Analysis I, WS 04/05
Verzeichnis der wichtigsten Definitionen und Sätze

Lorenz Schwachhöfer

8. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

Definition 1.1 *Sei M eine Menge. Eine* innere Komposition *oder* Verknüpfung *auf M ist eine Abbildung*

$$\circ : M \times M \longrightarrow M.$$

Statt $\circ(x, y)$ schreiben wir auch $x \circ y$.

Definition 1.2 *Sei $\circ$ eine Verknüpfung auf der Menge M.*

1. *$\circ$ heißt* assoziativ*, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

2. *$\circ$ heißt* kommutativ*, falls für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$x \circ y = y \circ x.$$

3. *Ein Element $e \in M$ heißt* neutrales Element bzgl. $\circ$*, falls für alle $x \in M$ gilt:*

$$e \circ x = x \circ e = x.$$

4. *Sei $e \in M$ ein neutrales Element bzgl. $\circ$, und sei $x \in M$. Ein Element $y \in M$ heißt* invers zu x *oder* Inverses von x *bzgl. $\circ$, falls gilt:*

$$x \circ y = y \circ x = e.$$

Falls ein neutrales Element existiert, dann ist es eindeutig bestimmt. Ist $\circ$ assoziativ, so hat jedes Element *höchstens* ein Inverses, das dann mit x^{-1} bezeichnet wird.

Definition 1.3 *Ein* Körper *ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \textit{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},$$

die folgende Eigenschaften haben:

(A1) $+$ ist assoziativ und kommutativ.

(A2) Es existiert ein neutrales Element bzgl. $+$, das wir mit 0 bezeichnen.

(A3) Jedes Element $x \in \mathbb{K}$ hat ein Inverses bzgl. $+$, das wir mit $-x$ bezeichnen.

(M1) $\cdot$ ist assoziativ und kommutativ.

(M2) Es existiert ein neutrales Element bzgl. $\cdot$, das wir mit 1 bezeichnen.

(M3) Jedes Element $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0$ hat ein Inverses bzgl. $\cdot$, das wir mit x^{-1} bezeichnen.

(D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt das Distributivgesetz*:*

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

(T) Es gilt $1 \neq 0$.

Die in der vorstehenden Definition beschriebenen Eigenschaften heißen auch die **Körperaxiome**.

Definition 1.4 *Eine* geordnete Menge *ist eine Menge M mit einer* Ordnungsrelation $<$, *d.h. einer Relation auf M, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(O1) (Trichotomie) *Sind $x, y \in M$, so gilt* genau eine *der folgenden Aussagen:*

$$(i) \quad x < y \qquad (ii) \quad y < x \qquad (iii) \quad x = y$$

(O2) (Transitivität) *Für $x, y, z \in M$ gilt die Implikation:*

$$(x < y) \wedge (y < z) \Longrightarrow (x < z).$$

Ist $<$ eine Ordnungsrelation auf M, so definieren wir auch die folgenden Relationen:

1. $x \leq y$ soll bedeuten: $(x < y) \vee (x = y)$

2. $x > y$ soll bedeuten: $y < x$,

3. $x \geq y$ soll bedeuten: $(x > y) \vee (x = y)$.

Definition 1.5 *Ein* geordneter Körper *ist ein Körper* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *mit einer Ordnungsrelation* $<$, *so daß folgende Aussagen gelten:*

(OA) *Sind* $x, y, z \in \mathbb{K}$ *mit* $x < y$, *dann folgt* $x + z < y + z$.

(OM) *Sind* $x, y, z \in \mathbb{K}$ *mit* $x < y$ *und* $0 < z$, *dann folgt* $xz < yz$.

Definition 1.6 *Sei* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ *ein geordneter Körper. Eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{K}$ *heißt* induktiv *oder ein* induktives System, *falls gilt:*

1. $1 \in A$,
2. $\forall x \in \mathbb{K}, x \in A \Longrightarrow x + 1 \in A$.

Definition 1.7 *Sei* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ *ein geordneter Körper. Die* natürlichen Zahlen in $\mathbb{K}$ *ist die Menge*

$$\mathbb{N}_{\mathbb{K}} := \bigcap_{A \subset \mathbb{K} \text{ induktiv}} A = \{x \in \mathbb{K} \mid \forall A \subset \mathbb{K} \text{ induktiv gilt: } x \in A\}.$$

$\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ ist dann selbst ein induktives System, und ist $A \subset \mathbb{K}$ eine beliebiges induktives System, dann folgt $\mathbb{N}_{\mathbb{K}} \subset A$.

Beweisprinzip der *vollständigen Induktion.* *Gegeben sei eine Menge von Aussagen* $A(n)$, *die von* $n \in \mathbb{N}$ *abhängen. Um nun zu zeigen, daß* $A(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, geht man wie folgt vor:*

1. Induktionsanfang: *Zeige* $A(1)$.
2. Induktionsschritt: *Zeige: Für alle* $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Definition 1.8 *Sei* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ *ein geordneter Körper, und seien* $\mathbb{N}_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}$ *die natürlichen Zahlen in* $\mathbb{K}$. *Dann bezeichnet*

1. $(\mathbb{N}_0)_{\mathbb{K}} := \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \cup \{0\}$,
2. $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} := \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\}$. *Diese Menge wird die* Menge der ganzen Zahlen von $\mathbb{K}$ *genannt.*
3. $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} := \{n \cdot m^{-1} \mid n, m \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, m \neq 0\}$. *Diese Menge wird die* Menge der rationalen Zahlen von $\mathbb{K}$ *genannt.*

Definition 1.9 *Sei* $(M, <)$ *eine geordnete Menge, und sei* $N \subset M$.

1. $S \in M$ *heißt* obere Schranke von N, *falls gilt:* $\forall x \in N, x \leq S$.
2. $s \in M$ *heißt* untere Schranke von N, *falls gilt:* $\forall x \in N, x \geq s$.
3. N *heißt* nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, *falls* N *eine obere (bzw. untere) Schranke hat. Ist* N *sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so heißt* N beschränkt.

4. *Ein* Maximum von N *ist eine obere Schranke von N, die in N enthalten ist.*

5. *Ein* Minimum von N *ist eine untere Schranke von N, die in N enthalten ist.*

6. *Ein Element $S \in M$ heißt* Supremum von N, *falls gilt:*

   (a) *S ist eine obere Schranke von N,*

   (b) *Ist $S' \in M$ eine obere Schranke von N, so ist $S \leq S'$.*

7. *Ein Element $s \in M$ heißt* Infimum von N, *falls gilt:*

   (a) *s ist eine untere Schranke von N,*

   (b) *Ist $s' \in M$ eine untere Schranke von N, so ist $s \geq s'$.*

Falls $N \subset M$ ein Maximum hat, so ist dies eindeutig; gleiches gilt für das Minimum, Supremum und Infimum.

Definition 1.10 *Eine geordnete Menge $(M, <)$ heißt* wohlgeordnet*, falls gilt: Jede nichtleere Teilmenge $N \subset M$ hat ein Minimum.*

Satz 1.11 *Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper, so ist $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ wohlgeordnet.*

Definition 1.12 *Eine geordnete Menge $(M, <)$ heißt* vollständig geordnet*, falls gilt:*

(SUP) *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $N \subset M$ hat ein Supremum.*

Definition 1.13 *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein vollständiger, geordneter Körper, d.h. in $\mathbb{R}$ gelten die Axiome*
(A1), (A2), (A3), (M1), (M2), (M3), (D), (T), (O1), (O2), (OA), (OM), (SUP).

Bemerkung: $\mathbb{R}$ ist durch diese Axiome vollständig charakterisiert, d.h. jeder andere vollständige geordnete Körper ist äquivalent zu $\mathbb{R}$.

