $s|_{\langle v_1,\ldots,v_k\rangle}$ nicht ausgeartet für $k = 1, \ldots, n$ (Das heißt: $\left(\mathbf{det}\,(s\,(v_i, v_j))_{i,j\leq k}\right) \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$).
Dann existiert eine Orthogonalbasis $w_1, \ldots, w_n$ mit

$$\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle\,, \qquad \mathbf{det}\left((s\,(v_i, v_j))_{i,j\leq k}\right) = \prod_{i=1}^{k} s\,(w_i, w_j)$$

Konsequenz:

$$(s\,(v_i, v_j))_{i,j\leq k} = \begin{pmatrix} \boxed{D_k} & \\ & \end{pmatrix} \quad \textbf{wobei} \quad D_k \ \textbf{der} \ k-\textbf{te Hauptminor ist}$$

Wir können den k-ten Hauptminoren im diesem Fall folgendermaßen berechnen:

$$D_k = \mathbf{det}\begin{pmatrix} s\,(v_1, v_1) & \cdots & s\,(v_1, v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s\,(v_k, v_1) & \cdots & s\,(v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung bedeutet: Alle Hauptminoren $\neq 0$ und $s\,(w_k, w_k) = \dfrac{D_k}{D_{k-1}}$
Matrizentheoretische Bedeutung:
Sei A symmterisch, $A = \left(\boxed{\alpha_{ij}}\right)$ und seien alle Hauptminoren $\neq 0$

$$\Rightarrow \quad A \ \textbf{kongruent zu} \ \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & \\ & \boxed{\frac{D_2}{D_1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\frac{D_k}{D_{k-1}}} \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>:
A liefert $s_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x^T \cdot A \cdot y$, $\mathfrak{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathbf{M}^{\mathfrak{E}}\,(s_A) = A$. Satz (V.2.2) liefert Orthogonalbasis $(w_1, \ldots, w_n)$ mit den obigen Eigenschaften.

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s_A) = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & s\,(w_k, w_k) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\mathbf{U}_k = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle \subseteq \mathbf{U}_{k+1}$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_k) = k$, $\mathbf{dim}\,(\mathbf{U}_{k+1}) = k + 1$. Nach Voraussetzung sind $\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{k+1}$ nicht ausgeartet.
Abspaltungslemma angewandt auf $\mathbf{U}_{k+1}$, s, $\mathbf{U}_k$ liefert:

$$\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k \perp \langle w\rangle$$

wobei $\langle w\rangle$ eindimensional nach Voraussetzungen ist.
$w \in \langle u_1, \ldots, u_{k+1}\rangle$, also

$$w = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k + \alpha_{k+1} \cdot u_{k+1} = \beta_1 \cdot w_1 + \ldots + \beta_k \cdot w_k + \alpha_{k+1} \cdot u_{k+1}$$

Es gilt: $s(w, w_i) = 0$ **für** $i = 1, \ldots, k$ **und**

$$s(w, u_{k+1}) = s\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot v_i, v_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot s(v_i, v_{k+1}) + \alpha_{k+1} \cdot s(v_{k+1}, v_{k+1})$$

$\alpha_{k+1} \neq 0$**, da sonst** $w \in \mathbf{U}_k$**. OE** $\alpha_{k+1} = 1$**. Weitere Rechnungen liefern:**

(i) $w = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{s(w_i, v_{k+1})}{s(w_i, w_i)} \cdot w_i$**, setze** $w_{k+1} = w$

$(\mathbf{V}, s)$ **hat Orthogonalbasis** $(w_1, \ldots, w_n)$**.**
Sei etwa $s(w_i, w_i) = 0,\ i = 1, \ldots, r,\ s(w_j, w_j) \neq 0,\ j = r+1, \ldots, n$**.**
Wähle $v_i = w_i$ **für** $i = 1, \ldots, r,\ v_j = \alpha_j w_j$ **für** $j = r+1, \ldots, n$ **mit** $\alpha_j^2 s(v_j, v_j) = 1$
(Quadratwurzel existiert in $\mathbb{C}$**!)**

Nun ist: $\langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle + \langle w\rangle$ **OE** $w = v_{k+1} + \sum_1^k \alpha_i v_i = v_{k+1} + \sum_1^k \beta_i w_i$

Für $i = 1, \ldots, k$**:** $0 = s(w, w_i) = s(v_{k+1}, w_i) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j s(w_j, w_i) = s(v_{k+1}, w_i) + \beta_i s(w_i, w_i)$

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \frac{-s(v_{k+1}, w_i)}{s(w_i, w_i)}; \quad w_{k+1} = w = v_{k+1} + \sum_1^k \frac{-s(v_{k+1}, v_{k+1})}{s(w_i, w_i)} w_i$$

Basis von $\underbrace{\langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle}_{\mathfrak{A}}$ **:** $\underbrace{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}}_{\mathfrak{B}} = v_{k+1} + \sum_1^k \alpha_i v_i = v_{k+1} + \sum_1^k \beta_i w_i$

(ii) $\prod_{i=1}^{k+1} \det(s(w_i, w_i)) = D_{k+1} \quad \Rightarrow \quad s(w_k, w_k) = \frac{D_k}{D_{k-1}}$ **(wichtiges Ergebnis)**

5.2.17 Beispiel zu Gram-Schmidt

Sei $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ **und** A **gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 61 \end{pmatrix}$**. Zuerst wollen wir die Hauptminoren berechnen. Es gilt:**

$$D_1 = |3| = 3, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18$$

Die Berechnung des dritten Hauptminor ist nun ein wenig mehr Arbeit:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 61 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 180$$

Das bedeutet:

$$A \text{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & 0 \\ & \boxed{\frac{D_2}{D_1}} & \\ 0 & & \boxed{\frac{D_3}{D_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 10 \end{pmatrix}$$

<u>Frage</u>: Ist die Voraussetzung, daß alle Hauptminoren $\neq 0$ sehr einschränkend?
Zunächst ist eine Hauptminor $= 0$ sicherlich eine Einschränkung, wir können diese Einschränkung aber geschickt umgehen.
Sei A nun gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Offensichtliches Problem: $D_1 = 0$.
Damit wir einen erste Hauptminor $\neq 0$ erhalten, wenden wir eine symmetrische Gauß-Jordan Umformung an und erhalten A' mit $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wobei $D_1 = 3$ und $D_2 = -1$.
Damit wissen wir:

$$A' \text{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \frac{D_2}{D_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Da auch A kongruent zu A' ist und die Kongruenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist (siehe (IV.3.a)), folgt:

$$A \text{ ist kongruent zu } = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Tatsache</u>: Erfüllt die symmetrische Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ noch nicht die Voraussetzung des Gram-Schmidschen Orthogonalisierungsverfahren, und ist zum Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, so liefert eine zufällige symmetrische Gauß-Jordan-Transformation eine zu A kongruente Matrix A', welche die Bedingung erfüllt.
<u>Begründung</u>:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{D_k} & \\ & \end{pmatrix} \quad \text{wobei der } k\text{-te Hauptminor } D_k = 0$$

Gesucht: $t_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $\det(t_{ij}) \neq 0$
$\left(\boxed{t_{ij}}\right)^T \cdot A \cdot \left(\boxed{t_{ij}}\right)$ hat alle Hauptminoren $\neq 0$. Falls dies nicht erfüllt ist, dann formen wir um:

$$A' = \left(\boxed{P_{zs}(t_{11}, \ldots, t_{nn})}\right) \quad \text{mit} \quad D_k = \left|\boxed{P_{zs}(t_{11}, \ldots, t_{nn})}\right| = \overline{P}_k(t_{11}, \ldots, t_{nn})$$

Die $\overline{P}_k(t_{11}, \ldots, t_{nn})$ sind die Minoren. Man erhält, bei ungünstigen Matrizen, Gleichungen: $\overline{P}_1(\ldots, t_{ij}, \ldots) = 0$ oder ... oder $\overline{P}_n(\ldots, t_{ij}, \ldots) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod \overline{P}_j(A) = 0$
Hier ein konkretes Beispiel für (2×2)-Matrizen:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} t_{11} \cdot a + t_{21} \cdot c & t_{11} \cdot b + t_{21} \cdot d \\ t_{12} \cdot a + t_{22} \cdot c & t_{12} \cdot b + t_{22} \cdot d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} t_{11}^2 \cdot a + t_{11}t_{21}(b+c) + t_{21}^2 \cdot d & t_{11}t_{12} \cdot a + t_{21}t_{12} \cdot c + t_{11}t_{12} \cdot b + t_{21}t_{22} \cdot d \\ t_{12}t_{11} \cdot a + t_{22}t_{11} \cdot c + t_{12}t_{21} \cdot b + t_{22}t_{21} \cdot d & t_{12}^2 \cdot a + t_{12}t_{22} \cdot (b+c) + t_{22}^2 \cdot d \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \overline{P_1}(t_{11}, t_{12}, t_{21}) & \overline{P_2}(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) \\ \overline{P_3}(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) & \overline{P_4}(t_{12}, t_{21}, t_{22}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $\overline{P_1} = 0$ oder $\overline{P_1} \cdot \overline{P_4} - \overline{P_2} \cdot \overline{P_3} = 0$

Hier eine weiteres Beispiel mit konkreten Zahlen: Sei $A \in \mathbf{Sym}\,(3,\mathbb{R})$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Für die Hauptminoren gilt: $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = -4$. Nun wählen wir eine zufällige Matrix S:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 12 & 13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \\ 5 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

Nun führen wir eine symmetrische Gauß-Jordan-Transformation durch und erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \\ 5 & -2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 12 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 24 & 0 & 78 \\ 26 & -2 & 88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 12 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 126 & 132 \\ 126 & 1008 & 1121 \\ 132 & 1121 & 1278 \end{pmatrix} \doteqdot A' \end{aligned}$$

Nun gilt für die Hauptminoren von A':

$$D_1 = |30| = 30, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 30 & 126 \\ 126 & 1008 \end{vmatrix} = 12364, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 30 & 126 & 132 \\ 126 & 1008 & 1121 \\ 132 & 1121 & 1278 \end{vmatrix} = 39911532$$

Satz (V.2.5) sagt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & 0 \\ & \boxed{\frac{D_2}{D_1}} & \\ 0 & & \boxed{\frac{D_3}{D_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & & 0 \\ & 412\frac{2}{25} & \\ 0 & & 3228\frac{540}{39911532} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: In der Literatur oft Gram-Schmidt nur für Räume über $\mathbb{R}$ (hermitische Räume über $\mathbb{C}$) In dieser Allgemeinheit gezeigt von Wörtmann, einem ehemaligen Studenten der Universität Dortmund.

5.2.18 Konsequenz von Satz (V.2.5), Satz von Cauchy

Sei M eine symmetrische Matrix mit char $(\mathbb{K}) \neq 2$ und seien alle Hauptminoren $D_1, D_2, \ldots, D_n \neq 0$, so ist M kongruent zu einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} D_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{D_k}{D_{k+1}} & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Klassifikation von symmetrischen Bilinearformen über $\mathbb{C}$ (bzw. Matrizen über $\mathbb{C}$)

$$\mathbf{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

5.2.19 Satz (V.2.6): Spezielle Räume über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Jeder symmetrische Bilinearraum über $\mathbb{C}$ hat eine OB $v_1, \ldots, v_n$ mit $s(v_1, v_1) = \ldots = s(v_r, v_r) = 0$, $s(v_{r+1}, v_{r+1}) = \ldots = s(v_n, v_n) = 1$, r ist durch s eindeutig festgelegt.
<u>Matrizentheoretisch</u>: Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ ist kongruent zu einer Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r})$$

r ist eindeutig durch A bestimmt: $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Rad}(s)) = \mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(A)) = n - \mathbf{rg}(A)$. Zwei symmetrische Matrizen über $\mathbb{C}$ sind genau dann kongruent, wenn sie denselben Rang haben.
<u>Basiswechsel</u>:

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_k \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \textbf{dann} \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \mathbf{S}$$

Bilden wir nun die Determinante, so folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)\right) &= \mathbf{det}\left(\mathbf{S}^T\right) \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right) \cdot \mathbf{det}(\mathbf{S}) = \mathbf{det}(\mathbf{S})^2 \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right) = \mathbf{det}\left((s(v_i, v_j))_{i,j \leq k+1}\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine neue Matrix von s bezüglich Basis $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} & s(v_i, w_{k+1}) = 0 \\ s(v_i, v_j)_{i,j \leq k} & \vdots \\ & s(v_i, w_{k+1}) = 0 \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 & s(w_{k+1}, w_{k+1}) \end{array}\right)$$

Da $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)$ Blockgestalt hat folgt:

$$\mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)\right) = \mathbf{det}(s(v_i, v_j))_{i,j \leq k} \cdot s(w_{k+1}, w_{k+1}) = \prod_1^k s(w_i, w_i) \cdot s(w_{k+1}, w_{k+1})$$

<u>Also</u>: gewünschte Bilinearform. r ist eindeutig durch s bestimmt, denn $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Rad}(s))$, mit $\mathbf{Rad}(s) = \{x | s(x, v) = 0\} = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

Symmetrische Bilinearformen (Matrizen) über $\mathbb{R}$

5.2.20 Satz (V.2.7): Sylvesterscher Trägheitssatz

(i) Eine symmetrische Bilinearform besitzt eine Orthogonalbasis $v_1, \ldots, v_n$ der folgenden Form:

$$\begin{array}{rcll} s(v_i, v_i) & = & 0 & \textbf{für} \quad i = 1, \ldots, r \\ s(v_{r+k}, v_{r+k}) & = & +1 & \textbf{für} \quad k = 1, \ldots, r_+ \\ s\left(v_{r+r_++l}, v_{r+r_++l}\right) & = & -1 & \textbf{für} \quad l = 1, \ldots, r_- \end{array}$$

Dabei gilt: $r + r_+ + r_- = n$, und die Werte r, r_+, r_- sind eindeutig bestimmt (träge / invariant) gegenüber der Wahl einer OB mit $s(w_i, w_i) = 0, +1, -1$).

(ii) Jede symmetrische Matrix $\in$ Sym$(n, \mathbb{R})$ ist kongruent zu genau einer Diagonalform der Art:

$$\textbf{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{r_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r_-})$$

<u>Beweise</u>:

Zu (i):

<u>Existenz</u>: Wähle OB $v_1', \ldots, v_n'$, OE $s(v_1', v_i') = 0$ für $i = 1, \ldots, r$ und $s(v_i', v_i') = 0$ sonst.

$\left[s(\alpha_i v_i', \alpha_i v_i') = \alpha_i^2 s(v_i', v_i')\right]$ **Wähle** $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{|s(v_i', v_i')|}}$, **setze** $\begin{cases} v_i = \alpha_i v_i' & \textbf{für } i = r+1, \ldots, n \\ v_i = v_i' & \textbf{für } i = 1, \ldots, r \end{cases}$

Dann ist $v_1, \ldots v_n$ eine gewünschte OB.

<u>Eindeutigkeit</u>:

Ist $w_1, \ldots, w_n$ eine weitere Basis mit $s(w_i, w_i)$ für $i = 1, \ldots, r' : s(w_1, \ldots, w_{r'}) = 0$, $i = r' + 1, \ldots, r' + r' + r_+' : s\left(w_{r'+1}, \ldots, w_{r'+r_+'}\right) = +1$, $s(w_i, w_i) = -1$ sonst.

$r = r'$: Da "Zahl der Nullen in einer OB" = dim(Rad(s)) Betrachte $U = \underbrace{\left\langle v_1, \ldots, v_{r+r_+}\right\rangle}_{s \geq 0}$,

$U' = \underbrace{\left\langle w_{r'+r_+'+1}, \ldots, w_n\right\rangle}_{s \leq 0}$, da $s\left(\sum_1^{r+r_+} \alpha_i v_i, \sum_1^{r+r_+} \alpha_i v_i\right) = \sum_1^{r+r_+} \alpha_i^2 s(v_i, v_i) \geq 0$

<u>Folgerung</u>: $U \cap U' = \{0\} \quad \Rightarrow \quad$ dim(U) + dim$(U') = (r + r_+) + \left(n - r - r_+'\right) \leq n$

$\Rightarrow \quad r_+ \leq r_+'$ und $r_+' \leq r_+ \quad \Rightarrow \quad r_+ = r_+'$

Daraus folgt auch: $r_- = r_-'$, da $r + r_+ + r_- = n = r' + r_+' + r_-'$

Zu (ii): Folgt aus der Eindeutigkeit

5.2.21 Definition (V.2.e): Signatur - sign(A)

Sei s symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}$ und sei A symmetrische Matrix, wobei A kongruent zu

$$\textbf{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{r_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r_-})$$

Dann definieren wir die Signatur: sign$(A) = r_+ - r_-$.

5.2.22 Ursprüngliche Bedeutung des Trägheitssatzes

(siehe Knebusch-Schneider: Einführung in die reelle Algebra)
Thematik: Anzahl reelle Nullstellen $f = 0$, $f \in \mathbb{R}[X]$
Sturmsche Ketten (1839): $[a, b]$, $f_1 = f$, $f_2 = f', ..., f_k \in \mathbb{R}[X]$
$f_1(a), f_2(a), \ldots, f_k(a) \rightsquigarrow$ **Anzahl Vorzeichenwechsel** $= V(a)$
$f_1(b), f_2(b), \ldots, f_k(b) \rightsquigarrow$ **Anzahl Vorzeichenwechsel** $= V(b)$
Aus $V(a) - V(b) \quad \Rightarrow$ **Anzahl reeller Nullstellen auf** $[a, b]$**.**
$f_a = X^2 + aX + 1 \rightsquigarrow M(f_a)$ **Sylvestermatrix aus**

$$\frac{X \cdot f_a'}{f_a} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot x^{-k}}_{\textbf{Potenzreihengestalt}}, \qquad M(f_a) = \left(\boxed{s_{i+j-2}} \right)$$

Nun: Anzahl der reellen Nullstellen von f_a**: sign** $(M(f_a))$

Symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}$**. V läßt sich zerlegen:**

$$\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(s) \perp \mathbf{V}_+ \perp \mathbf{V}_-$$

wobei $\mathbf{V}_+ = \langle v_1, \ldots, v_{r_+} \rangle$ **Orthogonalbasis,** $s(v_i, v_i) > 0$ **beziehungsweise** $\mathbf{V}_- = \langle w_1, \ldots, w_{r_-} \rangle$ **Orthogonalbasis,** $s(w_i, w_i) < 0$**. Hierbei sind** r_+, r_- **eindeutig bestimmt.**
$(\mathbf{V}_+, s)$**:** $s(v, v) \geq 0$, $s(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad s|_{\mathbf{V}_+}$ **ist positiv definit.**
$(\mathbf{V}_-, s)$**:** $s(w, w) \leq 0$, $s(w, w) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad s|_{\mathbf{V}_-}$ **ist negativ definit.**
Matrizentheoretische Formulierung:
Sei $A \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$**. Dann**

$$A \textbf{ kongruent zu } \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{E}_{r_+}} & & 0 \\ & \boxed{\mathbf{E}_{r_-}} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Anmerkungen:

(i) r, r_+ **und** r_- **sind eindeutig bestimmt**

(ii) r, r_+ **und** r_- **sind ein vollständiges Invariantensystem der Kongruenzklasse.**

5.2.23 Satz (V.2.8): "Zähler reelle Nullstellen"

Zu einem Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ gibt es eine symmetrische Matrix $M(f)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\#\{z \in \mathbb{C} |\, f(z) = 0\} = \mathbf{rg}(M(f))$

(ii) $\#\{x \in \mathbb{R} |\, f(x) = 0\} = \mathbf{sign}(M(f))$

$\mathbf{M}(f) =$ **Sylvestermatrix von** f **(mit** $\mathbf{grad}(f) = n$**)** $= \left(\boxed{s_{i+j-2}}\right)_{i,j=1,\dots n}$, $s_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$,

wobei $f = c \cdot \prod_1^n (X - \alpha_i)$ **in** $\mathbb{C}[X]$

<u>**Bedeutung**</u> **der** s_k**, die alle reell sind:**

$$\frac{Xf'}{f} = \sum_1^n \frac{X}{X - \alpha_i} = \sum_1^n \frac{1}{1 - \alpha_i X^{-1}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^\infty \alpha_i^k X^{-k} = \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k\right) X^{-k} = \sum_{k=0}^\infty s_k X^{-k}$$

5.2.24 Beispiele:

(**a**): $f = X^3 - 3X^2 + 2, \quad f' = 3X^2 - 6X \quad n = 3,\, 2n - 2 = 4 \quad s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$

$\frac{Xf'}{X} = 3X^3 - 6X^2 : X^3 - 3X^2 + 2 = 3 + 3X^{-1} + 9X^{-2} + 21X^{-3} + 61X^{-4} + \dots$

Also sind $s_0 = 3,\, s_1 = 3,\, s_2 = 9,\, s_3 = 21,\, s_4 = 61$ **und**

$$\mathbf{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 61 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rg}(\mathbf{M}(f)) = 3$$

Das heißt (nach (5.2.17)**):** $\mathbf{M}(f)$ **ist kongruent zu** $\begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 10 \end{pmatrix}$**, mit** $r = 0,\, r_+ = 3,\, r_- = 0$

$\Rightarrow$ **Anzahl verschiedener komplexer NS** $= 3$ **und Anzahl verschiedener reellen NS** $= 3$

NS: $x = 1$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2 &= x^3 - x^2 - 2\left(x^2 - 1\right) = x^2(x-1) - 2(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)\left(x^2 - 2x - 2\right) \end{aligned}$$

NS $= \left\{1, 1 \pm \sqrt{3}\right\}$

(**b**): $f = X^2 - a,\, a \in \mathbb{R},\, f' = 2x$

$\frac{Xf'}{X} = \frac{2X^2}{X^2 - a} = \frac{1}{1 - aX^{-2}} = \sum_i \left(aX^{-2}\right)^i = 2 \cdot \left(1 + aX^{-2} \dots\right)$. **Also sind** $s_0 = 2,\, s_1 = 0,\, s_2 = 2a$ **und**

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rg}(M(f)) = \begin{cases} 2 & \textbf{für } a \neq 0 \\ 1 & \textbf{für } a = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{sign}(M(f)) = \begin{cases} 2 & \textbf{für } a > 0 \\ 1 & \textbf{für } a = 0 \\ 0 & \textbf{für } a < 0 \end{cases}, \quad r_+ = r_- = 1$$

Das heißt für $x^2 - a = 0$**:** $\begin{cases} a > 0 & 2 \textbf{ reelle Lösungen} \\ a = 0 & 1 \textbf{ reelle Lösung} \\ a < 0 & \textbf{keine reelle Lösung} \end{cases}$

5.3 Kapitel (IV.3): Hermitesche Formen

5.3.1 Motivation

Spezialfall: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$
Sei $z = u + i \cdot v \in \mathbb{C}$**. Norm** $\|z\| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\langle (u,v), (u,v) \rangle}$
Wir wollen folgende Abbildungen studieren:

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : ((z_1, \ldots, z_m), (w_1, \ldots, w_m)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot w_i$$

5.3.2 Definition (V.3.a): hermitesche Form

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann heißt $h : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, wenn gilt:

(i) $\forall v \in \mathbf{V}$ **ist** $h(v, \cdot) : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ **linear**

(ii) $\forall v, w \in \mathbf{V}$**:** $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$

Folgerungen:
a) $h(v + v', w) = h(v,w) + h(v', w)$**, denn**

$$h(v + v', w) = \overline{h(w, v + v')} = \overline{h(w,v) + h(v', w)} = h(v,w) + h(v', w)$$

Also ist eine hermitesche Form additiv im ersten Argument.
b) Behauptung: $h(\alpha \cdot v, w) = \overline{\alpha} \cdot h(v,w)$**. Es gilt:**

$$h(\alpha \cdot v, w) = \overline{h(w, \alpha \cdot v)} = \overline{\alpha \cdot h(w,v)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{h(w,v)} = \overline{\alpha} \cdot h(v,w)$$

5.3.3 Definition (V.3.b): Hermitesche Matrix

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ **heißt hermitisch, fall** $\overline{A}^T = A$**. Das heißt:**

$$\left(\boxed{\;\overline{a_{ji}}\;} \right) = \left(\boxed{\;a_{ij}\;} \right) \quad \textbf{für alle } i, j = 1, \ldots, n$$

5.3.4 Beispiele für hermitesche Formen

a) Sei A gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 6i & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$**. A ist nicht hermitisch, denn für hermitische Matrizen gilt:** $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$**, also** $a_{ii} \in \mathbb{R}$
b) Sei B gegeben mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 2 \end{pmatrix}$**. B ist hermitische Matrix, da** $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$**.**

5.3.5 Definition (V.3.c): $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{$hermitische $n \times n$ Matrizen$\}$

Bemerkung: A reell, A hermitesch $\Rightarrow$ A symmetrisch:

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ symmetrisch} \\ \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$$

5.3.6 Satz (V.3.1): Beschreibung von hermiteschen Formen durch Matrizen

Bei fester Basis $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die Zuordnung

$$h \mapsto \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) := \left(\boxed{h(v_i, v_j)} \right)_{i,j}$$

eine Bijektion zwischen der Menge der hermiteschen Formen und der Menge der hermiteschen Matrizen $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.
Weiterhin gilt:
Ist $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$ und $w = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j$, dann folgt:

$$h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_j \cdot h(v_i, v_j) = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h(v, w) &= h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j \right) \overset{h \text{ linear}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} h(x_i \cdot v_i, y_j \cdot v_j) \\ &\overset{(\#)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_j \cdot h(v_i, w_j) \overset{(*)}{=} (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu (#): herausziehen der skalaren Faktoren (siehe (V.3.c)-Folgerung b)
Zu ($*$): selber nachrechnen
Konsequenz: $\mathbf{V} = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{A} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, dann sind durch $(x, y) \mapsto \overline{x}^T \cdot A \cdot y$, $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alle hermitischen Formen auf dem $\mathbb{C}^n$ gegeben.

5.3.7 Definition (V.3.d): Radikal einer hermiteschen Form

Sei h Hermitesche Form.
Wir definieren: $\mathbf{Rad}(h) := \{ v \in \mathbf{V} |\, h(v, \mathbf{V}) = 0\}$ (wird als Radikal von h bezeichnet.)
Bemerkung: $v \in \mathbf{Rad}(h) \Leftrightarrow h(\mathbf{V}, v) = 0$
Beweis: $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$. Es folgt die Behauptung.

5.3.8 Satz (V.3.2)

Bei fester Basis $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$, gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \in \mathbf{Rad}\,(h) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Beweis: analog zum Beweis des Satzes für die symmeterische Bilinearform (**V**.1.1)**.**

5.3.9 Korollar (V.3.3)

Sei h Hermitesche Form.
Dann: h nicht ausgeartet, d.h.: $\mathbf{Rad}\,(h) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{Kern}\,(h\,(v, \mathbf{V})) = \{0\}$, also hat $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h)$ Vollrang $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h)$ ist regulär.

5.3.10 Satz (V.3.4): Basiswechsel für hermitesche Formen

Basiswechsel von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(\mathbf{id})$
Dann: $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}\,(h) = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h) \cdot \mathbf{S}$
Beweis: Selber nachrechnen

5.3.11 Definition (V.3.e): Kongruenz vom Hermiteschen Matrizen

$A, B \in \mathcal{H}_n\,(\mathbb{C})$ **heißen kongruent, wenn es eine $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{C})$ gibt mit**

$$B = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$$

Bemerkung: Seien $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{C})$, $A \in \mathcal{H}_n\,(\mathbb{C})$. Ist nun $\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} \in \mathcal{H}_n\,(\mathbb{C})$?
Dann müßte gelten: $\overline{\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}^T = \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$.
Es gilt:

$$\overline{\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}} = \overline{\mathbf{S}^T} \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}}$$

da $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ und $\overline{\mathbf{S}^T} = \overline{\mathbf{S}}^T$.
Auf der anderen Seite:

$$\left(\overline{\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}\right)^T = \left(\overline{\mathbf{S}^T} \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}}\right)^T = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \overline{A}^T \cdot \overline{\mathbf{S}^T}^T = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \overline{\mathbf{S}}$$

da $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ und $\overline{A}^T = A$ nach Definition.
Im allgemeinen falsch: $\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \overline{\mathbf{S}} \neq \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$ für $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{C})$
Wohldefiniertheit: Dagegen

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}\right)^T = \left(\mathbf{S}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}}\right)^T = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \overline{A}^T \cdot \mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$$

Also: $\left(\overline{\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}\right)^T \in \mathcal{H}\,(\mathbb{C})$

5.3.12 Definition (V.3.f): Orthogonalbasis einer hermiteschen Form

Sei h eine hermitesche Form auf $\mathbf{V}$, $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt Orthogonalbasis von h wenn gilt:

$$h(v_i, v_j) = 0 \quad \textbf{für } i \neq j$$

Matrizentheoretische Formulierung:

$$\mathfrak{A} \textbf{ ist Orthogonalbasis} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_r \end{pmatrix} \quad \textbf{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Beweis:
“$\Rightarrow$” generell gilt: $h(v,v) \in \mathbb{R}$, **denn** $h(v,v) = h(v,v)$
“$\Leftarrow$” klar nach Definition

5.3.13 Satz (V.3.5) Sylvestescher Trägheitssatz für hermitesche Formen

(i) Sei $(\mathbf{V}, h)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form. Dann gibt es eine orthogonale Zerlegung für $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(h) + \mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-$$

mit $v \in \mathbf{V}_+ \quad \Rightarrow \quad h(v,v) \geq 0$. **Falls** $h(v,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$
beziehungsweise $w \in \mathbf{V}_- \quad \Rightarrow \quad h(w,w) \leq 0$. **Falls** $h(w,w) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0$
(ii) Sei $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Dann gibt es $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ mit

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{E}_{r_+}} & & 0 \\ & \boxed{\mathbf{E}_{r_-}} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Dabei sind r_+, r_- eindeutig bestimmt.
<u>Beweis zu *(ii)*</u>:

$$\textbf{Sei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \textbf{ wobei } a_{ii} \in \mathbb{R} \textbf{ und } \overline{a_{ji}} = a_{ij}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung sei nun $n = 2$.
Damit ist $A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix}$, **mit** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **und** $b \in \mathbb{C}$
Fall 1: $\alpha \neq 0$. Wir formen mit einem symmetrischen Gauß-Jordan Verfahren um.
Sei $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Dann:**

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\overline{b}}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \overline{b} & -\overline{b} \cdot \frac{b}{\alpha} + \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \frac{\overline{b} \cdot b}{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie erhalten wir nun ± 1 für die Einträge?