Satz 1.14 *In $\mathbb{R}$ gilt auch die folgende Eigenschaft:*

(INF) *Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Definition 1.15 *Ein* Intervall *ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y < z \text{ und } x, z \in I \Longrightarrow y \in I.$$

Satz 1.16 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so daß I von genau einem der folgenden Typen ist:*

1) $I = \emptyset$	*5)* $I = (-\infty, b)$	*8)* $I = [a, b), \quad a < b$
2) $I = \mathbb{R}$	*6)* $I = (-\infty, b]$	*9)* $I = (a, b], \quad a < b$
3) $I = (a, \infty)$	*7)* $I = (a, b), \quad a < b$	*10)* $I = [a, b], \quad a \leq b$
4) $I = [a, \infty)$		

Definition 1.17 *Die* komplexen Zahlen *ist die Menge* $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *mit folgenden Verknüpfungen:*

$$\begin{array}{lllll} \oplus: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}, & (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \circ: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}, & (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{array}$$

Satz 1.18

1. *$(\mathbb{C}, \oplus, \circ)$ ist ein Körper.*
2. *Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \underline{x} := (x, 0)$ ist ein* Homomorphismus*, d.h. es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\underline{x} \oplus \underline{y} = \underline{x + y}$ und $\underline{x} \circ \underline{y} = \underline{xy}$.*
3. *Sei $i := (0, 1)$. Dann gilt für alle $x, y, \in \mathbb{R}$: $(x, y) = \underline{x} \oplus \underline{y} \circ i$. Außerdem ist $i^2 = i \circ i = -\underline{1}$.*

Wegen dieses Satzes ist es unnötig, die Unterscheidung von $\oplus$ und $+$ bzw. $\circ$ und $\cdot$ beizubehalten. Man betrachtet also $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, und kann dann jede komplexe Zahl als $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben. Bei Addition und Multiplikation kann man dann alle Körperaxiome verwenden (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) und muß beim Multiplizieren nur die Beziehung $i^2 = -1$ beachten.

Definition 1.19 *Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist die* Konjugierte von *z die Zahl $\overline{z} := x - yi$.*
x heisst der Realteil *von z, $x = \Re e(z)$.*
y heisst der Imaginärteil *von z, $y = \Im m(z)$.*

Satz 1.20 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

1. $\overline{(\overline{z})} = z$,
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
3. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
4. *Ist $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $z\overline{z} = x^2 + y^2$.*
5. $\Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Satz 1.21 *Für $z \in \mathbb{C}$ definiere $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$. Dann gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$:*

1. *$|z| \geq 0$, und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$,*
2. $|zw| = |z||w|$,
3. *$|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung),*
4. *Für $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist $|x| = x$ falls $x \geq 0$, und $|x| = -x$ falls $x < 0$.*

Definition 1.22 *Seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Funktion.*

1. *f heißt* injektiv*, falls gilt: $\forall x_1, x_2 \in M$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.*
2. *f heißt* surjektiv*, falls gilt: $\forall y \in N$, $\exists x \in M$ mit $f(x) = y$.*
3. *f heißt* bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.*

4. *Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gibt es eine* Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ *mit* $f(f^{-1}(y)) = y$ *für alle* $y \in Y$ *und* $f^{-1}(f(x)) = x$ *für alle* $x \in X$.

5. *M heißt* abzählbar, *falls es eine bijektive Abbildung* $f : \mathbb{N} \to M$ *gibt, oder falls M endlich ist.*

6. *M heißt* überabzählbar, *falls M nicht abzählbar ist.*

Satz 1.23 1. *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

2. *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

2 Folgen und Reihen

Definition 2.1 *Sei M eine Menge. Eine* Folge in M *ist eine Abbildung* $a : \mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a_n$.

Definition 2.2 *Seien* $(M, <)$ *und* $(N, <)$ *geordnete Mengen,* $f : M \to N$. *Dann heißt f*

1. monoton steigend, *falls gilt:* $\forall n, m \in M,\ n < m \Rightarrow f(n) \leq f(m)$.

2. streng monoton steigend, *falls gilt:* $\forall n, m \in M,\ n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$.

3. monoton fallend, *falls gilt:* $\forall n, m \in M,\ n < m \Rightarrow f(n) \geq f(m)$.

4. streng monoton fallend, *falls gilt:* $\forall n, m \in M,\ n < m \Rightarrow f(n) > f(m)$.

5. monoton, *falls f monoton steigend* oder *monoton fallend ist.*

6. streng monoton, *falls f streng monoton steigend* oder *streng monoton fallend ist.*

Definition 2.3 *Sei* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge in M.*

1. *Eine* Teilfolge von (a_n) *ist eine Folge* (b_n), *wobei* $b_n = a_{\varphi(n)}$ *mit einer streng monoton steigenden Funktion* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. *Eine* Umordnung von (a_n) *ist eine Folge* (b_n), *wobei* $b_n = a_{\varphi(n)}$ *mit einer bijektiven Funktion* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Definition 2.4 *Eine* Nullfolge *in $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ist eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon.$$

Satz 2.5 *Seien (a_n) und (b_n) Nullfolgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $c \in \mathbb{K}$. Dann sind auch $(a_n \pm b_n)$ und (ca_n) Nullfolgen.*

Definition 2.6 *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $a \in \mathbb{K}$ heißt* Grenzwert von (a_n), *falls $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.*

(a_n) *heißt* konvergent, *falls es einen Grenzwert hat.*

(a_n) *heißt* beschränkt, *falls* $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq C$.

Satz 2.7 *1. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat* höchstens einen *Grenzwert. Falls also (a_n) konvergent ist, dann schreibt man für den (eindeutigen) Grenzwert:*

$$a = \lim a_n.$$

2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist (a_n) auch beschränkt.

3. Ist (a_n) konvergent, dann ist auch jede Teilfolge und jede Umordnung von (a_n) konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Satz 2.8 (Grenzwertsätze) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $c \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
2. $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$,
3. $\lim(c\ a_n) = c \lim a_n$,
4. *Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim b_n \neq 0$, so ist* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

Satz 2.9 (Satz von der monotonen Konvergenz) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist (a_n) konvergent. Weiterhin gilt:*
Ist (a_n) monoton steigend, so ist $\lim a_n = sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Ist (a_n) monoton fallend, so ist $\lim a_n = inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Satz 2.10 (Vergleichssätze)

1. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt* $\lim a_n \leq \lim b_n$.
2. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$, und es gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls (a_n) und (c_n) beide konvergent sind und $\lim a_n = \lim c_n$, dann ist auch (b_n) konvergent, und $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$.*

Definition 2.11 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann heißt $L \in \mathbb{K}$ ein* Häufungspunkt *von (a_n), falls es eine Teilfolge $(a_{\varphi(n)})$ von (a_n) gibt mit $\lim a_{\varphi(n)} = L$.*

Wegen Satz 2.7, 3. hat eine *konvergente* Folge genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.

Definition 2.12 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die Menge*

$$A_n := \{a_m \mid m \geq n\}, \qquad \textit{so daß} \quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots.$$

Definiere $\overline{s}_n := sup(A_n)$ und $\underline{s}_n := inf(A_n)$. Dann ist $(\overline{s}_n)$ monoton fallend und $(\underline{s}_n)$ monoton steigend, und beide Folgen sind beschränkt. Der Limes Superior *und der* Limes Inferior *von (a_n) sind dann definiert als*

$$\overline{\lim}\ a_n := \lim \overline{s}_n, \qquad \textit{und} \qquad \underline{\lim}\ a_n := \lim \underline{s}_n.$$

Satz 2.13 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\underline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n$.

2. *Falls* $\underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n$, *dann ist* (a_n) *konvergent, und* $\lim a_n = \underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n$.

3. $\underline{\lim}\ a_n$ *und* $\overline{\lim}\ a_n$ *sind Häufungspunkte von* (a_n).