$\alpha \neq 0$ **nach Voraussetzung. Sei nun** $\beta' = \beta - \frac{\overline{b} \cdot b}{\alpha}$ (β' **ist Reell). Es gilt:**

$$\begin{aligned} \overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x \cdot \overline{x} & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Falls $\alpha > 0$**: Setze** $x := \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$**. Falls** $\alpha < 0$**: Setze** $x := \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$**.**

Damit erhalten wir: $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{|\alpha|} & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$**.**

Wir verfahren analog für β' **und erhalten** $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$**, wobei** $* = -1, 0, +1$**.**

2. Fall: Sei nun $\alpha = 0$**. Wir unterscheiden nun zwei weitere Fälle:**

Sei $\beta \neq 0$**. Dann tauschen wir die** 0 **und** β **durch eine symmetrische Gauß-Jordan-Transformation:**

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & b \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir den ersten Fall anwenden.

Sei nun $\beta = 0$**. Dann erhalten wir:**

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & \overline{\gamma} \cdot b + \gamma \cdot \overline{b} \end{pmatrix}$$

Falls $b + \overline{b} \neq 0$**, dann setze** $\overline{b} := r \cdot i$ **und wende den vorherigen Fall an.**

Falls $b + \overline{b} = 0$**, dann wähle ein** $\gamma \in \mathbb{C}$**, so daß** $\overline{\gamma} \cdot b + \gamma \cdot \overline{b} \neq 0$ **und wende obigen Fall an.**

5.3.14 Schema der Diagonalisierung (von Matrizen)

Grundoperationen: symmetrische Bilinearformen: $\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$

Symmetrischer Gauß-Jordan-Prozeß: Sei $a \in \mathbb{C}$**:**

$\mathbf{S}$	$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A$	$A \cdot \mathbf{S}$
Multiplikation mit Skalar a	i-te Zeile mit $\overline{a}$ multipliziert	i-te Spalte mit a multipliziert
Vertauschung	i-te und j-te Zeile vertauscht	i-te und j-te Spalte vertauscht
Addition eines Vielfachen a	Addition des $\overline{a}$-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile	Addition des a-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte

Abbildung V-11: Grundoperationen

Schließlich erhalten wir: $\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$**.** A **liefert hermitesche Form** h_A**:** $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$**,** $(x, y) \mapsto \overline{x}^T \cdot A \cdot y$

h_A-Orthogonalbasis sind die Spaltenvektoren von S:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \cdots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Daher die Matrizenmultiplikation in neuer Perspektive:

$$\begin{pmatrix} \leftarrow & a_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & a_n & \rightarrow \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \left(\boxed{\langle a_i, b_i \rangle} \right)_{i,j}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Damit folgt:

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \left(\boxed{\overline{v_i}^T \cdot A \cdot v_j} \right)_{i,j}$$

Wir folgern: $\overline{v_i}^T \cdot A \cdot v_j = \delta_{ij} \cdot \alpha_i$

5.3.15 Rekursive Konstruktion von S

S ist Produkt von Umformungsmatrizen: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r$
Dann: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r$
(dieselbe Ketten von Umformungsmatrizen auf E angewandt). Nun wenden wir folgendes Schema an:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \overline{\mathbf{S}_r}^T \cdot \ldots \cdot \overline{\mathbf{S}_1}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{E} & \rightarrow & \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_r = \mathbf{S} \end{array}$$

Wie findet man die $\mathbf{S}_i$ (= Umformungen)?
Gegeben $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$: Zuerst betrachten wir a_{11}:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array} \right)$$

Anmerkung: $a_{11} \in \mathbb{R}$, da eine hermitsche Matrix nur reelle Werte auf der Diagonalen hat.
Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall $a_{11} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ durch Spaltenumformungen und simultane Zeilenumformungen erhalten wir A' mit

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Die Matrix B ist in diesem Fall wieder hermitsche Matrix: $\overline{B}^T = B$.

Sei $\overline{\mathbf{S}_0}^T \cdot B \cdot \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$**. Dann**

$$\overline{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{S}_0 \\ 0 & \end{array}\right)}^T \cdot \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{S}_0 \\ 0 & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

2. Fall: $a_{11} = 0$

Nun unterscheiden wir zwei weitere Fälle:

a) $\exists a_{1j} \neq 0 \quad \Rightarrow$ **passende Spalten- beziehungsweise Zeilenadditionen liefern**

$$\left(\begin{array}{c|c} a'_{11} & *\cdots\cdots * \\ \hline * & *\cdots\cdots * \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ * & *\cdots\cdots * \end{array}\right) \quad \textbf{mit} \quad a'_{11} \neq 0$$

b) Alle $a_{1j} = 0 \quad \Rightarrow$ **alle Einträge in der ersten Spalte sind Null, da** $a_{i1} = \overline{a_{1i}}$**. Wir erhalten damit:**

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

5.3.16 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Sei $h : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ **hermitsche Form mit** $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) = \left(\boxed{h(v_i, v_j)}\right)$

Voraussetzung: Alle Hauptminoren $D_k = \begin{vmatrix} h(v_1, v_1) & \cdots & h(v_1, v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ h(v_k, v_1) & \cdots & h(v_k, v_k) \end{vmatrix} \neq 0$

Aus $v_1, \ldots, v_n$ **erhält man die Orthogonalbasis:** $w_1 = v_1$, $w_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot w_j$

(Das heißt: $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ **und** $w_{k+1} \perp \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$**)**

Nun stellt sich die Frage, wie man die α_i **berechnet? Es gilt:**

$$0 = h(w_i, w_{k+1}) = h(w_i, v_{k+1}) + \alpha_i \cdot h(w_i, w_i) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \frac{h(w_i, v_{k+1})}{h(w_i, w_i)}$$

Zusätzliche Eigenschaften: $D_k = \prod_{i=1}^{k} h(w_i, w_i)$**, damit:** $h(w_{k+1}, w_{k+1}) = \dfrac{D_{k+1}}{D_k}$

Anders ausgedrückt:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) \ \textbf{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{D_k}{D_{k-1}} \end{pmatrix}$$

Obige Aussage wird auch als Satz von Cauchy bezeichnet.

5.4 Kapitel (V.4): Euklidsche bzw. unitäre Vektorräume

5.4.1 Vorbemerkung

Hier: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, betrachte $\mathbb{K}$-Vektorräume zusammen mit

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: **symmetrische Bilinearform**

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: **hermitesche Form**

In beiden Fällen bezeichnen wir die Form mit h
Anmerkung: eine hermitesche Form eingeschränkt auf die reellen Zahlen degeneriert zu einer symmetrischen Bilinearform.

5.4.2 Definition (V.4.a): Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ **ist eine positiv definite**

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: **symmetrische Bilinearform**

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: **hermitesche Form**

Das bedeutet, daß zusätzlich gilt: $\forall v$: $h(v, v) \geq 0$, $\forall v \neq 0$: $h(v, v) \gneqq 0$

5.4.3 Beispiele für das Skalarprodukt

(a) Standardskalarprodukt: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. **Es gilt:**

$$((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) \mapsto \langle (z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot w_i$$

Positive Definitheit:

$$\langle (z_1, \ldots, z_n), (z_1, \ldots, z_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0$$

Falls $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |z_i| = 0 \, \forall i \quad \Rightarrow \quad z_i = 0 \, \forall i \quad \Rightarrow \quad z = 0$

(b) Einschränkung von (a) **auf** $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot y_i$

(c) $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ **mit** $X = [a, b]$
Skalarprodukt mit Gewicht: $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot w(t) \, \mathbf{d}t$
$w(t)$ **ist eine stetige Gewichtsfunktion, wobei** $g(t) > 0$ **auf** X
Dieses Beispiel ist positiv definit, da

$$\int_a^b (f(t))^2 \cdot w(t) \, \mathbf{d}t \geq 0 \qquad \int_a^b (f(t))^2 \cdot w(t) \, \mathbf{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0 \quad \textbf{auf } [a, b]$$

Schon gezeigt bei der Definition von Definitheit.
(d) Einschränkung von (c) **endlich dimensionale Teilräume**
Der Raum der Polynome ist endlich dimensional:

$$\mathbf{P}_k([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ f \ \textbf{Polynom vom Grad} \leq k\}$$

Es gilt: $\dim(\mathbf{P}_k) = k + 1$. **Auf** $\mathbf{P}_k$ **ist** $(f, g) \mapsto \int_a^b f \cdot g \cdot w \, \mathbf{d}t$ **ein Skalarprodukt.**

5.4.4 Definition (V.4.b): euklidische und unitärer Vektorraum

Ab jetzt als Konvention: V ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sprechen wir von einem euklidischen Vektorraum.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sprechen wir von einem unitären Vektorraum.

5.4.5 Satz (V.4.1)

Jeder Untervektorraum eines euklidischen beziehungsweise unitären Vektorraum ist nicht ausgeartet.
Das heißt: Das Gram-Schmidt Verfahren ist universell anwendbar und liefert (nach Normierung) eine Orthonormalbasis (ONB).

5.4.6 Definition (V.4.c): Orthonormalraum

Es gilt: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle v_i, v_i \rangle = 1$

5.4.7 Beweis zu Satz (V.4.1)

Sei $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{U}} =: h'$ (Einschränkung der Form auf den Unterraum)
Für das Radikal gilt: $\mathbf{Rad}\,(h') = \{ u \in \mathbf{U} | \, \forall u' \in \mathbf{U}\!: \; h'(u, u') = 0\}$.
Insbesondere wähle $u' = u$. Das heißt: $h'(u, u) = \langle u, u \rangle = 0$. Nach Definition des Skalarproduktes folgt: $u = 0$
Also gilt für das Radikal: $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{U}} = 0$ für alle Unterräume.
Zu Gram-Schmidt: $v_1, \dots, v_n$, $\mathbf{U}_k := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{U}_k}$. Die beschreibende Matrix ist:

$$\left(\boxed{\langle v_i, v_j \rangle} \right)_{i,j \leq k}$$

Wir wissen: $\mathbf{Rad}\,(h) = \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h)\right)$

Damit: $\mathbf{Rad}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{U}_k}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ det $\left(\boxed{\langle v_i, v_j \rangle} \right)_{i,j \leq k} \neq 0$

Aus $v_1, \dots, v_n$ gewinnt man Orthogonalbasis $w_1, \dots, w_n$, alle $h(w_i, w_i) \gneqq 0$
Nun wollen wir α_i bestimmen, so daß $h(\alpha \cdot w_i, \alpha \cdot w_i) = 1$.
Nach Definition: $h(\alpha \cdot w_i, \alpha \cdot w_i) = \overline{\alpha} \cdot \alpha \cdot h(w_i, w_i)$. Wählen wir nun $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{h(w_i, w_i)}}$, so erhalten wir die gewünschte Orthonormalbasis $\left(\dfrac{1}{\sqrt{h(w_1, w_1)}} w_1, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{h(w_k, w_k)}} w_k \right)$.

5.4.8 Beispiele für die Berechnung einer Orthonormalbasis

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt.
Nun seien v_1, v_2 gegeben mit $v_1 = (1,1)$ und $v_2 = (2,3)$. Nach Gram-Schmidt folgt:

$$w_1 = (1,1), \qquad w_2 = v_2 + \alpha_1 \cdot w_1$$

Wenn wir nun w_2 berechnen, so nutzen wir aus, daß $w_1 \perp w_2$. Das heißt:

$$0 = \langle w_1, w_2\rangle = \langle w_1, v_2 + \alpha_1 \cdot w_1\rangle = \langle v_1, v_2\rangle + \alpha_1 \cdot \langle v_1, v_1\rangle$$

Einsetzen liefert: $0 = 5 + \alpha_1 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad w_2 = (2,3) - \frac{5}{2} \cdot (1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Wir erhalten damit folgendeOrthogonalbasis: $(1,1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Um eine Orthonormalbasis zu erhalten müssen wir nun die Orthogonalbasis normieren. Wir erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1,1)$$

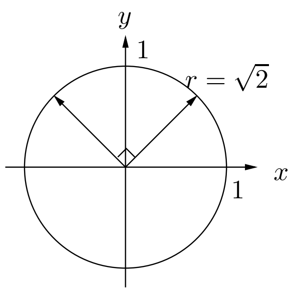

Abbildung V-12: Geometrische Interpretation der Orthonormalbasisvektoren

Alle Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^2$:

$$\|v\| = \langle v, v\rangle = \textbf{Länge von } v = \textbf{Abstand vom Nullpunkt}$$

Allgemein gilt für den Winkel zwischen zwei Vektoren (vergleiche (1.3.5))

$$\cos(\measuredangle) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\| \cdot \|u\|}$$

Die Othonormalbasen des $\mathbb{R}^2$ sind zwei Vektoren der Länge Eins, die senkrecht aufeinander stehen.

5.4.9 Metrik und Skalarprodukt

Das Skalarprodukt liefert "Abstände", das heißt Metrik (vergleiche Analysis)
V sei euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei Skalarprodukt.

5.4.10 Definition (V.4.d): Norm, Metrik

Wir definieren die Norm auf einem Vektorraum V über das Skalarprodukt:

$$\|v\| := \langle v, v\rangle$$

Seien $v, w \in \mathbf{V}$. Wir definieren eine Metrik auf V über die Norm:

$$\mathbf{d}(v, w) := \|v - w\| := \langle v - w, v - w\rangle$$

5.4.11 Satz (V.4.2): Eigenschaften der Norm

Sei V euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum.
Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in \mathbf{V}$

(ii) $\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$

(iii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \ \forall v \in \mathbf{V} \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(iv) Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

5.4.12 Satz (V.4.3): Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Ist V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, so gilt für alle $u, v \in \mathbf{V}$:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.
<u>Beweis</u> **Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:**
1. Fall: $\langle u, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow$ **Behauptung**
2. Fall: $\langle u, v\rangle \neq 0$. **Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:**

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle &= \|u\|^2 + \overline{\lambda} \cdot \langle v, u\rangle + \lambda \cdot \langle u, v\rangle + |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\Re(\lambda) \cdot \langle u, v\rangle + |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \end{aligned}$$

Da $\langle u, v\rangle \neq 0$ ist insbesondere $v \neq 0$. Nun setze $\lambda := -\dfrac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2 \cdot \langle u, v\rangle}$. Setzen wir λ in die obige Formel ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u\|^2 + 2\Re(\lambda) \cdot \langle u, v\rangle + |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2 \cdot \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \quad \Leftrightarrow \quad |\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

Aufgrund der Monotonie der Wurzel folgt: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
<u>**Gleichheit**</u>**:**
"$\Leftarrow$": Seien u und v linear abhängig. OE $u = \mu \cdot v$. Dann folgt:

$$|\langle \mu \cdot v, v\rangle| = |\mu| \cdot \langle v, v\rangle = |\mu| \cdot \|v\|^2$$

"$\Rightarrow$" Gleichheit $\quad \Leftrightarrow \quad u = -\lambda \cdot v = \dfrac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2 \cdot \langle u, v\rangle} \cdot v$. **Damit sind u und v linear abhängig.**

5.4.13 Beweis zu Satz (V.4.2): Eigenschaften der Norm

Zu (1) **und** (2)**: Da** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ **positiv definiet ist** $\langle u,v\rangle \geq 0$ **und** $\langle u,v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$
$\Rightarrow \quad \sqrt{\langle u,v\rangle} = 0$ **mit Gleichheit** $\quad \Leftrightarrow \quad u=0$
Zu (3)**: Nach Definition folgt:**

$$\|\alpha \cdot u\| = \sqrt{\langle \alpha\cdot u, \alpha\cdot u\rangle} = \sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}\cdot\langle u,u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\cdot\langle u,u\rangle} = |\alpha|\cdot\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\alpha|\cdot\|u\|$$

Zu (4)**: Nach Definition folgt:**

$$\|u+v\|^2 \quad = \quad \langle u+v,u+v\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle + 2\Re\left(\langle u,v\rangle\right) + \langle v,v\rangle}_{(*)}$$

Nun schätzen wir zuerst den Realteil ab und anschließend mit der Ungleichung von Cuachy-Schwarz:

$$(*) \leq \langle u,u\rangle + 2\cdot|\langle u,v\rangle| + \langle v,v\rangle \quad \overset{\textbf{CSU}}{\leq} \quad \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

Aufgrund der Monotonie der Wurzel folgt: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

5.4.14 Folgerung aus Satz (V.4.2): Definition der Metrik

$\mathbf{d}(u,v) := \|u-v\|$ **definiert eine Metrik auf V**
Beweis: Man rechne die Eigenschaften einer Metrik nach:
reiroman

- **(i)** $\mathbf{d}(u,v) \geq 0 \quad$ **und** $\quad \mathbf{d}(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=v$
- **(ii)** $\mathbf{d}(u,v) = \mathbf{d}(v,u)$ **(Symmetrie)**
- **(iii)** $\mathbf{d}(u,v) \leq \mathbf{d}(u,w) + \mathbf{d}(w,v) \ \forall w \in \mathbf{V}$

Hauptachsentransformation

Es folgen drei Fassungen des Satzes über Hauptachsentransformation

5.4.15 Satz (V.4.4.a): 1.Version Hauptachsentransformation

Sei $(\mathbf{V}\langle\cdot,\cdot\rangle)$ **euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum,** h **eine symmetrische beziehungsweise hermitesche Form auf V.**
Dann existiert eine Orthonormalbasis von V, die Orthogonalbasis für h **ist.**

5.4.16 Definition (V.4.d): Orthogonale Gruppe

Wir definieren: $\mathcal{O}(n) := \left\{ A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \middle| A^T\cdot A = A\cdot A^T = \mathbf{E}_n \right\}$ **ist die orthogonale Gruppe. Ihre Elemente heißen orthogonale Matrizen, sie ist Gruppe unter der Matrizenmultiplikation.**

5.4.17 Definition (V.4.e): Unitäre Gruppe

Wir definieren: $\mathcal{U}(n) := \left\{ A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \middle| \overline{A}^T\cdot A = A\cdot\overline{A}^T = \mathbf{E}_n \right\}$ **ist die unitäre Gruppe. Ihre Elemente heißen unitäre Matrizen,sie ist Gruppe unter der Matrizenmultiplikation.**

5.4.18 Interpretation

(i) $S \in \mathcal{O}(n)$ **beziehungsweise** $\mathcal{U}(n)$ $\Leftrightarrow$ **Spaltenvektoren bilden Orthonormalbasis für das Skalarprodukt**

(ii) Diagonalisierbarkeit von symmetrischen beziehungsweise hermiteschen Matrizen (wegen $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$ **beziehungsweise** $\mathbf{S}^{-1} = \overline{\mathbf{S}}^T$**) bezüglich "ausgezeichneter" Transformationsmatrizen und mit rellen Eigenwerten.**

5.4.19 Bemerkungen

a) Die Spalten einer orthogonalen beziehungsweise unitäre Matrix bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ **beziehungsweise** $\mathbb{C}^n$ **bezüglich des Standardskalarproduktes (folgt aus Definition).**
Die Umkehrung gilt ebenfalls:
Eine Matrix $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ **(**$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **bzw.** $\mathbb{C}$**) ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten von** A **eine Orthonormalbasis des** $\mathbb{R}^n$ **bzw** $\mathbb{C}^n$ **bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.**
b) Aus der Definition folgt ebenfalls: $\overline{A}^T = A^{-1}$

5.4.20 Satz (V.4.4.b): 2.Version Hauptachsentransformation

Sei $A \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$ **beziehungsweise** $A \in \mathcal{H}(n, \mathbb{C})$**. Dann gibt es ein** $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ **beziehungsweise** $\mathbf{S} \in \mathcal{U}(n)$ **mit**

$$\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textbf{bzw.} \quad \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei die λ_i **die Eigenwerte von** A **sind. Die Eigenwerte von** A **sind reell und es gilt:**

(i) $\mathbf{rg}(A) = \{\text{Anzahl } i |\, \lambda_i \neq 0\}$

(ii) $\mathbf{sign}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{sgn}(\lambda_i)$

(iii) i**-te Spalte von S ist Eigenvektor zum Eigenwert** λ_i

---

5.4.21 Satz (V.4.5)

Sei $(\mathbf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ **ein endlich dimensionaler euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum und sei** $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$**. Zu** f **existiert genau ein Endomorphismus** $f^{\mathbf{ad}}$ **auf V mit** $\left\langle f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle = \langle u, f(v)\rangle \ \forall u, v \in \mathbf{V}$**. Dieser Endomorhpismus heißt der zu** f **adjungierte Endomorphismus.**

5.4.22 Definition (V.4.f): Selbstadjungierter Endomorphismus

$f \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$ **heißt selbstadjungierend, wenn** $f^{\mathbf{ad}} = f$**.**

5.4.23 Bemerkung

(a) Sei $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis. Es gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right) = \overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}^{T}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i\right)\right\rangle &= \overline{x}^T \cdot \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot y\right) = \left(\overline{x}^T \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\right) \cdot y \\
&= \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)^T \cdot \overline{x}\right)^T \cdot y = \overline{\left(\left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}\right)^T \cdot x\right)}^T \cdot y \\
&\overset{(*)}{=} \left\langle f^{\mathbf{ad}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i\right), \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i\right\rangle = \overline{\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right) \cdot x\right)}^T \cdot y
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. Anmerkung zu $(*)$: Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$.
(b) f selbstadjungierter $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ ist symmterisch beziehungsweise hermitesch, denn

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right) = \overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}}^{T}$$

5.4.24 Satz (V.4.4.c): 3.Version Hauptachsentransformation

Sei $(\mathbf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ endlich dimensionaler euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum. Zu jedem selbstadjungierenden Endomorphismus f auf $\mathbf{V}$ existiert eine Orthonormalbasis bestehehend aus den Eigenvektoren von f. Die Eigenwerte sind reell.

Äquivalenz der Hauptachsentransformationssätze:

5.4.25 (V.4.4.a) $\Rightarrow$ (V.4.4.b)

Angenommen Satz (V.4.4.a) gilt:
Sei $A \in \mathbf{Sym}_n(\mathbb{R})$ beziehungsweise $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Zu A gehört eine symmetrische beziehungsweise hermitesche Form s_A auf $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$.
Nach Satz (V.4.4.a) existiert eine Orthonormalbasis $\mathbb{A}$ bezüglich des Standardskalarprodukt, die gleichzeitig Orthogonalbasis für s_A ist.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s_A) &= \left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}}(\mathbf{id})\right)^T \cdot A \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id}) \\
&= \left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}}(\mathbf{id})\right)^T \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(s_A) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})
\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{B}$ die Standardbasis sei. Da $\mathfrak{A}$ Orthogonalbasis ist, ist $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$ orthogonal beziehungsweise unitär. Deshalb ist $\left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})}\right)^T = \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})\right)^{-1}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind also Eigenwerte von A. Nach Aufgabe (44.b) sind diese Eigenwerte reell. Die restlichen Eigenschaften (i) bis (iii) folgen.

5.4.26 Beweis zu Satz (V.4.5): adjungierten Abbildungen

f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, V euklidicher beziehungsweise unitärer Vektorraum.
$f^{\mathbf{ad}}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definiert durch

$$\left\langle f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle = \langle u, f(v)\rangle \quad \textbf{fr alle } u, v \in \mathbf{V}$$

<u>Existenz</u> (in Stichworten): Sei $\mathfrak{A}$ Orthogonalbasis von V:

$$\overline{\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\right)}^{T} =: \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right)$$

<u>Eindeutigkeit</u>:
Angenommen man hätte $\left\langle \overline{f}(u), v\right\rangle = \langle u, f(v)\rangle$ für alle $u, v \in \mathbf{V}$. Dann folgt:

$$\left\langle \overline{f}(u) - f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle = \left\langle \overline{f}(u), v\right\rangle - \left\langle f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle \overset{\textbf{Def.}}{=} \langle u, f(u)\rangle - \langle u, f(u)\rangle = 0$$

Das gilt für alle $v \in \mathbf{V}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet $\Rightarrow$ $\overline{f}(u) - f^{\mathbf{ad}}(u) = 0 \Leftrightarrow \overline{f}(u) = f^{\mathbf{ad}}(u)$
Laut Übungsaufgabe 44 / LinAII, Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, A:

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad A^{\mathbf{ad}} = \overline{A}^{T}$$

5.4.27 Beweis (V.4.4.b) $\Rightarrow$ (V.4.4.c)

Wähle $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis. Setze $A := \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. Da f selbstadjungiert, ist A symmetrisch beziehungsweise hermitesch. Nach (V.4.4.b) existiert $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ beziehungsweise $\mathbf{S} \in \mathcal{U}(n)$ mit

$$\overline{\mathbf{S}}^{T} \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann liefert die Spalten von S eine Basis $\mathfrak{B}$ von V:

$$w_j = \sum_i s_{ij} \cdot v_i \quad \textbf{für } j = 1, \ldots, n$$

Nachrechnen liefert, daß $\mathfrak{B}$ Orthonormalbasis ist.
Kalkül des Basiswechsels:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \mathbf{S}^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}^{T} \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Also: $\mathfrak{B}$ ist Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

5.4.28 Lemma (V.4.6)

Diese Lemma werden wir im nächsten Beweis brauchen.
In der Situation von (V.4.4.a) gilt: Es existiert f: V $\to$ V, $f = f^{\mathbf{ad}}$: $h(u,v) = \langle u, f(v)\rangle$
Beweis:
Vorüberlegung zur Gestalt von f (wenn es f gäbe, so sähe es folgendermaßen aus):
Wähle dazu Orthonormalbasis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}(f) = \left(\boxed{\ \alpha_{ij}\ } \right), \quad f(v_j) = \sum_i \alpha_{ij} \cdot v_i$$

Dann folgt: $\langle v_i, f(v_j)\rangle = \alpha_{ij}$, weil $\mathfrak{A}$ eine Orthonormalbasis ist. Nach Annahme ist $\langle v_i, f(v_j)\rangle = h(v_i, v_j)$. Daher: Falls f mit der gewünschten Eigenschaft existiert, so muß $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}(f) = \left(\boxed{h(v_i, v_j)} \right) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h)$ sein, insbesondere ist f eindeutig bestimmt.
Existenz:
Wir definieren f: V $\to$ V durch $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}(f) := \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h)$. Dann folgt aus der Definition:

$$\langle v_i, f(v_j)\rangle = h(v_i, v_j) \quad \textbf{für } i, j = 1, \ldots, n$$

Zu zeigen: $\langle u, f(v)\rangle = h(u,v)\ \forall u, v \in \mathbf{V}$. Nachweis durch Darstellung von u, v in der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ durch Verwendung von $\langle v_i, f(v_j)\rangle = h(v_i, v_j)$, $f = f^{\mathbf{ad}}$, weil h symmetrisch beziehungsweise hermitesch.

5.4.29 Beweis (V.4.4.c) $\Rightarrow$ (V.4.4.a)

Wir wissen jetzt: $h(u,v) = \langle u, f(v)\rangle$, $f = f^{\mathbf{ad}}$. Nach (V.4.4.c) existiert Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$
Behauptung: Diese Orthonormalbasis ist Orthogonalbasis für h, denn

$$h(v_i, v_j) = \langle v_i, f(v_j)\rangle = \langle v_i, \lambda_j \cdot v_j\rangle = \lambda_j \cdot \langle v_i, v_j\rangle = \lambda_j \cdot \delta_{ij}$$

5.4.30 Absoluter Beweis der Hauptachsentransformation (V.4.4)

Wir werden die Fassung (V.4.4.b) beweisen
Zuerst: Analyse der Aussage
Angenommen es sei schon bewiesen, daß A eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat. Sei $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Nun gilt:

$$\langle x, Ax\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, A \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda_i \cdot v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i^2$$

Da wir die Eigenwerte schon der Größe nach sortiert haben können wir die Summe mit dem kleinsten Eigenwert λ_1 abschätzen:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i^2 \ge \sum_{i=1}^n \lambda_1 \cdot x_i^2 = \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1 \cdot \langle x, x\rangle$$

$\lceil$ **Nebenrechnung:** $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$, **weil $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis ist** $\rfloor$

Daher $\forall x$: $\langle x, Ax\rangle \geq \lambda_{\mathbf{min}} \cdot \langle x, x\rangle$, Gleichheit für $x = v_1$. Daher:

$$\lambda_{\mathbf{min}} = \min_{x\neq 0} \underbrace{\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}}_{(*)}$$

$(*)$ wir als Rayleigh-Quotient bezeichnet und hat Bedeutung in der Numerik bei der Eigenwertberechnung.

<u>Ansatz zum Beweis</u>

(1) Beweise: es existiert $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} = \dfrac{\langle \overline{v_1}, A\overline{v_1}\rangle}{\langle \overline{v_1}, \overline{v_1}\rangle} = \lambda_1 \in \mathbb{R}$

(2) Zeige, daß eine Minimalität impliziert $A \cdot \overline{v_1} = \lambda_1 \cdot \overline{v_1}$

(3) Setze $v_1 := \dfrac{\overline{v_1}}{\|\overline{v_1}\|}$, Ergänze $v_2, \ldots, v_n$ zu einere Orthonormalbasis. $\mathbf{S}^{-1}$ Matrix des Basiswechsels, $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ beziehungsweise $\mathbf{S} \in \mathcal{U}(n)$ und:

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = v_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

B symmetrisch beziehungsweise hermitesch. Durch Rekursion folgt die Behauptung.

Bemerkung: (1) und (2) implizieren: A hat Eigenvektor zu reellen Eigenwerten.
Alternativer Beweis: Fundamentalsatz der Algebra und Aufgabe 44 / LinA II

Zu (1): Für $x \neq 0$ ist $\dfrac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} = \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, A \cdot \dfrac{x}{\|x\|} \right\rangle$ und $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

Das heißt: $\left\{ \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} \middle| x \neq 0 \right\} = \{ \langle x, Ax\rangle | \, \|1\| = 0\}$

In $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^n \supseteq \{x | \, \|x\| = 1\} = \left\{ x \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\} =: \mathbf{S}^{n-1}$ **($(n-1)$-dimensionale Sphäre)**

Beispiel für Sphären:

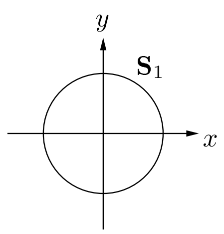

Abbildung V-13: $\mathbf{S}^1$

Für $n = 2$ erhalten wir die Punkte auf dem Einheitskreis, für $n = 3$ erhalten wir die Punkte auf der Kugeloberfläche.

$\mathbf{S}^{n-1}$ ist kompakt, das heißt: Jede Folge in $\mathbf{S}^{n-1}$ hat eine in $\mathbf{S}^{n-1}$ konvergente Teilfolge. Nach Heine-Borel folgt: $\mathbf{S}^{n-1}$ ist beschränkt und abgeschlossen.