4. *Ist* $L \in \mathbb{R}$ *ein Häufungspunkt von* (a_n), *so ist* $\underline{\lim}\ a_n \leq L \leq \overline{\lim}\ a_n$. *(D.h.:* $\underline{\lim}\ a_n$ *bzw.* $\overline{\lim}\ a_n$ *sind der kleinste bzw. der größte Häufungspunkt von* (a_n)*.)*

Satz 2.14 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann hat (x_n) eine konvergente Teilfolge.*

Definition 2.15 $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *ist eine geordnete Menge mit der Ordnung:* $-\infty < x < \infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Satz 2.16 *Sei $X \subset \hat{\mathbb{R}}$ eine beliebige Teilmenge. Dann hat X ein Infimum und ein Supremum* in $\hat{\mathbb{R}}$.

Definition 2.17 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man sagt* $\lim a_n = \infty$, *falls gilt:*

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow a_n > C.$$

Man sagt $\lim a_n = -\infty$, *falls gilt:*

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow a_n < C.$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Definiert man die Mengen $A_n \subset \mathbb{R}$ wie in Definition 2.12, so existiert $\overline{s}_n := \sup(A_n) \in \hat{\mathbb{R}}$ und $\underline{s}_n := \inf(A_n) \in \hat{\mathbb{R}}$. Daher existieren $\underline{\lim}\ a_n := \lim \underline{s}_n$ und $\overline{\lim}\ a_n := \overline{s}_n$ *in* $\hat{\mathbb{R}}$, selbst wenn (a_n) *nicht* beschränkt ist.

Satz 2.18 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$. Dann gelten alle Folgerungen von Satz 2.13 auch für den Fall* $\underline{\lim}\ a_n, \overline{\lim}\ a_n \in \hat{\mathbb{R}}$.

Außerdem sind $\underline{\lim}\ a_n, \overline{\lim}\ a_n \in \hat{\mathbb{R}}$ *Häufungspunkte, d.h. ist* $\underline{\lim}\ a_n = \pm\infty$, *oder* $\overline{\lim}\ a_n = \pm\infty$, *so gibt es eine Teilfolge von* (a_n), *die gegen* $\pm\infty$ *konvergiert.*

Satz 2.19 (Grenzwertsätze) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *Ist* $\lim a_n = \infty$ *und* $\underline{\lim}\ b_n > -\infty$, *so ist* $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

2. *Ist* $\lim a_n = -\infty$ *und* $\overline{\lim}\ b_n < \infty$, *so ist* $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.

3. *Ist* $\lim a_n = \pm\infty$ *und* $\underline{\lim}\ b_n > 0$, *so ist* $\lim(a_n b_n) = \pm\infty$.

4. *Ist* $\lim a_n = \pm\infty$ *und* $\overline{\lim}\ b_n < 0$, *so ist* $\lim(a_n b_n) = \mp\infty$.

5. *Ist* $\lim |a_n| = \infty$, *so ist* $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Definition 2.20 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. (a_n) heißt* Cauchyfolge, *falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz 2.21 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. (a_n) *konvergiert,*

2. (a_n) *ist eine Cauchyfolge.*

Definition 2.22 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Die zu* (a_n) *gehörige* Reihe *ist die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *wobei* $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. *Man sagt, die Reihe* konvergiert, *falls* (s_n) *konvergiert. Den Grenzwert nennt man den* Wert der Reihe, *und er wird als* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bezeichnet.*

Satz 2.23 *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, *und sei* $c \in \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

1. *Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergieren, dann auch* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, *und es gilt:*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. *Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann auch* $\sum_{n=1}^{\infty}(c\ a_n)$, *und es gilt:*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(c\ a_n) = c\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Satz 2.24 (Cauchykriterium) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert,*

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, k \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j\right| < \varepsilon.$

Satz 2.25 (Nullfolgenkriterium) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann ist* (a_n) *eine Nullfolge.*

Satz 2.26 (Geometrische Reihe) *Sei* $q \in \mathbb{K}$, *wobei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Dann heißt die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ *die* Geometrische Reihe.

1. *Falls* $|q| < 1$, *dann konvergiert die Geometrische Reihe, und* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. *Falls* $|q| \geq 1$, *dann divergiert die Geometrische Reihe.*

Satz 2.27

1. *Die* Harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergiert.*

2. *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ *konvergiert für alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \geq 2$.

Satz 2.28 (Leibnitzkriterium) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die* alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - + \dots$.

Satz 2.29 (Absoluter Konvergenztest) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*. Falls* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *konvergiert, so konvergiert auch* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$*.*

Definition 2.30 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*. Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *heißt* absolut konvergent*, falls* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *konvergiert. Sie heißt* relativ konvergent *oder* bedingt konvergent*, falls* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *konvergiert, aber* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *divergiert.*

Demnach besagt also der Absolute Vergleichstest, daß jede absolut konvergente Folge auch konvergent ist.

Satz 2.31 (direktes Vergleichskriterium) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $b_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Falls* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *konvergiert, so konvergiert* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *absolut.*

2. *Falls* $|a_n| \geq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *divergiert, dann divergiert auch* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$*.*

Satz 2.32 (Quotientenvergleichstest) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $b_n > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Falls* $\displaystyle\overline{\lim}\,\frac{|a_n|}{b_n} < \infty$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *konvergiert, so konvergiert* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *absolut.*

2. *Falls* $\displaystyle\underline{\lim}\,\frac{|a_n|}{b_n} > 0$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *divergiert, dann divergiert auch* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$*.*

Satz 2.33 (Wurzelkriterium) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*.*

1. *Falls* $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, dann konvergiert* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *absolut.*

2. *Falls* $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, dann divergiert* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$*.*

Satz 2.34 (Quotientenkriterium) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Falls* $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

2. *Falls* $\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *dann divergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definition 2.35 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Die zu dieser Folge gehörige* Potenzreihe *ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

Definition 2.36 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Der* Konvergenzradius ρ *der zugehörigen Potenzreihe ist definiert als*

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls} \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ 0, & \text{falls} \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 2.37 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, *und sei* ρ *der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe.*

1. *Für alle* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $|x| < \rho$ *konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ *absolut.*

2. *Für alle* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $|x| > \rho$ *divergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$.

Definition 2.38 *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ *heißt* Exponentialreihe. *Sie hat Konvergenzradius* $\rho = \infty$, *d.h. sie konvergiert für alle* $x \in \mathbb{K}$. *Wir definieren den Wert dieser Reihe als*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots.$$

Definition 2.39 *Sei* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. *Eine* Dezimalentwicklung von x *ist eine Folge* $(z_n)_{n=n_0}^{\infty}$ *in* $\mathcal{Z} := \{0, 1, \dots, 9\}$ *für ein* $n_0 \in \mathbb{Z}$, *so daß*

$$x = \sum_{n=n_0}^{\infty} z_n \ 10^{-n}, \qquad z_{n_0} \neq 0.$$

Satz 2.40 1. *Jedes* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ *hat eine Dezimalentwicklung.*

2. *Jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ hat höchstens zwei Dezimalentwicklungen. In der Tat hat $x \in \mathbb{R}$ zwei Dezimalentwicklungen genau dann, wenn $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $10^k x \in \mathbb{N}$. Sind in diesem Falle*

$$x = \sum_{n=n_0}^{\infty} z_n \; 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} z_n' \; 10^{-n}$$

die beiden Dezimalentwicklungen von x, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq n_0$ mit der Eigenschaft:

   (a) *$z_n = z_n'$ für alle $n < k$.*
   (b) *$z_k = z_k' + 1$.*
   (c) *für alle $n > k$ gilt: $z_n = 0$ und $z_n' = 9$.*

Satz 2.41 (Cauchyprodukt) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so daß die zugehörigen Reihen absolut konvergieren. Definiere $c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Satz 2.42 *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.*

Satz 2.43 (Umordnungssatz) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so daß die zugehörige Reihe absolut konvergiert. Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe gegen den gleichen Wert, d.h.: Ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Bemerkung 2.44 *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ so daß die zugehörige Reihe bedingt konvergiert, so kann man zeigen, daß es für jedes $C \in \mathbb{R}$ eine Umordnung gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = C$. D.h.: Durch Umordnung einer bedingt konvergenten Reihe kann jeder Wert angenommen werden.*

3 Stetigkeit

Definition 3.1 *Sei $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt* Häufungspunkt von X, *falls es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gibt, so daß $\lim x_n = a$ und $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Ist $X \subset \mathbb{R}$, so sagt man, daß ∞ ein Häufungspunkt von X ist, falls X nicht nach oben beschränkt ist.