In $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C}^n \supseteq \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_i = 1 \right\} = \left\{ z = (\ldots, u_k + i \cdot v_k, \ldots) \middle| \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + v_k^2 = 1 \right\} = \mathbf{S}^{2n-1}$$

In beiden Fällen sind $\mathbf{S}^* = \{\|x\| = 1\}$ kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$. Nun betrachten wir Abbildung $\mathbf{S}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ ist stetig, da es sich um quadratische Polynome in den Koordinaten handelt.
Bilanz: In (1) haben wir damit gezeigt:

(i) $\forall x \in \mathbb{K}^n$ **gilt:** $\langle x, Ax \rangle \geq \lambda \cdot \langle x, x \rangle$ **für** $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\exists v$**:** $\langle v, Av \rangle = \lambda$**,** $\|v\| = 1$

Zu (2): $\mathbb{K}^n = (\mathbb{K} \cdot v) \perp \mathbf{U}$ bezüglich des Standardskalarprodukts
Zu zeigen: $A \cdot \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$, $A \cdot v = \lambda \cdot v$ ($\Rightarrow$ Schritt (3))
Beweis: $\forall u \in \mathbf{U}$:

$$\langle v + u, Av + Au \rangle \geq \lambda \cdot \langle v + u, v + u \rangle = \lambda \cdot (\langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle)$$

Analog zum Beweis von Cauchy-Schwarz, $\quad \Rightarrow \quad A \cdot v = \lambda \cdot v$**,** $A \cdot \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$
Bemerkung: Dieser Beweis zeigt die Existenz von n (reellen) Nullstellen von χ_A. Wir haben damit einen Spezialfall des Fundamentalsatzes der linearen Algebra bewiesen.

5.5 Kapitel (V.5): Moore-Penrose-Inverse

5.5.1 Problemstellung

Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei zu lösen, bei unsicheren Daten (zum Beispiel aus einem physikalischen Experiment). Da in einem Rechner zum Großteil Fließkommazahlen benutzt werden, treten häufig folgende Probleme auf:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10^{-2000} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{rg}\,(\cdot) = 3} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{rg}\,(\cdot) = 2}$$

Damit ist in unserem Beispiel die Lösbarkeit nicht mehr gegeben.

Im Allgemeinen ist $Ax = b$ bei unsicherer Datenlage nicht lösbar! Stattdessen suchen wir ein x, so daß Ax möglichst nahe an b liegt. Solche Lösungen sind Approximationslösungen.

Man nehme die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Dann:

$$\|Ax - b\| = \min_y \|Ay - b\|$$

Frage: Gibt es ausgezeichnete approximative Lösungen?

Die Antwort ist natürlich Ja: $\mathbf{MP}\,(A)\,(b)$. Diese Problemstellung wird in tieferem Detail in der Numerik behandelt.

5.5.2 Allgemeiner Rahmen

Sei f: $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$, wobei $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ euklidische beziehungsweise unitäre Vektrorräume seien.

Zerlegung XYPic

Behauptung: f_0 ist bijektiv. (Zusatzaufgabe 13: Unter anderem über Dimensionsformeln zu beweisen) $\quad \Rightarrow \quad g_0$: $\mathbf{Bild}\,(f) \to (\mathbf{Kern}\,(f))^{\perp}$, $g_0 = f_0^{-1}$

$g := \mathbf{MP}\,(f)$: $\mathbf{W} \to \mathbf{V}$, $w = u_1 + u_2$, $u_1 \in (\mathbf{Bild}\,(f))^{\perp}$, $u_2 \in \mathbf{Bild}\,(f)$

$g\,(w) = g_0\,(u_2) = f_0^{-1}\,(u_2) \in \mathbf{V}$

5.5.3 Satz (V.5.1): Moore-Penrose-Inverse

(i) Sei $b \in \mathbf{V}$. $\mathbf{MP}\,(f)\,(b)$ ist eine approximative Lösung von $f\,(x) = b$, daß heißt:

$$\|f\,(\mathbf{MP}\,(f)\,(b)) - b\| = \min_{x \in \mathbf{V}} \|f\,(x) - b\|$$

Insbesondere: Falls $f\,(x) = b$ lösbar ist, so ist $x = \mathbf{MP}\,(f)\,(b)$ eine Lösung.

(ii) $\mathbf{MP}\,(f)\,(b)$ ist die (es gibt nur eine) approximative Lösung mit kleinster Abweichung über die Norm (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ von $\mathbf{V}$) gemessen.

Hier kein Beweis.

Tip: Beweis erfolgt über den Satz des Pythagoras:

$$u \perp v \quad \Rightarrow \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

da $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$

5.5.4 Praktische Anwendung

Es gibt numerisch stabile und instabile Lösungsverfahren:

(1) Numerisch stabile Berechnung erfolgt über Singularitätswertzerlegung von A **(hier nicht behandelt, sondern in der Numerik)**

(2) Numerisch instabile Berechnung über lineare Gleichungssysteme.

Wir wollen nun nur (2) **betrachten:**
Sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, A: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
(I) Wir wissen: $\mathbb{K}^n = \mathbf{Kern}(A) \perp (\mathbf{Kern}(A))^\perp$. **Das heißt, man bestimmt eine Basis des Lösungsraumes von** $Ax = 0$: $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{r+1}$, **wobei** $\mathbf{rg}(A) = r$. **Man erhält eine Basis** $v_1, \ldots, v_r$ **von** $(\mathbf{Kern}(A))^\perp$ **durch das Gleichungssystem:**

$$\langle x, v_n \rangle = \langle x, v_{n-1} \rangle = \ldots = \langle x, v_{r+1} \rangle = 0$$

(II) Laut Theorie: $Av_1, \ldots, Av_r$ **ist eine Basis von** $\mathbf{Bild}(A)$. **Bestimme die Basis** $w_{r+1}, \ldots, w_n$ **von** $(\mathbf{Bild}(A))^\perp$**durch das Gleichungssystem:**

$$\langle y, Av_1 \rangle = \langle y, Av_2 \rangle = \ldots \langle y, Av_r \rangle = 0$$

Dann ist $w_{r+1}, \ldots, w_n, Av_1, \ldots, Av_r$ **eine Basis von W.**
(III) Es gilt:

$$\mathbf{MP}(A)(w_{r+1}) = \mathbf{MP}(A)(w_{r+2}) = \mathbf{MP}(A)(w_m) = 0$$
$$\mathbf{MP}(A)(v_i) = v_i \quad \textbf{für } i = 1, \ldots, r$$

Die darstellende Matrix hat nun die folgenden Eigenschaften:

$$B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_{r+1} & \cdots & w_m & Av_1 & \cdots & Av_r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{\doteqdot \mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \cdots & 0 & v_1 & \cdots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

wobei wir $(m - r)$ **Spalten mit Nullen erhalten. Zudem ist S eine reguläre Matrix, da es sich bei den Spaltenvektoren um eine Basis handelt. Lösen wir nun nach** B **auf, so erhalten wir:**

$$B = \mathbf{MP}(A) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \cdots & 0 & v_1 & \cdots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Bemerkungen:

(i) $Ax = b$ **lösbar** $\quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{MP}(A)(b)$ **ist eine Lösung**

(ii) A **invertierbar** $\quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{MP}(A) = A^{-1}$

Kapitel VI: Analytische Geometrie

6.1 Kapitel (VI.1): Koordinatensysteme

6.1.1 Defintion (VI.1.a): Affiner Punktraum $\mathbb{A}^n$

Wir definieren $\mathbb{A}^n(K) = K^n$ als affinen Punktraum wobei

$$\mathbb{A}^n(K) = \{(x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in K\}$$

In diesem Fall sprechen wir von einem Zeilenraum.
Zur Erinnerung: $\mathbb{K}^n$ ist Vektorraum mit $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in \mathbb{K}\}$
Gedankliche Unterscheidung von affinem Punktraum und Vektorraum.
Sei $P = (x_1, \ldots, x_n)$ und $Q = (y_1, \ldots, y_n)$. Für den Verbindungsvektor gilt:

$$\overrightarrow{PQ} := (y_1, \ldots, y_n) - (x_1, \ldots, x_n) = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$$

6.1.2 Drei Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel und Parabel (hier nur Darstellung im $\mathbb{R}^2$)

Die Punktmenge einer Ellipse im Ursprung wird durch folgende Gleichung beschrieben: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

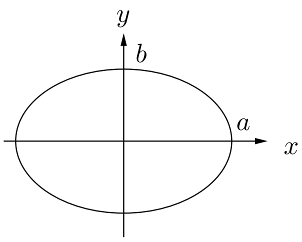

Abbildung VI-14: Ellipse im Ursprung

Eine Ellipse läßt sich geometrisch folgendermaßen konstruieren:

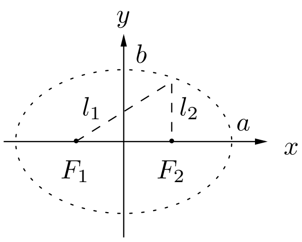

Abbildung VI-15: geometrische Konstruktion einer Ellipse

Dabei sind F_1 und F_2 die Brennpunkte. Die Ellipse ist der geometrische Ort, an dem alle Punkte P mit $l_1 + l_2 = c$ ($c =$ const) sind. Die Punkte $\pm a$ und $\pm b$ bezeichnen die Schnittpunkte mit den Achsen.

Für die Punktmenge einer Hyperbel im Ursprung gilt: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **für** $a, b > 0$

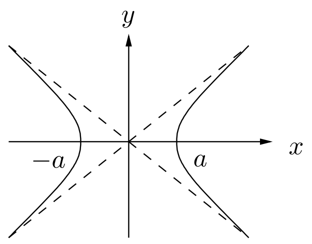

Abbildung VI-16: Hyperbel im Ursprung

Eine Hyperbel läßt sich geometrisch folgendermaßen konstruieren:

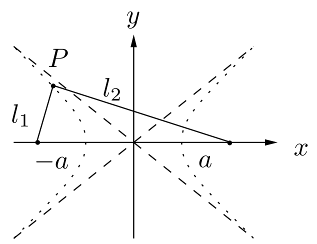

Abbildung VI-17: geometrische Konstruktion einer Hyperbel

Dabei sind F_1 und F_2 die Brennpunkte. Die Ellipse ist der geometrische Ort, wo alle Punkte P mit $l_1 + l_2 = c$ ($c =$ const). Die Winkelhalbierenden sind die Asympthote der beiden Hyperbelarme

Für eine Parabel im Usprung gilt: $y^2 = p \cdot x$ **für** $p > 0$.

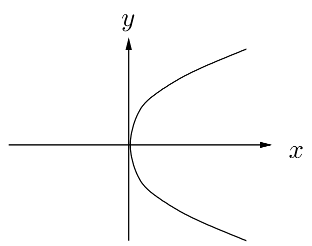

Abbildung VI-18: Parabel im Ursprung

Eine wichtige geometrische Eigenschaft der Parabel ist, daß alle Strahlen im Brennpunkt fokussiert werden.

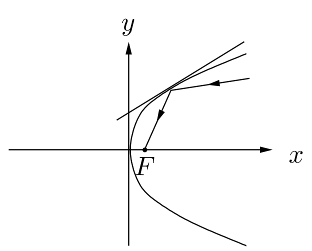

Abbildung VI-19: Fokussierung aller Strahlen um Brennpunkt

Geometrische Konstruktion einer Parabel

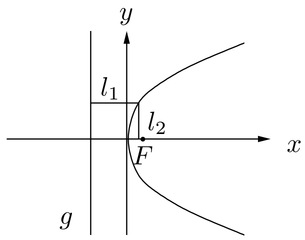

Abbildung VI-20: Geometriosche Konstruktion einer Parabel

Für eine, zur $y-$Achse parallelen Gerade (g) gilt (mit $l_1 \hat{=}$ $\perp$Stütze auf g): $l_1 = l_2$

6.1.3 Koordinatentransformation

Wir wollen nun das Zentrum der Ellipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ **nach** $(1,1)$ **verschieben und die Ellipse anschließend um** $45°$ **gegen den Uhrzeigersinn drehen:**

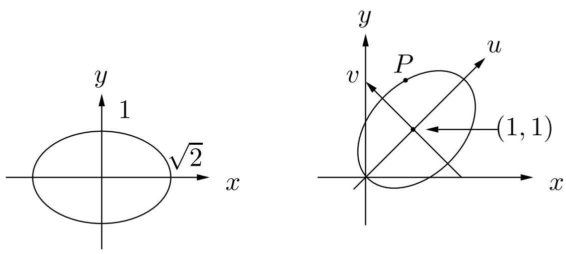

Abbildung VI-21: Verschiebung und Drehung einer Ellipse

Anschließend beschreiben wir die verschobene und gedrehte Ellipse in den (x,y) **−Koordinaten. Hierzu müssen eine Beziehung zwischen den Koordinatensystemen** (x,y) **und** (u,v) **aufstellen:**

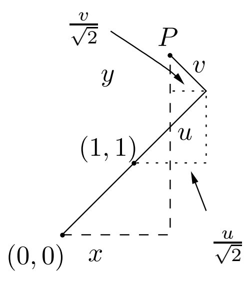

Abbildung VI-22: Beziehung zwischen den Koordinatensystemen (x,y) und (u,v)

Damit: $x - 1 = \dfrac{u-v}{\sqrt{2}}$ **und** $y - 1 = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$**. Addition beziehungsweise Subtraktion liefern:**

$$x + y - 2 = \sqrt{2} \cdot u \qquad -x + y = \sqrt{2} \cdot v$$

Wir wissen: (u,v) **Punkt der Ellipse** $\Leftrightarrow$ $\dfrac{u^2}{2} + v^2 = 1$**. Einsetzen liefert:**

$$\frac{(x+y-2)^2}{4} + \frac{(y-x)^2}{2} = 1$$

Lösen wir nun auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4 &= x^2 + xy - 2x + yx + y^2 - 2y - 2x - 2y + 4 + 2y^2 - 4yx + x^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Relation, der man nicht direkt ansehen kann, daß es sich um eine Ellipse handelt. Nach einem nicht so leichten Koordinatenwechsel können wir es leicht erkennen.

6.1.4 Definition (VI.1.b): Affines Koordinatensystem

Ein System $\mathcal{K} = (P_0 | P_1, \ldots, P_n)$ heißt affines Koordinatensystem des $\mathbb{A}^n$, wenn gilt:

(I) $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{A}^n$

(II) $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, …, $\overrightarrow{P_0P_n}$ **bilden eine Basis des** $\mathbb{K}^n$

Notation und Bezeichnung:

(i) P_0 **wird als Koordinantenursprung bezeichnet**

(ii) $\overline{P_0P_1} := P_0 + \mathbb{K} \cdot \overrightarrow{P_0P_i} = \left\{ P_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{P_0P_i} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$ **wird als i-te Koordinatenachse bezeichnet.**

Sei $P \in \mathbb{A}^n$. P wird bezüglich $\mathcal{K}$ durch ein Koordinatentupel $(y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}}$ beschrieben:

$$P = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \overrightarrow{P_0P_i} \quad \Leftrightarrow \quad P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \overrightarrow{P_0P_i}$$

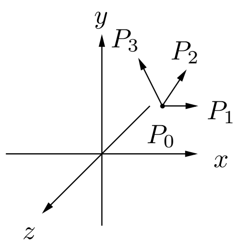

Abbildung VI-23: Koordinatensystem im $\mathbb{A}^3$

6.1.5 Definition (VI.1.c): Standardkoordinatensystem $\mathfrak{E}$

Wir definieren $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{E} = ((0, \ldots, 0) | (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$ wobei die 1 jeweils an der i-ten Stelle steht. Beispiel für $n = 2$:

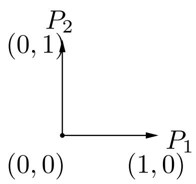

Abbildung VI-24: Beispiel für Standardkoordinatensystem im $\mathbb{R}^2$

6.1.6 Definition (VI.1.d): Euklidisches Koordinatensystem $\mathcal{K}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\mathcal{K}$ heißt euklidisches Koordinatensystem, wenn die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukt bilden.

6.1.7 Sätzchen (VI.1.1): Abstände zweier Punkte im euklidischen Koordinatensystem

Sei $\mathcal{K}$ euklidisches Koordinatensystem, $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{K}}$ und $Q = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}}$. Dann gilt:

$$\mathbf{d}(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Beweis: P **und** Q **können eindeutig dargestellt werden:**

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \qquad Q = P_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$$

Für den Verbindungsvektor gilt nun:

$$Q - P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i - \left(P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot v_i$$

Wir wissen:

$$\left\| \overrightarrow{PQ} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{n} v_i, \sum_{i=1}^{n} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

weil $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis ist.

6.1.8 Beispiel: Koordinatensysteme

Wir wollen endlich dimensionale Körper betrachten. Zur Erinnerung: $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ (p Primzahl).
Der $\mathbb{F}_2^2$ läßt sich leicht aufzeichnen, da es nur aus vier Punkte besteht:

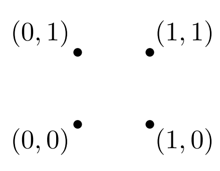

Abbildung VI-25: $\mathbb{F}_2^2$

In diesem Fall ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = ((0,0)|\,(1,0), (0,1))$. Damit sind die "Achsenvektoren" $v_1 = (1,0)$ und $v_2 = (0,1)$.
Für die Punkte der ersten Achse gilt:

$$P_0 + \mathbb{K}v_1 = \{P_0 + \lambda \cdot v_1 \quad \textbf{für } \lambda \in \mathbb{F}_2\} = \{P_0, P_0 + v_1\}$$

Also sind die Punkte der Menge $\{(0,0), (1,0)\}$ die erste Achse und $\{(0,0), (0,1)\}$ die zweite Achse.
Nun wollen wir ein anderes Koordinatensystem $\mathcal{K}' = \{(1,1)|\,(0,0), (1,0)\}$ betrachten. Wir können leicht zeigen, daß $\mathcal{K}'$ auch Koordinatensystem ist, da

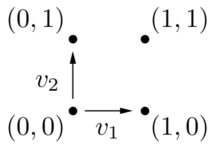

Abbildung VI-26: v_1 und v_2 im $\mathbb{F}_2^2$

(i) Alle Punkt $\in \mathbb{F}_2$

(ii) Für die Verbindungsvektoren gilt:

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = Q_1 - Q_0 = (-1,-1) = (1,1) \qquad \overrightarrow{Q_0Q_2} = Q_2 - Q_0 = (0,-1) = (0,1)$$

Man sieht leicht, daß die Verbindungsvektoren sind linear unabhängig.

Damit ist auch $\mathcal{K}'$ **ein Koordinatensystemdes** $\mathbb{F}_2^2$**.**
Nun wollen wir einen Punkt $P = (0,1)_{\mathcal{K}}$ **in** $\mathcal{K}'$ **beschreiben:** $P = (y_1, y_2)_{\mathcal{K}'}$**. Es gilt:**

$$\begin{array}{rrcl} & \overrightarrow{Q_0P} & = & y_1 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} + y_2 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_2} \\ \Leftrightarrow & (1,0) & = & y_1 \cdot (1,1) + y_2 \cdot (0,1) \end{array}$$

$y_1 = y_2 = 1$ **lößt diese Gleichung eindeutig, da** v_1, v_2 **eine Basis bilden, also gilt:**

$$P = (0,1)_{\mathcal{K}} = (y_1, y_2)_{\mathcal{K}'} = (1,1)_{\mathcal{K}'}$$

6.1.9 Koordinatenwechsel

Gegeben sei $\mathcal{K} = (P_0 | P_1, \ldots, P_n)$ **mit Basis** $\mathfrak{A} = \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right) \doteqdot (v_1, \ldots, v_n)$ **des** $\mathbb{K}^n$ **und** $\mathcal{K}' = (Q_0 | Q_1, \ldots, Q_n)$ **mit Basis** $\mathfrak{B} = \left(\overrightarrow{Q_0Q_1}, \ldots, \overrightarrow{Q_0Q_n}\right) \doteqdot (w_1, \ldots, w_n)$ **des** $\mathbb{K}^n$**.**
Dann existiert eine Übergangsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & \cdots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} =: \mathbf{S} = \left(\boxed{\; s_{ij} \;} \right)$$

Wir wissen aus der Linearen Algebra I: In den Spalten von S stehen die Beschreibungen von w_j **in der Basis** $\mathfrak{A}$**:**

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \cdot v_i$$

Nun: $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{K}} = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{K}'}$, $Q_0 = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{K}}$

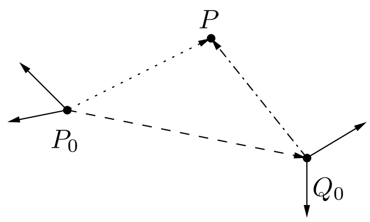

Abbildung VI-27: Schema der Verbindungsvektoren

6.1.10 Satz (VI.1.2): Koordinatenwechsel

In obiger Situation gilt:

$$y^T = S^{-1} \cdot (x-a)^T$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$**,** $y = (y_1, \ldots, y_n)$ **und** $a = (a_1, \ldots, a_n)$

<u>Beweis</u>: Ausrechnen der Koordinaten im neuen System:

$$\overrightarrow{Q_0 P} = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot w_j = -\overrightarrow{P_0 Q_0} + \overrightarrow{P_0 P} = -\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

Einsetzen von $w_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \cdot v_i$ **und anschließendem Koeffizientenvergleich liefert:**

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot y_j = x_i - a_i \quad \textbf{für } i = 1, \ldots, n$$

Damit: $(x-a)^T = \mathbf{S} \cdot y^T \quad \Leftrightarrow \quad y^T = \mathbf{S}^{-1} \cdot (x-a)^T$

6.1.11 Spezialfall des Koordinatenwechsels

Nun wollen wir noch einen Spezialfall des Koordinatenwechsels betrachten:
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**,** $\mathcal{K} = \mathfrak{E}$ **und sei** $\mathcal{K}'$ **euklidisches Koordinatensystem.**
Sind $(w_1, \ldots, w_n)$ **Orthonormalbasis, dann bilden auch** $\left(w_1^T, \ldots, w_n^T\right)$ **eine Orthonormalbasis. Damit:**

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ w_1^T & \cdots & w_n^T \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n)$$

Ein Kennzeichen orthognaler Matrizen ist: $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$

6.1.12 Korollar (VI.1.3)

Beim Übergang von einem Standardkoordinatensystem zu einem euklidischen Koordinatensystem gilt:

$$y = (x-a) \cdot \mathbf{S}$$

<u>Beweis</u>:

$$\begin{aligned} y^T &= \mathbf{S}^{-1} \cdot (x-a)^T = \mathbf{S}^T \cdot (x-a)^T \\ \Leftrightarrow \quad y &= \left(\mathbf{S}^T \cdot (x-a)^T\right)^T = \left((x-a)^T\right)^T \cdot \left(\mathbf{S}^T\right)^T = (x-a) \cdot \mathbf{S} \end{aligned}$$

6.1.13 Beispiel für einen Koordinatenwechsel

Wir betrachten $\mathfrak{E}$ im $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{K}'$, daß aus $\mathfrak{E}$, durch eine Drehung um 45^0 gegen den Uhrzeigersinn und eine anschließende Verschiebung um den Vektor $(1,1)$ hervorgeht. (Vergleiche auch Beispiel mit Ellipse $(6.1.3)$)

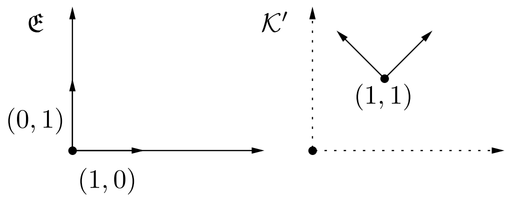

Abbildung VI-28: $\mathfrak{E}$ und $\mathcal{K}'$

Betrachten wir die Vektoren w_1, w_2 näher so sehen wir leicht:

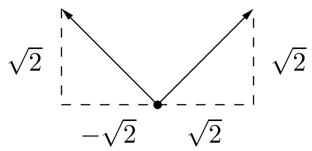

Abbildung VI-29: Nähere Betrachtung von w_1, w_2

Damit: $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{K}'}$ **und** $w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{K}'}$**. Damit sind die Einträge von S bekannt und wir erhalten:**

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$$

Nun wählen wir einen Punkt P:

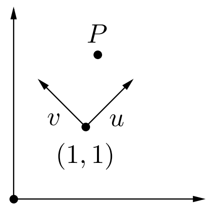

Abbildung VI-30: Punkt P

P hat nun Darstellungen in $\mathfrak{E}$ und $\mathcal{K}'$:

$$P = (x,y)_{\mathfrak{E}} = (u,v)_{\mathcal{K}'}$$

Nun gilt:

$$(u,v)^T = (x-1, y-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ausrechnen liefert das altbekannte Ergebnis:

$$u = \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}, \quad v = -\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

6.2 Quadriken in $\mathbb{R}^n$

6.2.1 Definition (VI.2.a): Quadrik

Gegeben seien $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Die Menge

$$\mathbf{Q} := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i + c = 0 \right\}$$

heißt Quadrik (allgemein Kegelschnitte).

6.2.2 Beispiele für Quadriken

Für den $\mathbb{R}^2$ beschreibt die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse mit den Achsenschnitten a und b

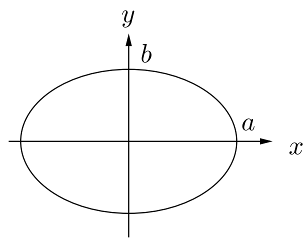

Abbildung VI-31: Ellipse mit Achsenschnitten a und b

Wir haben früher schon gesehen (6.1.3), daß die Gleichung

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y = 0$$

auch eine Ellipse darstellt.

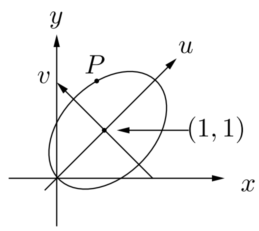

Abbildung VI-32: Ellipse mit obiger Gleichung

Es ist nicht ohne weiteres ersichtlich, daß die obige Gleichung eine Ellipse beschreibt. Deshalb wollen wir nun allgemeine Verfahren entwicklen um Aussagen über Gleichungen der obigen Form treffen zu können.

6.2.3 Vorbemerkungen

Ohne Einschränkung: $a_{ij} = a_{ji}$, denn für $i < j$:

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji}) \cdot x_ix_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \cdot x_ix_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \cdot x_jx_i$$

Es folgt die Behauptung.

Nach Definition: $\mathbf{Q} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$. **Da** $a_{ij} = a_{ji}$ **folgt unmittelbar:**

$$A = \left(\boxed{a_{ij}} \right) \in \mathbf{Sym}\,(n, \mathbb{R})$$

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **und** $b = (b_1, \ldots, b_n)$. **Dann läßt sich die obige Gleichung auch in Matrizenform schreiben:**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0 = x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = 0$$

denn:

$$\begin{aligned} x \cdot A \cdot x^T &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \left(\boxed{a_{ij}} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ b \cdot x^T &= (b_1, \ldots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \end{aligned}$$

Der Satz über die Hauptachsentransformation liefert: $\mathbf{S} \in \mathcal{O}\,(n)$ **mit der Eigenschaft**

$$\mathbf{D} := \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r = \mathbf{rg}\,(A)$ **und** $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Wichtig: Die Spaltenvektoren von S bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

⌈**Beweis:** $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$, **da** $\mathbf{S} \in \mathcal{O}\,(n)$. **Damit:**

$$A \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen wir nun weiter aus, so erhalten wir:

$$A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \cdots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_1 \cdot v_1 & \cdots & \lambda_r \cdot v_r & 0 & \cdots & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Damit: $A \cdot v_i = \lambda \cdot v_i$ **für** $i = 1, \ldots, r$ **und** $A \cdot v_j = 0$ **für** $i = r + 1, \ldots, n$ ⌋

Einsetzen liefert nun: $\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad A = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T$. **Wir erhalten:**

$$x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = x \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot x^T + b \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} \cdot x^T + c = y \cdot \mathbf{D} \cdot y^T + b' \cdot y^T + c$$

wobei $y = x \cdot \mathbf{S}$ **und** $b' = b \cdot \mathbf{S}$**. Betrachtung von** $y \cdot \mathbf{D} \cdot y^T + b' \cdot y^T + c$ **:**

$$
\begin{aligned}
(y_1, \ldots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (b'_1, \ldots, b'_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + c &= 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot y_i^2 + \sum_{i=1}^{r} b'_i \cdot y_i + c &= 0
\end{aligned}
$$

Deutung mittels Korollar (**VI**.1.3)**:** $y = x \cdot \mathbf{S}$**, Übergang von** $\mathfrak{E}$ **zu** $((0, \ldots, 0)|\, P_1, \ldots, P_n)$ **wobei** $\overrightarrow{0P_i} = v_i$

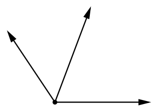

Abbildung VI-33: v_i im Raum

Die Orthonormalbasis, aus Eigenvektoren von A**, liefern die neuen Achsen des Koordinatensystems.**

6.2.4 Beispiel

Nun wollen wir aus unserem altbekannten Beispiel (6.1.3) **eine symmetrische Gestalt herstellen:**

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 - xy - yx - 4x - 4y &= 0
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$**,** $b = (-4, 4)$**,** $c = 0$**.**

Nun wollen wir die Eigenwerte von A **ausrechnen. Wir gehen wie bekannt vor:**

$$
\chi_A = \begin{vmatrix} T-3 & 1 \\ 1 & T-3 \end{vmatrix} = (T-3)^2 - 1 = T^2 - 6T + 8 = (T-2) \cdot (T-4)
$$

Es folgt: $Av_1 = 2v_1$ **und** $Av_2 = 4v_2$ **,** $\lambda_1 = 2$ **und** $\lambda_2 = 4$**. Wir erhalten damit folgende Eigenvektoren:**

$$
\begin{aligned}
A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die bereits bekannte Matrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Quadratische Ergänzung der ersten r Terme liefert:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot y_i + c &=& \quad 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \left(y_i^2 + \frac{b_i'}{\lambda_i} \cdot y_i \right) + \sum_{i=r+1}^{n} b_i' \cdot y_i + c &=& \quad 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \left(y_i + \frac{b_i'}{2y_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i' \cdot y_i \underbrace{+c - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \left(\frac{b_i'}{2\lambda_i} \right)^2}_{\doteqdot c'} &=& \quad 0
\end{aligned}$$

6.2.5 Drei wichtige Quadriken

Zur Erinnerung: Eine Quadrik ist durch eine Gleichung der Form:

$$x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = 0$$

gegeben wobei $A \in \mathbf{Sym}\,(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$
Nun unterscheiden wir drei verschiedene interessante Fälle:

(I) $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_n = c' = 0$

(II) $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_n = 0$ **und** $c' \neq 0$

(III) Ein $b'_j \neq 0$ **für** $j \in \{r+1, \ldots, n\}$

<u>Betrachtung Fall (I)</u>:

Koordinatenwechsel liefert: $z_i = y_i + \dfrac{b_i'}{2\lambda_i}$ **für** $i = 1, \ldots, r$ **und** $z_j = y_j$ **für** $j = r+1, \ldots, n$.
Damit erhalten wir für den endgültigen Koordinatenwechsel:

$$z = (z_1, \ldots, z_n) = x \cdot \mathbf{S} + \left(\frac{b_1'}{2\lambda_1}, \ldots, \frac{b_r'}{2\lambda_r}, 0, \ldots, 0 \right) = (x - a) \cdot \mathbf{S}$$

Es folgt: $a \cdot \mathbf{S} = -\left(\dfrac{b_1'}{2\lambda_1}, \ldots, \dfrac{b_r'}{2\lambda_r}, 0, \ldots, 0 \right)$

Ergebnis: in neuen Koordinaten hat Q die Gleichung: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot z_i^2 = 0$.