Ist $X \subset \mathbb{R}$, so sagt man, daß $-\infty$ ein Häufungspunkt von X ist, falls X nicht nach unten beschränkt ist.

Definition 3.2 *Sei $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Sei $a \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von X. Man sagt $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert, falls*

$$\exists L \in \mathbb{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

In diesem Falle nennt man L den Grenzwert, *und schreibt $L = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Falls $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Definition 3.3 *Sei $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Man sagt:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *falls* $\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > C$.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, *falls* $\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < C$.
3. $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$, *falls* $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, x > C \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.
4. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$, *falls* $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, x < C \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.
5. $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$, *falls* $\forall C_1 \in \mathbb{R}, \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, x > C_2 \Longrightarrow f(x) > C_1$.
6. $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$, *falls* $\forall C_1 \in \mathbb{R}, \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, x > C_2 \Longrightarrow f(x) < C_1$.
7. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, *falls* $\forall C_1 \in \mathbb{R}, \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, x < C_2 \Longrightarrow f(x) > C_1$.
8. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, *falls* $\forall C_1 \in \mathbb{R}, \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X, x < C_2 \Longrightarrow f(x) < C_1$.

Satz 3.4 *Sei $X \subset \mathbb{K}$, $f : X \to \mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von X, und sei $L \in \mathbb{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $L = \lim_{x\to a} f(x)$
2. *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim x_n = a$ und $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\lim f(x_n) = L$.

Diese Äquivalenz gilt auch, wenn $X \subset \mathbb{R}$ und $a = \pm\infty$ oder $L = \pm\infty$.

Definition 3.5 *Sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$*

1. rechtsseitiger Häufungspunkt von X, *falls a ein Häufungspunkt von $X \cap (a,\infty)$ ist,*
2. linksseitiger Häufungspunkt von X, *falls a ein Häufungspunkt von $X \cap (-\infty,a)$ ist,*
3. beidseitiger Häufungspunkt von X, *falls a sowohl ein rechtsseitiger als auch ein linksseitiger Häufungspunkt von X ist.*

Definition 3.6 *Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Sei $Z \subset X$. Die* Einschränkung von f auf Z *ist die Funktion $f|_Z : Z \to Y$ mit $f|_Z(x) = f(x)$ für alle $x \in Z$. (D.h. $f|_Z$ ist die gleiche Funktion mit verkleinertem Definitionsbereich).*

Definition 3.7 *Sei $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.*

1. *Ist $a \in \mathbb{R}$ ein linksseitiger Häufungspunkt von X, so ist*
$$\lim_{x\to a^-} f(x) := \lim_{x\to a} f|_{X\cap(-\infty,a)}(x).$$
2. *Ist $a \in \mathbb{R}$ ein rechtsseitiger Häufungspunkt von X, so ist*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) := \lim_{x\to a} f|_{X\cap(a,\infty)}(x).$$

Satz 3.8 *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein linksseitiger (bzw. rechtsseitiger) Häufungspunkt von X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *(bzw.* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$*)*
2. *Für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* X *mit* $\lim x_n = a$ *und* $x_n < a$ *(bzw.* $x_n > a$*) gilt:* $\lim f(x_n) = L$.

Satz 3.9 *Sei $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein beidseitiger Häufungspunkt von X. Dann existiert* $\lim_{x\to a} f(x)$ *genau dann, wenn* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *und* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *beide existieren und gleich sind. In diesem Falle ist* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^\pm} f(x)$.

Definition 3.10 *Sei $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von X.*

$L \in \hat{\mathbb{R}}$ *heißt* Häufungswert von f bei a, *falls es eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* X *gibt mit* $\lim x_n = a$, $x_n \neq a$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $L = \lim f(x_n)$. *Wir definieren*

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{x\to a} f(x) &:= \sup\{L \mid L \text{ ist Häufungswert von } f \text{ bei } a\} \in \hat{\mathbb{R}},\\ \underline{\lim}_{x\to a} f(x) &:= \inf\{L \mid L \text{ ist Häufungswert von } f \text{ bei } a\} \in \hat{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Satz 3.11 *Sei $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von X. Dann gilt* $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$.

Außerdem existiert $\lim_{x\to a} f(x)$ *genau dann, wenn* $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$, *und in diesem Fall ist* $\lim_{x\to a} f(x) = \underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$.

Bemerkung 3.12 *Der vorstehende Satz gilt auch, falls* $a = \pm\infty$ *oder falls* $\underline{\lim}_{x\to a}, \overline{\lim}_{x\to a} = \pm\infty$.

Satz 3.13 (Grenzwertsätze; vgl Satz 2.8) *Sei $X \subset \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ Funktionen. Sei $a \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von X. Dann gilt:*

1. $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$,
2. $\lim_{x\to a}(fg)(x) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$,
3. $\lim_{x\to a}(cf)(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$
4. *Falls* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, *so ist* $\lim_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Bemerkung 3.14 *Es gelten auch die Grenzwertsätze für Grenzwerte $\pm\infty$. Diese sind vollkommen analog zu denen in Satz 2.19*

Definition 3.15 *Sei $X \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei $f : X \to \mathbb{K}$ eine Funktion und sei $a \in X$. Dann heißt f* stetig in a, *falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f *heißt* stetig, *falls f stetig in a ist für* alle $a \in X$.

Satz 3.16 *Sei $X \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei $f : X \to \mathbb{K}$ eine Funktion und sei $a \in X$. Dann gilt:*

1. *Falls a ein Häufungspunkt von X ist, so ist f stetig in a genau dann, wenn* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. *Falls a kein Häufungspunkt von X ist, dann ist f stetig in a (vgl. Hausaufgabe 4.d, Blatt 9).*

Satz 3.17 *Sei $X \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei $f : X \to \mathbb{K}$ eine Funktion und sei $a \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist stetig in a,*
2. *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim x_n = a$ gilt: $f(a) = \lim f(x_n)$.*

D.h.: Eine Funktion ist stetig genau dann, wenn $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$, d.h. falls f mit Grenzwerten vertauschbar ist.