Seien ohne Einschränkung $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ **und** $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+l} < 0$ **wobei** $k + l = r$ **und** $|\lambda_i| = \dfrac{1}{a_i^2}$. **Nun erhalten wir die endgültige Normalform für Q:**

$$\mathbf{Q:} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{z_i^2}{a_i^2} = 0$$

wobei $k + l = r = \mathbf{rg}\,(A)$ **und** $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$.

Nun wollen wir für $n = 2$ die drei verschiedenen Typen von Quadriken betrachten:

<u>Fall (I.1)</u>: Seien λ_1 und λ_2 positiv. Dann erhalten wir eine Quadrik mit folgender Gleichung:

$$\textbf{Q:}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Diese Gleichung wird nur durch $x = y = 0$ gelöst und damit besteht diese Quadrik nur aus dem Punkt $(0, 0)$.

<u>Fall (I.2)</u>: Sei OE λ_1 positiv und λ_2 negativ. Dann erhalten wir eine Quadrik mit folgender Gleichung:

$$\textbf{Q:}\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Wir wollen nun die Lösungsmenge dieser Gleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a} \cdot x \quad \wedge \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge der Gleichung erhalten wir ein Paar von Geraden:

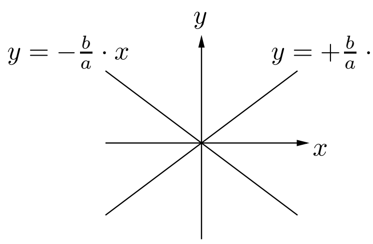

Abbildung VI-34: $y = \frac{b}{a} \cdot x$ und $y = -\frac{b}{a} \cdot x$

<u>Fall (I.3)</u>: Seien λ_1, λ_2 negativ. Wir erhalten eine Quadrik mit folgender Gleichung, die wir durch Multiplikation mit (-1) auf den Fall $(\mathbf{I}.1)$ zurückführen:

$$\textbf{Q:}\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{Q:}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

<u>Betrachtung Fall (II)</u>:

Nach analogem Koordinatenwechsel erhalten wir:

$$\textbf{Q:}\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot z_i^2 + c' \neq 0 \quad \textbf{wobei} \quad c' \neq 0$$

Wir spalten die Summe wiederum in positive und negative λ_i auf und erhalten:

$$\textbf{Q:}\ \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{z_i^2}{a_i^2} + c' = 0$$

wobei $k + l = r = \mathbf{rg}\,(A)$ und $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$.

Nun wollen wir für $n = 2$ die drei verschiedenen Quadriken-Typen betrachten:
Fall (II.1): Seien λ_1 und λ_2 positiv. Wir erhalten eine Gleichung der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + c' = 0$$

Nun müssen wir eine weitere Fallunterscheidung für c' vornehmen:
Fall (II.1.a): Für $c' > 0$ gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$. Damit $\mathbf{Q} = \phi$.
Fall (II.1.b): Für $c' < 0$ gibt es Lösungen. Division durch $|c'|$ liefert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + c' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = |c'| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$$

In diesem Fall ist Q also eine Ellipse.
Fall (II.2): Sei OE λ_1 positiv und λ_2 negativ. Wir erhalten:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c' = 0$$

Als erhalten unabhängig vom Vorzeichen des Skalars c' eine Hyperbel.
Fall (II.3): Dieser Fall läßt sich analog zu Fall (I.3) durch eine Multiplikation mit (-1) auf den Fall (II.1) zurückführen.
Betrachtung Fall (III):
Sei OE $b_{r+1} \neq 0$. Dann erhalten wir nach Koordinatenwechsel:

$$z_i = y_i + \frac{b'_i}{2\lambda_i} \quad \textbf{für } i = 1, \dots, r \qquad z_{r+1} = \sum_{p=r+1}^{n} b'_p \cdot y_p + c' \qquad z_j = y_j \quad \textbf{für } j = r+2, \dots, n$$

OE $\left\|\left(b'_{r+1}, \dots, b'_n\right)\right\| = 1$ **Ergänze** $\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ **zu einer orthogonalen Matrix**

$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} b'_{r+1} & \\ \vdots & * \\ b'_n & \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n-r)$ **($*$orthogonale Ergänzung). Setze** $\overline{\mathbf{S}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{S}' \end{array}\right)$ **damit:**
$\overline{\mathbf{S}} \in \mathcal{O}(n)$ **und es gilt:**

$$\begin{aligned}
z &= (z_1, \dots, z_n) \\
&= (y_1, \dots, y_n) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{array} \end{array} \end{array}\right) + \underbrace{\left(\frac{b'_1}{2\lambda_1}, \dots, \frac{b'_r}{2\lambda_r}, 0, \dots, 0\right)}_{\doteq\, \widetilde{b}} \\
&= x \cdot \underbrace{\overline{\mathbf{S}} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{array} \end{array} \end{array}\right)}_{(\#)} + \widetilde{b}
\end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage, ob $(\#) \in \mathcal{O}(n)$ ist.
Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall. Wir können die Situation aber retten, indem wir Teile der Gleichung modifizieren. Hierzu dividieren wir $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i' \cdot y_i + c'$ durch $\left\| \left(0, \ldots, 0, b_{r+1}', \ldots, b_n\right) \right\|$. Das Ergebnis ist Fall III mit modifzierten λ_i', b_i' und c'. Dann ist $(\#) \in \mathcal{O}(n)$.
Damit erhalten wir den folgenden Koordinatenwechsel:

$$z = x \cdot (\#) + \widetilde{b} = (x - a) \cdot \widetilde{S} \quad \textbf{wobei} \quad \widetilde{S} \in \mathcal{O}(n)$$

Im neuen Koordinatensystem hat Q folgende beschreibende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{z_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{l+k} \frac{z_i^2}{a_i^2} + z_{k+l+1} = 0$$

Betrachtung für $n = 2$. Wir erhalten folgende Gleichung:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{a^2} \quad \vee \quad y = -\frac{x^2}{a^2}$$

In beiden Fällen handelt es sich um eine Parabel.

6.2.6 Definition (VI.2.b): Herstellung der euklidischen Normalenform

Die Transformation der ursprünglichen Gleichung für Q auf die endgültige Gestalt (im Koordinatensystem $z_1, \ldots, z_n$) heißt Herstellung der euklidischen Normalenform.

6.2.7 Definition (VI.2.c): Erweiterte Matrix einer Quadrik

Sei eine Quadrik gegeben mit $x \cdot A \cdot x^T + b \cdot x^T + c = 0$. Die erweitere Matrix A' ist definiert mit:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2} b \\ \hline \frac{1}{2} b^T & A \end{array} \right)$$

6.2.8 Erkennung der Art der Quadrik anhand der erweiterten Matrix

Problem: Wie erkenne man nun anhand gegebener A, b, c in welchem Fall man sich befindet.
Hierzu wird die Erweiterte Matrix einer Quadrik betrachtet:

$$\mathbf{Q} : (1, x) \cdot A' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x^T \end{pmatrix} = 0$$

<u>1. Schritt</u>: Berechnung der erweiterten Matrix

$$A' \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathbf{S} \end{array} \right)^T \cdot A' \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathbf{S} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2} b\mathbf{S} \\ \hline \frac{1}{2} (b\mathbf{S})^T & \mathbf{S}^T A \mathbf{S} \end{array} \right)$$

$$
= \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2}b' \\ \hline \frac{1}{2}\left(b'\right)^T & \mathbf{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccccc} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \cdots & & & \frac{1}{2}b'_n \\ \hline \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \lambda_r & & & \\ \vdots & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ \frac{1}{2}b'_n & & & & & & 0 \end{array}\right)
$$

2. Schritt: Betrachtung der drei Fälle

Fall I/II

$$
\left(\begin{array}{c|cccccc} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \frac{1}{2}b'_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \frac{1}{2}b'_r & & & \lambda_r & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right) \overset{(*)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|cccccc} c' & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & \lambda_r & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right)
$$

Bemerkung: $(*)$ Symmetrische Gauß Jordan Umformung

$c' = c - \left(\frac{1}{2}b'_1\right)^2 \frac{1}{\lambda_1} - \ldots - \left(\frac{1}{2}b'_r\right)^2 \frac{1}{\lambda_r}$

Fall I: $k + l = \mathbf{rg}\,(A)$, $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$, $\mathbf{rg}\,(A) = \mathbf{rg}\,(A') = k + l$, $= 0$

Fall II: $k + l = \mathbf{rg}\,(A)$, $k - l = \mathbf{sign}\,(A)$, $\mathbf{rg}\,(A') = k + l + 1$

$c' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{sign}\,(A') = 1 + \mathbf{sign}\,(A)$, $c' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{sign}\,(A') = \mathbf{sign}\,(A) - 1$

Fall III:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \frac{1}{2}b'_r & \neq 0 \cdots \neq 0 \\ \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \frac{1}{2}b'_r & & & \lambda_r & \\ \hline \neq 0 & & & & \\ \vdots & & & & 0 \\ \neq 0 & & & & \end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} c & \frac{1}{2}b'_1 & \cdots & \frac{1}{2}b'_r & 1 \cdots\cdots 1 \\ \frac{1}{2}b'_1 & \lambda_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \frac{1}{2}b'_r & & & \lambda_r & \\ \hline 1 & & & & \\ \vdots & & & & 0 \\ 1 & & & & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_r & \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & & & \end{array}\right)
$$

Umformungen der Matrizen erfolgten mittels symmetrischen Gauß Jordan Algorithmus

$\mathbf{rg}\,(A') = 2 + \mathbf{rg}\,(A) = k + l + 2$, $\mathbf{sign}\,(A') = \mathbf{sign}\,(A) = k - l$

6.3 Affine Unterräume des $\mathbb{A}^n$

$\mathbb{A}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in K\}$
<u>Objekte</u>: Punkte, Geraden, Ebenen, ...

6.3.1 Definition (VI.3.a): Gerade

Seien $P \in \mathbb{A}^n$, $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, dann ist die Gerade definiert als

$$g_{P;v} = P + \mathbb{K} \cdot v = \{P + t \cdot v | t \in \mathbb{K}\}$$

Wichtig: $\mathbb{K} \cdot v = \left\{ \overrightarrow{P_1 P_2} \middle| P_1, P_2 \in g_{P;v} \right\}$
$g_{P;a} = g_{P;\lambda \cdot a}$ **für** ein $\lambda \neq 0$

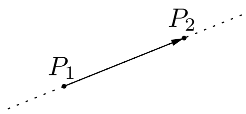

Abbildung VI-35: Gerade durch P_1 und P_2

6.3.2 Beispiel: $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, $n = 2$

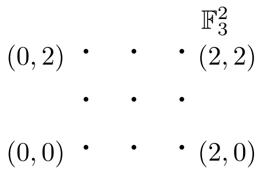

Abbildung VI-36: Visualisierung von $\mathbb{F}_3^2$

1. Gerade: $P = (1,1)$, $v = (2,1)$, $2, 1 \in \mathbb{F}_3 \quad \Rightarrow \quad g_{P;v} = \{(1,1), (0,2), (2,0)\}$

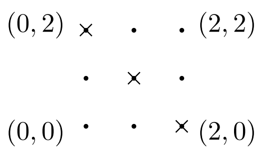

Abbildung VI-37: Visualisierung der 1. Gerade

2. Gerade: $Q = (1,0)$, $v = (2,1)$, $2, 1 \in \mathbb{F}_3 \quad \Rightarrow \quad g_{Q;v} = \{(1,0), (0,1), (2,2)\}$

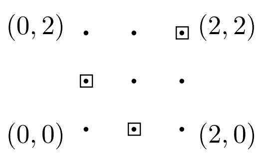

Abbildung VI-38: Visualisierung der 2. Gerade

3. Gerade: $R = (1,2)$, $w = (1,2)$, $2, 1 \in \mathbb{F}_3 \quad \Rightarrow \quad g_{R;w} = \{(1,2), (2,1), (0,0)\}$
Diese Gerade ist parallele zu den vorigen Geraden, da in $\mathbb{F}_3$ $(2,1) = 2 \cdot (1,2)$ **ist, also ist** $g_{R;w} = g_{R;v}$

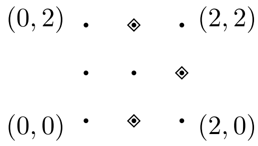

Abbildung VI-39: Visualisierung der 3. Gerade

4. Gerade: $R = (1,2)$, $u = (1,1)$, $2, 1 \in \mathbb{F}_3 \quad \Rightarrow \quad g_{R;u} = \{(1,2), (2,0), (0,1)\}$

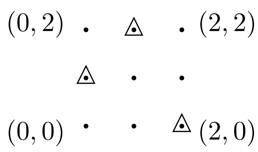

Abbildung VI-40: Visualisierung der 4. Gerade

$g_{R;u}$ **hat jeweils mit** $g_{P;v}$, $g_{Q;v}$, $g_{R;w}$ **genau einen Schnittpunkt gemeinsam.**

6.3.3 Folgerung:

$g_{P;a} = g_{P;b} \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda = 0 : b \neq \lambda \cdot a$

6.3.4 Definition (VI.3.b): Parallelität von Geraden

Sei $g = g_{P;v}$, $h = g_{Q;w}$. **Zwei Geraden heißen parallel wenn gilt:** $b = \lambda \cdot v \quad$ **für ein** $\lambda \neq 0$.
Notation für parallele Geraden g **und** h**:** $g \parallel h$.

6.3.5 Satz (VI.3.1): Eindeutigkeit der Gerade, Parallelenaxiom

(i) **Durch zwei Punkte** $P \neq Q$ **gibt es genau eine Gerade** g, **und zwar gilt:** $g = \overline{PQ} = P + K \cdot \overrightarrow{PQ}$

(ii) **(Parallelenaxiom) Zu einer Geraden** g **und einem Punkt** $P \notin g$ **gibt es genau eine Parallele** h **zu** g **durch** P.