Satz 3.18 *Sei $X \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei $c \in \mathbb{K}$ und $a \in X$.*

1. *Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig in a, dann sind auch $f \pm g$, cf, fg und $\frac{f}{g}$ stetig in a (letzteres nur, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$).*
2. *Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig in a, dann auch $f \vee g$ und $f \wedge g$, wobei $(f \vee g)(x) := \max(f(x), g(x))$ und $(f \wedge g)(x) := \min(f(x), g(x))$.*
3. *Seien $f : X \to \mathbb{K}$ und $g : Y \to \mathbb{K}$, wobei $Y \subset \mathbb{K}$ so gewählt ist, daß $f(x) \in Y$ für alle $x \in X$. Falls f stetig in $a \in X$ und g stetig in $f(a) \in Y$ ist, dann ist auch $(g \circ f) : X \to \mathbb{K}$ stetig in a.*

Definition 3.19 *Sei $X \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann heißt X*

1. abgeschlossen, *falls gilt: Ist $a \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von X, dann ist $a \in X$.*
2. offen, *falls $\mathbb{K}\backslash X$ abgeschlossen ist.*
3. kompakt, *falls gilt: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$ mit $\lim x_{\varphi(n)} \in X$.*

Definition 3.20 *Sei $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(x) := \{y \in \mathbb{K} \mid |y - x| < r\}$.*

Satz 3.21 *Sei $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist offen,*
2. *$\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset X$.*

Satz 3.22 *Sei $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *X ist kompakt,*
2. *X ist beschränkt und abgeschlossen.*

Definition 3.23 *Sei $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann heißt $Y \subset X$*

1. offen in X *oder* offen relativ zu X, *falls es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{K}$ gibt, so daß $Y = X \cap U$.*

2. abgeschlossen in X *oder* abgeschlossen relativ zu X, *falls es eine abgeschlossene Teilmenge* $A \subset \mathbb{K}$ *gibt, so daß* $Y = X \cap A$.

Satz 3.24 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und* $Y \subset X$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. Y *ist offen in* X,

2. $\forall y \in Y, \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(y) \cap X \subset Y$.

Definition 3.25 *Seien* X, Y *beliebige Mengen und* $f : X \to Y$ *eine Funktion.*

1. *Für* $Z \subset Y$ *heißt* $f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\} \subset X$ *das* Urbild von Z (unter f).

2. *Für* $W \subset X$ *heißt* $f(W) := \{f(x) \mid x \in W\} \subset Y$ *das* Bild von W (unter f).

Satz 3.26 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. f *ist stetig,*

2. *Ist* $U \subset \mathbb{K}$ *offen, dann ist* $f^{-1}(U)$ *offen in* X.

Das heißt: f *ist stetig genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind.*

Satz 3.27 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$ *kompakt,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine stetige Funktion. Dann ist* $f(X)$ *kompakt.*

Das heißt: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.

Definition 3.28 *Sei* $X \subset \mathbb{R}$ *und* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.*

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ *heißt* absolutes Maximum von f *(bzw.* absolutes Minimum von f*), falls gilt:* $\forall x \in X, f(x) \leq f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) \geq f(x_0)$*).*

2. $x_0 \in \mathbb{R}$ *heißt* echtes absolutes Maximum von f *(bzw.* echtes absolutes Minimum von f*), falls gilt:* $\forall x \in X, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) > f(x_0)$*).*

3. $x_0 \in \mathbb{R}$ *heißt* relatives *oder* lokales Maximum von f *(bzw.* relatives *oder* lokales Minimum von f*), falls* $\exists \varepsilon > 0$*, so daß* x_0 *absolutes Maximum (bzw. absolutes Minimum) von* $f|_{B_\varepsilon(x) \cap X}$ *ist.*

4. $x_0 \in \mathbb{R}$ *heißt* echtes relatives *oder* echtes lokales Maximum von f *(bzw.* echtes relatives *oder* echtes lokales Minimum von f*), falls* $\exists \varepsilon > 0$*, so daß* x_0 *echtes absolutes Maximum (bzw. echtes absolutes Minimum) von* $f|_{B_\varepsilon(x) \cap X}$ *ist.*

Satz 3.29 *Sei* $X \subset \mathbb{R}$ *kompakt und* $f : X \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann hat* f *ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.*

Satz 3.30 (Zwischenwertsatz) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, und sei* $\eta \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a))$. *Dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = \eta$.

Satz 3.31 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $f(I) \subset \mathbb{R}$ *ebenfalls ein Intervall.*

Das heißt: Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle.

Satz 3.32 *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann gilt:*

1. *Ist $a \in X$ ein linksseitiger Häufungspunkt von X, so existiert $f(a^-) := \lim_{x\to a^-} f(x)$.*

   Falls f monoton steigt, so gilt: $f(a^-) \leq f(a)$ und $f(x) \leq f(a^-)$ für alle $x \in X$ mit $x \leq a$.

   Falls f monoton fällt, so gilt: $f(a^-) \geq f(a)$ und $f(x) \geq f(a^-)$ für alle $x \in X$ mit $x \leq a$.

2. *Ist $a \in X$ ein rechtsseitiger Häufungspunkt von X, so existiert $f(a^+) := \lim_{x\to a^+} f(x)$.*

   Falls f monoton steigt, so gilt: $f(a) \leq f(a^+)$ und $f(a^+) \leq f(x)$ für alle $x \in X$ mit $a \leq x$.

   Falls f monoton fällt, so gilt: $f(a) \geq f(a^+)$ und $f(a^+) \geq f(x)$ für alle $x \in X$ mit $a \leq x$.

Satz 3.33 *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann ist die Menge $\{a \in X \mid f$ ist* **nicht** *stetig in $a\}$ abzählbar.*

Satz 3.34 *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ streng monoton. Sei $Y := f(X) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $f : X \to Y$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ ist ebenfalls streng monoton.*

Satz 3.35 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Sei $J := f(I) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1} : J \to I$ ebenfalls stetig. (Außerdem ist $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall nach Satz 3.31 und f ist streng monoton nach Satz 3.34.)*

Satz 3.36 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ gibt es genau eine Zahl $\sqrt[n]{x} \geq 0$ mit $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$. Die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist streng monoton steigend und stetig.*

Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so gibt es für jedes *$x \in \mathbb{R}$ (also auch für $x < 0$) genau eine Zahl $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ mit $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$. In diesem Falle ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ streng monoton steigend und stetig.*

Satz 3.37 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\rho \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Dann ist die Funktion*

$$f : \begin{array}{ccc} B_\rho(0) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \end{array}$$

stetig.

Satz 3.38 *Die Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n$ *ist streng monoton steigend und stetig. Es gilt:* $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. *Daher ist* $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Definition 3.39 *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt* natürlicher Logarithmus *und wird als* $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *bezeichnet.*

Also ist ln charakterisiert durch die Gleichungen $\ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(\ln(x)) = x$ für alle $x \in (0,\infty)$.

Satz 3.40 1. $\ln 1 = 0$,

2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *für alle $x, y \in \mathbb{R}$,*

3. $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton steigend,*

4. $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

Definition 3.41 *Seien* $a, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Dann ist* $a^p := \exp(p \ln a)$.

Satz 3.42 *Für alle* $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ *mit* $a, b > 0$ *gilt:*

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^p = 1$,
2. $a^{p+q} = a^p a^q$
3. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$,
4. $(a^p)^q = a^{pq}$.
5. $(ab)^p = a^p b^p$,
6. *Für* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt:*
$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n, \qquad \text{und} \qquad a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{\left(\sqrt[m]{a}\right)^n},$$
7. $\exp(p) = e^p$, *wobei* $e := \exp(1)$.

Satz 3.43 1. *Sei* $p \in \mathbb{R}$. *Die* Potenzfunktion mit Exponent p *ist gegeben durch* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$ *und ist stetig. Ist* $p \neq 0$, *so ist* $f((0, \infty)) = (0, \infty)$. *Falls* $p > 0$, *so ist* f *streng monoton steigend; falls* $p < 0$, *so ist* f *streng monoton fallend.*

2. *Sei* $a > 0$. *Die* Exponentialfunktion mit Basis a *ist gegeben durch* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ *und ist stetig. Falls* $a \neq 1$, *so ist* $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

3. *Falls* $a > 1$, *so ist* $(x \mapsto a^x)$ *streng monoton steigend, und* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.

4. *Falls* $0 < a < 1$, *so ist* $(x \mapsto a^x)$ *streng monoton fallend, und* $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.