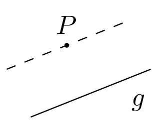

Abbildung VI-41: Illustration für Parallelenaxiom

__Beweis__: **Wir zeigen zuerst die Existenz, dann die Eindeutigkeit der Geraden**
__Zu (*i*)__:
__Existenz__: $g := g_{P;\overrightarrow{PQ}} = \left\{ P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \,\middle|\, \lambda \in K \right\} \ni P, Q$, **da für**
$\lambda = 0 : \ P + 0 \cdot \overrightarrow{PQ} = P \quad$ **und** $\quad \lambda = 1 : \ P + 1 \cdot \overrightarrow{PQ} = Q$.
__Eindeutigkeit__: **Sei** g' **eine Gerade, die** P **und** Q **enthält.**

<u>Behauptung</u>: $g = g'$
<u>Beweis</u>: $g' = g_{R;v}$, $P = R + \lambda_0 \cdot v$, $Q = R + \mu_0 \cdot v$, $P \neq Q \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \neq \mu_0$
Es folgt:

$$\begin{aligned} v &= (\mu_0 - \lambda_0)^{-1} \overrightarrow{PQ} \\ \Rightarrow \quad g' &= \{R + \lambda \cdot v \,|\lambda \in K\} \\ &= \{P + (-\lambda_0) \cdot v + \lambda \cdot v |\, \lambda \in K\} \\ &= \{P + \lambda' \cdot v |\, \lambda \in K\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad g' = g_{P;\overrightarrow{PQ}}$, **da** $v = \alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$, **mit** $\alpha \neq 0$
<u>Zu (ii)</u>:
<u>Existenz</u>: Sei $g = g_{R;v}$, **setze** $h := g_{P;v}$, **dann ist (nach Definition (VI.3.b))** $h \parallel g$, $h \ni P$.
<u>Eindeutigkeit</u>: Analog zu (i).

6.3.6 Definition (VI.3.c): Affiner Unterraum

$\mathbf{L} \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ **heißt affiner Unterraum, wenn folgendes gilt:**

(i) $\mathbf{L} \neq \emptyset$, $\forall P, Q \in \mathbf{L}$, $P \neq Q \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \in \mathbf{L}$

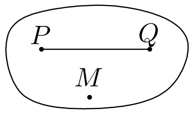

Abbildung VI-42: $\overline{PQ} \in \mathbf{L}$

(ii) $\forall$ **Geraden** $g \subseteq \mathbf{L}$, $\forall P \in \mathbf{L} \setminus g$: **die Parallele zu** g **durch** M **ist in** $\mathbf{L}$ **enthalten**

6.3.7 Beispiel: Affine Unterräume zu $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$

$(0,1)\,\bullet \quad \bullet\,(1,1)$
$(0,0)\,\bullet \quad \bullet\,(1,0)$

Abbildung VI-43: $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$

<u>Frage</u>: Ist $\mathbf{L} = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ **affiner Unterraum?**
Jede Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Gerade.

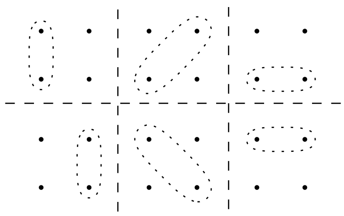

Abbildung VI-44: Alle Geraden in $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$

$\mathbf{L}$ **erfüllt** (i) **aber nicht** (ii).
<u>Konzequenz</u>: ein affiner Unterraum, der $(0,0), (1,0), (0,1)$ **enthält ist** $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$.

Beschreibung affiner Unterräume

6.3.8 Satz (VI.3.2): Äquivalente Beschreibungen für affine Unterräume

Sei $\mathbf{L} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$, $\mathbf{L} \neq \emptyset$.
Dann sind äquivalent:

(i) **$\mathbf{L}$ ist affiner Unterraum.**

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{L}) := \left\{ \overline{PQ} \middle| P, Q \in \mathbf{L} \right\} < K^n$ **und** $\mathbf{L} = P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$ **für jeden Punkt** $P \in \mathbf{L}$.

(iii) $\mathbf{L} = R + U$, **für ein** $R \in \mathbb{A}^n$, $U < K^n$.

(iv) $\exists A \in \mathbf{M}_{m,n}(K)$, $b \in K^n$: $\mathbf{L} = \mathbb{L}(A, b)$, $\mathbf{L} \neq \phi$.

6.3.9 Bemerkung

Unterräume des Vektorraums $\mathbb{K}^n$ $\leftrightarrow$ **homogene Gleichungssysteme** $A \cdot x = 0$

affine Unterraume des $\mathbb{A}^n(K)$ $\leftrightarrow$ **inhomogene Gleichungssysteme** $A \cdot x = b$
(b darf $= 0$ sein!)

Die affinen Unterräume des $\mathbb{K}^n$ sind Spezialfälle der affinen Unterräume von $\mathbb{A}^n$.

6.3.10 Vorbemerkungen zum Beweis von (VI.3.2)

(a) K^n **Standardbilinearform** $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, **nicht ausgeartet**

Sei $U < \mathbb{K}^n$, **dann** $U^\perp = \{u \in \mathbb{K}^n | \langle u, U \rangle = 0\}$, $\mathbf{dim}(U^\perp) = n - \mathbf{dim}(U)$ **und** $(U^\perp)^\perp = U$,

da $U \subseteq (U^\perp)^\perp = U^{\perp\perp}$ **und** $\mathbf{dim}(U) = \mathbf{dim}(U^{\perp\perp}) = n - \mathbf{dim}(U^\perp) = \mathbf{dim}(U)$

(b) $A \cdot x = \begin{pmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow v_m \rightarrow \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \langle v_1, x^T \rangle \\ \vdots \\ \langle v_m, x^T \rangle \end{pmatrix}$

6.3.11 Beweis von Satz (VI.3.2):

$(i) \quad \Rightarrow \quad (ii)$: $u = \overrightarrow{PQ}$, $v = \overrightarrow{RS}$, $P, Q, R, S \in \mathbf{L}$
Zu Zeigen: $u + v = \overrightarrow{AB}$, $A, B \in \mathbf{L}$

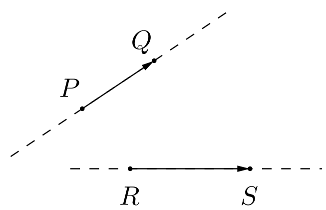

Abbildung VI-45: Geometrische Konstruktion des Beweises - I

Nach Anwendung der Parallelenaxiom folgt:

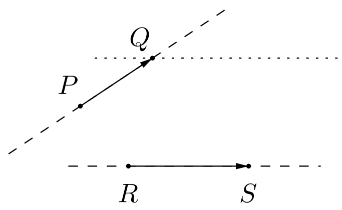

Abbildung VI-46: Geometrische Konstruktion des Beweises - II

Nun tragen wir $\overrightarrow{RS}$ ab und erhalten B:

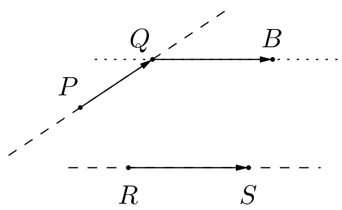

Abbildung VI-47: Geometrische Konstruktion des Beweises - III

Konstruktion der Geraden k:

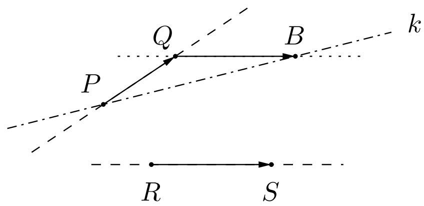

Abbildung VI-48: Geometrische Konstruktion des Beweises - IV

$K = \overline{PB} \subseteq \mathbf{L}$, **da** $P, B \in \mathbf{L}$ **und** $\overrightarrow{PB} = u + v$
Noch zu Zeigen: $\lambda \cdot u \in \mathbf{T}(\mathbf{L})$

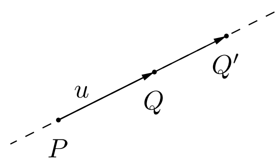

Abbildung VI-49: Geometrische Zusatzskonstruktion des Beweises

$\overrightarrow{PQ'} = \lambda \cdot u$, **da** $\overline{PQ} \in \mathbf{L}$ folgt $Q' \in \mathbf{L}$, **d.h.** $\lambda \cdot u = \overrightarrow{PQ'} \in \mathbf{T}(\mathbf{L})$.
Wähle $P \in \mathbf{L}$. **Dann gilt für beliebeige** $Q \in \mathbf{L}$:
$Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$. **Damit** $\mathbf{L} \subseteq P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$

Umkehrung: $u = \overrightarrow{RS}$, $R, S \in \mathbf{L}$
Zu Zeigen: $P + u \in \mathbf{L}$

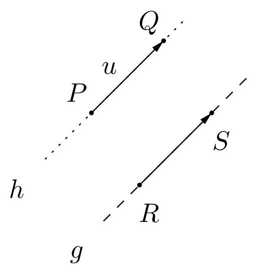

Abbildung VI-50: Geometrische Konstruktion zu $\mathbf{L} = P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$

$h \subseteq \mathbf{L}$, $Q = P + u \in h \subseteq \mathbf{L}$
Insgesamt: $\mathbf{L} \subseteq P + \mathbf{T}(\mathbf{L}) \subseteq \mathbf{L}$ **also** $\mathbf{L} = P + \mathbf{T}(\mathbf{L})$
$(ii) \quad \Rightarrow \quad (iii)$**: klar.**
$(iii) \quad \Rightarrow \quad (iv)$**: Nach Vorraussetzung gilt:** $\mathbf{L} = R + U$.
Wahle $(v_1, \ldots, v_{n-r})$ **Basis von** $U^\perp$. **Setze** $A = \begin{pmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow v_{n-r} \rightarrow \end{pmatrix}$.
Dann:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{L} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle v_1, x^\perp \right\rangle = \ldots = \left\langle v_{n-r}, x^\perp \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot x^\perp \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{L} \quad &\Leftrightarrow \quad x - R \in U \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot (x - R)^\perp = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \cdot x^\perp = A \cdot R^\perp =: b \end{aligned}$$

Sogar: $m = n - \mathbf{dim}(U)$
$(iv) \quad \Rightarrow \quad (i)$**:** $\mathbf{L} = \mathbb{L}(A, b) = x_0 + \mathbb{L}(A, 0) = x_0 + U, \quad U < \mathbb{K}^n$
Nachweis der Eigenschaften eines affinen Unterraumes:

(i) $P = x_o + u_1$, $Q = x_0 + u_2$:
$\overline{PQ} = P + \mathbb{K} \cdot \overrightarrow{PQ} = x_0 + \underbrace{u_1 + \mathbb{K} \cdot (u_2 - u_1)}_{\subseteq U} \subseteq x_0 + U = \mathbf{L}$

(ii) g **Gerade in L:** $g = P + \mathbb{K} \cdot u, \quad u \in U$.
Sei $Q \notin g$, $Q \in \mathbf{L}$, **dann ist die Parallele** h **zu** g, **durch** Q, **zu Zeigen.**
Es ist $h = Q + \mathbb{K} \cdot u = x_0 + \underbrace{u_1 \cdot \mathbb{K} \cdot u}_{\subseteq U} \subseteq \mathbf{L}$

<u>Bedeutung von (ii)</u>: **L affiner Unterraum,** $\mathbf{L} = R + U \quad \Rightarrow \quad U$ **eindeutig und zwar** $U = \mathbf{T}(\mathbf{L})$ **(Translationsvektorraum zu L)**

6.3.12 Definition (VI.3.d): Dimension affiner Unterräume

Sei L affiner Unterraum:

$$\mathbf{dim}\,(\mathbf{L}) \quad := \quad \mathbf{dim}\,(\mathbf{T}\,(\mathbf{L}))$$

denn: $\mathbf{dim}\,(\mathbb{A}^n) = n, \quad \mathbf{T}\,(\mathbf{L}) = \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{dim}\,(\mathbf{Gerade}) = 1$

6.3.13 Definition (VI.3.e): Hyperebene

Die $(n-1)$-dimensionalen affinen Unterräume des $\mathbb{A}^n$ heißen Hyperebenen.

$n = 2$: **Hyperebene $\hat{=}$ Gerade**

$n = 3$: **Hyperebene $\hat{=}$ Ebene**

Beschreibung von Hyperebenen

6.3.14 Satz (VI.3.3): Eindeutigkeit der Hyperebene

Gegeben seien $P_0, \ldots, P_{n-1} \in \mathbb{A}^n$ mit der Eigenschaft, daß $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}}$ linear unabhängig sind.

Dann gibt es genau eine Hyperebene H durch $P_0, \ldots, P_{n-1}$ und sie wird, auf folgende äquivalente Weisen, beschrieben:

(i) Parameterdarstellung:

$$\mathbf{H} = P_0 + \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right\rangle$$

(ii) Gleichungsdarstellung:

$$P \in \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & \leftarrow & P & \rightarrow \\ 1 & \leftarrow & P_0 & \rightarrow \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & \leftarrow & P_{n-1} & \rightarrow \end{vmatrix} = 0$$

Im $\mathbb{R}^3$: $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $P = (x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Beweis:

Zu (i): Selbst oder nie!

Zu (ii):

$$P \in \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P_1} \in \underbrace{\left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right\rangle}_{n-1 \ \textbf{Vektoren}} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{det} \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_0P} \\ \overrightarrow{P_0P_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} P - P_0 \\ P_1 - P_0 \\ \vdots \\ P_{n-1} - P_0 \end{vmatrix}}_{n \times n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & P_0 \\ 0 & P - P_0 \\ 0 & P_1 - P_0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & P_{n-1} - P_0 \end{vmatrix}}_{(n+1) \times (n+1)} = 0$$

Laplace-Rückwärts angewandt liefert:

$$\begin{vmatrix} 1 & P_0 \\ 1 & P \\ 1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & P \\ 1 & P_0 \\ 1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{vmatrix} 1 & P \\ 1 & P_0 \\ 1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Bemerkung zu $(*)$: Vertauschung liefert (-1), aber $(-1) \cdot 0 = 0$.

6.3.15 Bemerkung: Deutung von (ii) als "Hessesche Normalform"

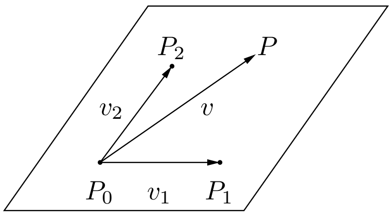

Abbildung VI-51: **H**: Hier $\mathbb{R}^3$

Seien $v := \overrightarrow{P_0P}$, $v_i = \overrightarrow{P_0P_i}$, $i = 1, \ldots, n-1 \quad v = (a_1, \ldots, a_n)$ **und** $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$
Für die Determinate gilt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \overset{(\#)}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \widehat{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \widehat{a_{n-1,i}} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$
$$= \langle (a_1, \ldots, a_n), (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \rangle$$

wobei die $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ aus den $P_0, \ldots, P_{n-1}$ berechenbar sind.
Bemerkung zu $(\#)$: Lapace-Entwicklung nach der 1. Zeile.
Damit folgt: $P \in \mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{P_0P}, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \right\rangle = 0$

Interpretation von $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$:

<u>**Behauptung**</u>**:** $\mathbb{K} \cdot (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \left\langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0 P_{n-1}} \right\rangle^{\perp}$

Damit: $\left\langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0 P_{n-1}} \right\rangle \perp \mathbf{T}(\mathbf{L})$

<u>**Beweis**</u>**:** $0 = \langle v_i, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \rangle$**, denn**

$$\langle v_i, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \rangle = \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

da zwei Zeilen identisch sind.

<u>**Hessesche Normalform**</u>**: Situation wie in** $(\mathbf{VI}.3.3)$

$n = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ **wie oben, dann gilt:**

$$\begin{aligned} P \in \mathbf{H} &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{P_0 P}, n \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle P, n \rangle = \langle P_0, n \rangle \end{aligned}$$

unter Umständen ist $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$**:** $n \to \dfrac{1}{\|n\|} n$ **(normierte Hessesche Normalenform)**

Index

T

U

V

W

Z