Definition 3.44 *Sei* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* a^x *heißt* Logarithmusfunktion zur Basis a *und wird mit* $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *bezeichnet.*

Also ist $\log_a$ charakterisiert durch die Gleichungen $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a^{\log_a(x)} = x$ für alle $x \in (0, \infty)$.

Satz 3.45 *Sei* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Dann gilt für alle* $x, y, p \in \mathbb{R}$ *mit* $p > 0$*:*

1. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$; *insbesondere* $\log_e x = \ln x$.
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a(x^p) = p \log_a x$.
4. $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

5. *Falls* $a > 1$, *so ist* $\lim_{x\to-\infty} \log_a x = -\infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$. *Außerdem ist* $\log_a$ *streng monoton steigend.*

6. *Falls* $0 < a < 1$, *so ist* $\lim_{x\to-\infty} \log_a x = \infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$. *Außerdem ist* $\log_a$ *streng monoton fallend.*

Definition 3.46 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{K}$ *heißt* gleichmäßig stetig, *falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Satz 3.47 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, *und* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist* f *stetig.*

Satz 3.48 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, *eine* kompakte *Teilmenge, und sei* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine stetige Funktion. Dann ist* f *auch gleichmäßig stetig.*

(D.h.: Auf kompakten Teilmengen ist gleichmäßige Stetigkeit und Stetigkeit äquivalent.)

4 Differenzierbarkeit

Definition 4.1 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, $x_0 \in X$ *ein Häufungspunkt von* X, *und* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine Funktion.* f *heißt* differenzierbar in x_0 *falls der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Falle heißt $f'(x_0)$ *die* Ableitung von f in x_0.

Weiterhin heißt f differenzierbar, *falls* f *differenzierbar in* x_0 *ist für alle* $x_0 \in X$. *In diesem Falle heißt die Funktion* $f' : X \to \mathbb{K}$ *die* Ableitung von f.

Satz 4.2 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, $x_0 \in X$ *ein Häufungspunkt, und* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine Funktion. Falls* f *differenzierbar in* x_0 *ist, dann ist* f *auch stetig in* x_0.

Satz 4.3 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$ *und* $x_0 \in X$ *ein Häufungspunkt,* $f, g : X \to \mathbb{K}$ *zwei Funktionen, und* $c \in \mathbb{K}$. *Wenn* f *und* g *beide differenzierbar in* x_0 *sind, dann gilt:*

1. $f \pm g$ *ist differenzierbar in* x_0, *und* $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

2. cf *ist differenzierbar in* x_0, *und* $(cf)'(x_0) = c\, f'(x_0)$,

3. fg *ist differenzierbar in* x_0, *und* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel oder Leibnizregel)

4. f/g *differenzierbar in* x_0, *und* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ (Quotientenregel). *Dies gilt natürlich nur, wenn* f/g *definiert ist, d.h. falls* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$.

Satz 4.4 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und sei* $\rho \in (0, \infty]$ *der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Dann gilt:*

1. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ *hat ebenfalls Konvergenzradius* ρ.

2. *Die Funktion*
$$f: \begin{array}{ccc} B_\rho(0) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array}$$
ist differenzierbar.

3. *Es gilt:* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *für alle* $x \in B_\rho(0)$.

Beispiel 4.5 *Die Funktion* $\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *ist differenzierbar, und es gilt* $\exp'(x) = \exp(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$.

Satz 4.6 *Seien* $X, Y \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, *und seien* $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to \mathbb{K}$ *zwei Funktionen.*

Falls f *differenzierbar in* $x_0 \in X$ *und* g *differenzierbar in* $y_0 := f(x_0)$ *ist, dann ist auch* $g \circ f : X \to \mathbb{K}$ *differenzierbar in* x_0, *und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Satz 4.7 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine streng monotone, stetige Funktion. Sei* $J := f(I) \subset \mathbb{R}$, *und* $f^{-1} : J \to I \subset \mathbb{R}$ *die Umkehrfunktion von* f.

Sei $x_0 \in J$ *und* $y_0 := f^{-1}(x_0) \in I$. *Wenn* f *differenzierbar in* y_0 *ist und* $f'(y_0) \neq 0$, *dann ist auch* f^{-1} *differenzierbar in* x_0, *und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Beispiel 4.8 *Folgende Funktionen sind differenzierbar:*

1. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *und es gilt:* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *für festes* $a > 0$, $a \neq 1$, *und es gilt:* $\log_a'(x) = \frac{1}{\ln a\ x}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ *für festes* $a > 0$, *und es gilt:* $f'(x) = \ln a\ a^x$.

4. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ *für festes* $p \in \mathbb{R}$, *und es gilt:* $f'(x) = px^{p-1}$.

Definition 4.9 *Sei* $X \subset \mathbb{K}$ *und* $f : X \to \mathbb{K}$ *eine Funktion. Ein Punkt* $x_0 \in X$ *heißt* kritischer Punkt von f *falls* f *differenzierbar in* x_0 *und* $f'(x_0) = 0$ *ist.*

Satz 4.10 *Sei* $X \subset \mathbb{R}$ *und* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Sei* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ein beidseitiger Häufungspunkt. Falls* x_0 *ein* lokales Extremum *(d.h. ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, cf. Definition 3.28) und* f *differenzierbar in* x_0 *ist, dann ist* x_0 *ein kritischer Punkt, d.h.* $f'(x_0) = 0$.

Satz 4.11 (Satz von Rolle) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die in* (a, b) *differenzierbar ist, und es gelte* $f(a) = f(b)$. *Dann hat* f *einen kritischen Punkt im Intervallinneren, d.h.* $\exists \xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Satz 4.12 (Mittelwertsätze) *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei stetige Funktionen, die in* (a, b) *differenzierbar sind. Ferner sei* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Dann gilt:*

1. *Es gibt ein* $\xi \in (a,b)$ *mit* $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. *Es gibt ein* $\xi \in (a,b)$ *mit* $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Satz 4.13 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion.*

1. f *ist monoton steigend genau dann, wenn* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in I$.

2. f *ist monoton fallend genau dann, wenn* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in I$.

3. *Wenn* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in I$, *dann ist* f *streng monoton steigend.*

4. *Wenn* $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in I$, *dann ist* f *streng monoton fallend.*

Satz 4.14 (Regeln von de l'Hôpital) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen. Sei* $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ *ein Häufungspunkt von* I *(also* $x_0 = \pm\infty$ *ist möglich).*

Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, und falls entweder*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, *oder*

2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *und* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$,

dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Satz 4.15 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine* n*-mal differenzierbare Funktion, und sei* $x_0 \in I$. *Dann gibt es genau ein Polynom* $T_n^{x_0}$ *vom Grad* $\leq n$ *mit der Eigenschaft:*

$$(T_n^{x_0})^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Dieses Polynom ist durch die Formel

$$T_n^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

gegeben, und wird als das n-te Taylorpolynom von f entwickelt an der Stelle x_0 *bezeichnet. Hierbei gilt die Konvention* $f^{(0)} = f$.

Satz 4.16 (Satz von Taylor) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine* $(n+1)$*-mal differenzierbare Funktion. Sei* $T_n^{x_0}$ *das* n*-te Taylorpolynom, und sei*

$$R_n^{x_0}(x) := f(x) - T_n^{x_0}(x)$$

das n-te Restglied von f in x_0. *Dann gibt es für jedes* $x \in I$, $x \neq x_0$ *ein* $\xi \in (x_0, x) \cup (x, x_0)$, *so daß gilt:*

$$R_n^{x_0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1},$$

und daher

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

Definition 4.17 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Die Potenzreihe*

$$\begin{aligned} T_\infty^{x_0}(x) &:= \sum_{n=0}^\infty \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \tfrac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

heißt Taylorreihe von f im Punkte x_0.

Satz 4.18 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, und sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt (d.h. ein beidseitiger Häufungspunkt). Falls es ein $\varepsilon > 0$ und ein $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq n! C^n,$$

dann gilt für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, wobei $\delta := \min\{\varepsilon, C^{-1}\}$,

$$T_\infty^{x_0}(x) = f(x).$$

Insbesondere konvergiert $T_\infty^{x_0}$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Satz 4.19 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Bezeichnet man die Taylorploynome von f bzw. g mit T_n^{f,x_0} bzw. T_n^{g,x_0}, so gilt für die Taylorpolynome von $f \pm g$ bzw. fg:*

$$\begin{aligned} T_n^{f \pm g, x_0} &= T_n^{f,x_0} \pm T_n^{g,x_0} \\ T_n^{fg,x_0} &= T_n^{f,x_0} T_n^{g,x_0} \ \mathit{mod}\ (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile ist hierbei folgendes gemeint: ist das Produkt $T_n^{f,x_0} T_n^{g,x_0} = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{2n}(x-x_0)^{2n}$, so ist $T_n^{fg,x_0} = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ die Summe der ersten $(n+1)$ Summanden dieses Produktes.

Definition 4.20 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* stetig differenzierbar, *falls f differenzierbar und die Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist.*

Satz 4.21 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar (d.h. $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ ist stetig). Sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt (d.h. ein beidseitiger Häufungspunkt) von I und es gelte*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n-1, \text{ aber } \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. *Sei n gerade. Dann ist x_0 ein*
   (a) *lokales Maximum von f, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$,*
   (b) *lokales Minimum von f, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
2. *Sei n ungerade. Dann ist x_0 weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum von f.*

Definition 4.22 *Definiere die* trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\sin x := \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) \qquad \textit{und} \qquad \cos x := \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)).$$

Satz 4.23 *Es gilt für alle* $x \in \mathbb{C}$*:*

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &&= x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + - \dots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} &&= 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + - \dots \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$ *falls* $x \in \mathbb{R}$.

Satz 4.24 $\sin$ *und* $\cos$ *sind differenzierbare Funktionen, und es gilt:* $\sin' = \cos$ *und* $\cos' = -\sin$.

Satz 4.25 *Für alle* $x, y \in \mathbb{C}$ *gilt:*

1. $\sin(-x) = -\sin x$ *und* $\cos(-x) = \cos x$,
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
3. $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$,
4. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
5. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Satz 4.26 *Sei* $\pi := 2 \inf\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } \cos x = 0\}$. *Dann ist* $\pi > 0$.

1. *Wir haben die folgende Wertetabelle:*

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

2. $\sin$ *und* $\cos$ *sind* 2π*-periodisch, d.h.* $\forall x \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *und* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
3. $\sin$ *ist streng monoton steigend auf* $[0, \pi/2]$ *und* $[3\pi/2, 2\pi]$ *und streng monoton fallend auf* $[\pi/2, 3\pi/2]$.
4. $\cos$ *ist streng monoton fallend auf* $[0, \pi]$ *und streng monoton steigend auf* $[\pi, 2\pi]$.

Satz 4.27 *Sei* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Dann gibt es genau eine Konstante* $\rho > 0$ *und ein* $\theta \in [0, 2\pi)$, *so daß*

$$z = \rho \exp(i\theta) = \rho(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Diese Darstellung heißt Polardarstellung von z. *Es ist* $\rho = |z|$, *und* θ *heißt das* Argument von z.

Sind $z = \rho_1 \exp(i\theta_1)$ *und* $w = \rho_2 \exp(i\theta_2)$ *zwei komplexe Zahlen, so gilt*

$$zw = (\rho_1\rho_2) \exp(i(\theta_1 + \theta_2)),$$

d.h. bei der Multiplikation komplexer Zahlen multipliziert man die Beträge und addiert die Argumente (wobei das Argument von zw *auch* $\theta_1 + \theta_2 - 2\pi$ *sein kann).*

Definition 4.28 *Die Umkehrfunktionen der streng monotonen Funktionen* $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} : [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ *und* $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ *heißen*

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2,\pi/2] \qquad \textit{und} \qquad \arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi].$$

Satz 4.29

1. $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ *ist streng monoton steigend und stetig. Außerdem ist* arcsin *differenzierbar auf* $(-1,1)$*, und es gilt*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *ist streng monoton fallend und stetig. Außerdem ist* arccos *differenzierbar auf* $(-1,1)$*, und es gilt*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Definition 4.30 *Der* Tangens *ist die Funktion*

$$\tan : \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Satz 4.31 *Es gilt:*

1. tan *ist differenzierbar, und es gilt* $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ *und* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$.
3. $\tan|_{(-\pi/2,\pi/2)} : (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend und bijektiv.*
4. *Bezeichne die Umkehrfunktion von* $\tan|_{(-\pi/2,\pi/2)}$ *als*

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2,\pi/2).$$

arctan *ist streng monoton steigend und differenzierbar, und es gilt:*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Definition 4.32 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall. Eine Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *heißt*

$$\left.\begin{array}{l}\text{konvex,}\\ \text{streng konvex,}\\ \text{konkav,}\\ \text{streng konkav,}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\textit{falls } \forall x,y\in I \textit{ mit } x\neq y\\[2em] \textit{und } \forall t\in(0,1) \textit{ gilt:}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y).\\ f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y).\\ f(tx+(1-t)y) \ge tf(x)+(1-t)f(y).\\ f(tx+(1-t)y) > tf(x)+(1-t)f(y).\end{array}\right.$$

Anschaulich bedeutet dies:

1. *Wenn für alle* $x, y \in I$, $x \neq y$ *die Strecke zwischen den Punkten* $(x, f(x))$ *und* $(y, f(y))$ *(echt) oberhalb des Graphen von* f *liegt, dann ist* f *(streng) konvex.*
2. *Wenn für alle* $x, y \in I$, $x \neq y$ *die Strecke zwischen den Punkten* $(x, f(x))$ *und* $(y, f(y))$ *(echt) unterhalb des Graphen von* f *liegt, dann ist* f *(streng) konkav.*

Satz 4.33 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

1. *Wenn $f' : I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton steigend ist, dann ist f (streng) konvex.*
2. *Wenn $f' : I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton fallend ist, dann ist f (streng) konkav.*

Korollar 4.34 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.*

1. *Wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konvex.*
2. *Wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex.*
3. *Wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konkav.*
4. *Wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng konkav.*

5 Integrale

Definition 5.1 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine* Treppenfunktion auf $[a, b]$ *ist eine Funktion $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$, so daß es Zahlen $t_i \in \mathbb{R}$ und $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, $i = 0, \ldots, n$, mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ und so daß gilt:*

$$\tau(x) = c_i \quad \text{für alle } x \in [t_{i-1}, t_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Die Werte t_i heißen die Sprungstellen *von τ, und $Tr_{[a,b]}$ bezeichnet die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.*

Satz 5.2 *Seien $\tau, \sigma \in Tr_{[a,b]}$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\tau + \sigma \in Tr_{[a,b]}$ und $k\tau \in Tr_{[a,b]}$. (Das heißt: $Tr_{[a,b]}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$). Außerdem sind für jedes $c \in (a, b)$ die Einschränkungen $\tau|_{[a,c]}$ bzw. $\tau|_{[c,b]}$ Treppenfunktionen auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$.*

Definition 5.3 *Sei $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit Sprungstellen $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ und $\tau|_{[t_{i-1},t_i)} = c_i$. Dann ist das* Integral von τ über $[a, b]$ *definiert als*

$$\int_a^b \tau(x)dx := \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}).$$

Satz 5.4 *Seien $\tau, \sigma \in Tr_{[a,b]}$, $k \in \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$. Dann gilt:*

1. $$\int_a^b (\tau + \sigma)(x)dx = \int_a^b \tau(x)dx + \int_a^b \sigma(x)dx,$$

2. $$\int_a^b (k\tau)(x)dx = k \int_a^b \tau(x)dx,$$

3.

$$\int_a^b \tau(x)dx = \int_a^c \tau(x)dx + \int_c^b \tau(x)dx,$$

4. *Wenn* $\tau \geq 0$*, dann folgt* $\int_a^b \tau(x)dx \geq 0$,

5. $\int_a^b 1dx = b - a$.

Definition 5.5 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion (d.h.* $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b], |f(x)| \leq C$*).*

1. *Das* Riemann-Oberintegral *von* f *ist definiert als*

$$\int_a^{b*} f(x)dx := \inf \left\{ \int_a^b \tau(x)dx \mid \tau \in Tr_{[a,b]}, \tau \geq f \right\}.$$

2. *Das* Riemann-Unterintegral *von* f *ist definiert als*

$$\int_{a\ *}^{b} f(x)dx := \sup \left\{ \int_a^b \tau(x)dx \mid \tau \in Tr_{[a,b]}, \tau \leq f \right\}.$$

3. f *heißt* Riemann-integrierbar *falls* $\int_{a\ *}^{b} f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx$*. In diesem Falle ist das* (Riemann-)Integral *von* f *definiert als*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{a\ *}^{b} f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx.$$

Satz 5.6 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion. Dann gilt*

$$\int_{a\ *}^{b} f(x)dx \leq \int_a^{b*} f(x)dx.$$

Satz 5.7 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. f *ist Riemann-integrierbar,*

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau_+, \tau_- \in Tr_{[a,b]}$*, so daß* $\tau_- \leq f \leq \tau_+$ *und* $\int_a^b (\tau_+ - \tau_-)(x)dx < \varepsilon$.

3. *Es gibt Folgen* $(\tau_+^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\tau_-^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $Tr_{[a,b]}$ *mit* $\tau_-^n \leq f \leq \tau_+^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, und* $\lim \int_a^b (\tau_+^n - \tau_-^n)(x)dx = 0$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt für die Folgen $(\tau_\pm^n)$*:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b \tau_-^n(x)dx = \lim \int_a^b \tau_+^n(x)dx.$$

Satz 5.8 *Seien* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbare Funktionen,* $k \in \mathbb{R}$ *und* $c \in (a,b)$*. Dann gilt:*

1. *$f+g$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar, und*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

2. *kf ist ebenfalls Riemann-integrierbar, und*

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

3. *$f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ sind ebenfalls Riemann-integrierbar, und*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

4. *Wenn $f \geq 0$, dann folgt $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,*

5. *Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar, und der Wert des Riemann-Integrals $\int_a^b f(x)dx$ stimmt mit dem Wert des Integrals von Treppenfunktionen (im Sinne von Definition 5.3) überein.*

Bemerkung 5.9 Wegen Eigenschaft 3. im vorstehenden Satz ist es sinnvoll, für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zu definieren:

$$\int_a^a f(x)dx := 0; \qquad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Mit dieser Vereinbarung gilt die Formel in 3. auch dann, wenn $c \notin (a,b)$.

Satz 5.10 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Satz 5.11 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Definiere $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Dann gilt:

1. *F ist stetig.*

2. *Ist f stetig in $x_0 \in [a,b]$, so ist F differenzierbar in x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Definition 5.12 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine* Stammfunktion von *f ist eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$, so daß $F' = f$.*

Korollar 5.13 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfuntion von f.*

Satz 5.14 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f, so gibt es ein $C \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in I$ gilt: $G(x) = F(x) + C$.*

Bemerkung 5.15 *Wir führen folgende Schreibweisen ein:*

1. *Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichne $\int f(x)dx$ die (allgemeine) Stammfunktion von f. Nach Satz 5.14 ist diese bis auf Addition einer Konstanten eindeutig bestimmt.*

2. *Für eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ bezeichne $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$.*

Korollar 5.16 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Beispiel 5.17 Dies ist eine Liste von einigen elementaren Stammfunktionen:

$f(x)$	$\int f(x)dx$	Einschränkungen
x^p	$\frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$	$p \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	für $x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	

Satz 5.18 (Partielle Integration) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig und g differenzierbar. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

Satz 5.19 (Integration durch Substitution) *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und $g : J \to I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$:*

$$\int g'(x)(f \circ g)(x)dx = (F \circ g)(x) + C$$

Beispiel 5.20 $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$. Insbesondere folgt daraus, daß der Flächeninhalt der Einheitskreisscheibe π ist.

Definition 5.21 *1. Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \hat{\mathbb{R}}$, $a < b$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Falls für jedes $c \in (a,b)$ die Funktion $f|_{[a,c]}$ Riemann-integrierbar ist und falls $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$ existiert, so heißt f* uneigentlich (Riemann-)integrierbar über *$[a,b)$, und man definiert*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

2. *Seien $a \in \hat{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Falls für jedes $c \in (a,b)$ die Funktion $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar ist und falls $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$ existiert, so heißt f* uneigentlich (Riemann-)integrierbar über *$(a,b]$, und man definiert*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

3. *Seien $a,b \in \hat{\mathbb{R}}$, $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Falls für ein $c \in (a,b)$ die Funktionen $f|_{(a,c]}$ und $f|_{[c,b)}$ uneigentlich (Riemann-)integrierbar sind, so heißt f* uneigentlich (Riemann-)integrierbar über *(a,b), und man definiert*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Falls $f : I \to \mathbb{R}$ für einen dieser Intervalltypen auf I uneigentlich integrierbar ist, so sagt man auch, daß das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

Bemerkung 5.22 *1. In der vorstehenden Formel für integrierbare Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist der Wert der uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)dx$ unabhängig von der Wahl von $c \in (a,b)$.*

2. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ wie oben, so ist f genau dann uneigentlich integrierbar, falls für beliebiges $c \in (a,b)$ die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_c^x f(t)dt$ stetig auf $[a,b]$ fortgesetzt werden kann, d.h. wenn die Grenzwerte $\lim_{x\to a^+} F(x)$ und $\lim_{x\to b^-} F(x)$ beide (in $\mathbb{R}$) existieren.*

3. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, so sind die Einschränkungen $f|_{[a,b)}$, $f|_{(a,b]}$ und $f|_{(a,b)}$ alle uneigentlich integrierbar, und der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ - betrachtet als uneigentliches Integral - stimmt mit dem Wert der Riemann-Integrals $\int_a^b f(x)dx$ überein. Daher ist es gerechtfertigt, für beide die gleiche Schreibweise zu verwenden.*

Satz 5.23 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $I = [a,b)$ (bzw. $I = (a,b]$ bzw. $I = (a,b)$), und sei $f : I \to \mathbb{R}$, so daß für alle $c \in (a,b)$ $f|_{[a,c]}$ (bzw. $f|_{[c,b]}$) Riemann-integrierbar ist.*

Falls $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert, dann konvergiert auch $\int_a^b f(x)dx$, und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Satz 5.24 (Vergleichstest) *Seien $f,g : I \to \mathbb{R}$ wie im vorigen Satz.*

1. *Falls $|f| \leq g$ und $\int_a^b g(x)dx$ konvergiert, dann konvergiert auch $\int_a^b |f(x)|dx$ und $\int_a^b f(x)dx$.*

2. *Falls $0 \leq g \leq f$ und $\int_a^b g(x)dx$ divergiert, dann divergiert auch $\int_a^b f(x)dx$.*

Satz 5.25 (Integraltest) *Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende (Riemann-integrierbare) Funktion, $f \geq 0$, und sei $a_n := f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.*

Beispiel 5.26 (Vgl. Satz 2.27) *Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergiert für $p > 1$ und divergiert für $p \leq 1$.*