Analysis II, SS 05
Verzeichnis der wichtigsten Definitionen und Sätze

Lorenz Schwachhöfer

Inhaltsverzeichnis

1 Fundamentalsatz der Algebra und Partialbrüche

Theorem 1.1 *Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht-konstantes Polynom, d.h. $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann hat P eine Nullstelle, d.h. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.*

Korollar 1.2 (Zerlegungssatz) *Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ wie im vorstehenden Satz. Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendigerweise verschieden), so daß gilt*

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

In anderer Schreibweise gibt es Zahlen $z_1, \ldots z_k \in \mathbb{C}$ mit $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$ mit $l_1 + \ldots + l_k = n$, so daß gilt

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{l_1} (z - z_2)^{l_2} \ldots (z - z_k)^{l_k}.$$

Korollar 1.3 (Zerlegungssatz für reelle Polynome) *Sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, d.h. $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Dann gibt es Zahlen $x_1, \ldots, x_k$, $A_1, \ldots, A_s$ und $B_1, \ldots B_s \in \mathbb{R}$ sowie $l_1, \ldots, l_k, r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{N}$ mit $l_1 + \ldots l_k + 2r_1 + \ldots + 2r_s = n$, so daß*

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{l_1} \ldots (x - x_k)^{l_k} (x^2 + A_1 x + B_1)^{r_1} \ldots (x^2 + A_s x + B_s)^{r_s},$$

wobei die quadratischen Polynome $x^2 + A_i x + B_i$ keine reelle Nullstelle haben.

Satz 1.4 (Partialbruchzerlegung in $\mathbb{C}$) *Seien $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome vom Grad n_1 bzw. n_2, und es sei $n_1 < n_2$. Die Faktorisierung von Q von Korollar 1.2 sei*

$$Q(z) = a_{n_2} (z - z_1)^{l_1} (z - z_2)^{l_2} \ldots (z - z_k)^{l_k}$$

mit $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und $l_1 + \ldots + l_k = n_2$. Dann gibt es Konstanten $a_{ij} \in \mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} = \quad & \frac{a_{11}}{z - z_1} + \ldots + \frac{a_{1l_1}}{(z - z_1)^{l_1}} \\ + \; & \frac{a_{21}}{z - z_2} + \ldots + \frac{a_{2l_2}}{(z - z_2)^{l_2}} \\ + \; & \quad \vdots \qquad \quad \vdots \qquad \quad \vdots \\ + \; & \frac{a_{k1}}{z - z_k} + \ldots + \frac{a_{kl_k}}{(z - z_k)^{l_k}}. \end{aligned}$$

Korollar 1.5 (Partialbruchzerlegung in $\mathbb{R}$) *Seien $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome vom Grad n_1 bzw. n_2, und es sei $n_1 < n_2$. Die Faktorisierung von Q von Korollar 1.3 sei*

$$Q(x) = a_{n_2} (x - x_1)^{l_1} (x - x_2)^{l_2} \ldots (x - x_k)^{l_k} (x^2 + A_1 x + B_1)^{r_1} \ldots (x^2 + A_s x + B_s)^{r_s}.$$

Dann gibt es Konstanten $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$, so daß

$$\begin{array}{rcccc}
\dfrac{P(x)}{Q(x)} = & \dfrac{a_{11}}{x-x_1} & + \; \dots \; + & \dfrac{a_{1l_1}}{(x-x_1)^{l_1}} \\[2ex]
+ & \dfrac{a_{21}}{x-x_2} & + \; \dots \; + & \dfrac{a_{2l_2}}{(x-x_2)^{l_2}} \\[2ex]
+ & \vdots & \vdots & \vdots \\[2ex]
+ & \dfrac{a_{k1}}{x-x_k} & + \; \dots \; + & \dfrac{a_{kl_k}}{(x-x_k)^{l_k}} \\[2ex]
+ & \dfrac{b_{11}x+c_{11}}{x^2+A_1x+B_1} & + \; \dots \; + & \dfrac{b_{1r_1}x+c_{1r_1}}{(x^2+A_1x+B_1)^{r_1}} \\[2ex]
+ & \dfrac{b_{21}x+c_{21}}{x^2+A_2x+B_2} & + \; \dots \; + & \dfrac{b_{2r_2}x+c_{2r_2}}{(x^2+A_2x+B_2)^{r_2}} \\[2ex]
+ & \vdots & \vdots & \vdots \\[2ex]
+ & \dfrac{b_{s1}x+c_{s1}}{x^2+A_sx+B_s} & + \; \dots \; + & \dfrac{b_{sr_s}x+c_{sr_s}}{(x^2+A_sx+B_s)^{r_s}}
\end{array}$$

Bemerkung. Die Summanden in Satz 1.4 und Korollar 1.5 heißen *Partialbrüche*. Partialbrüche können durch elementare Funktionen integriert werden, wie wir in den Übungen sehen werden.

2 Metrische Räume

Definition 2.1 *Ein* Metrischer Raum *ist eine Menge X mit einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$.
2. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $\forall x, y \in X,\ d(y, x) = d(x, y)$.
4. $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

d heißt Metrik auf X. *Eigenschaften 1. und 2. heißen* Positivität von d, *3. heißt die* Symmetrie von d, *und 4. heißt* Dreiecksungleichung.

Definition 2.2 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine* Norm auf V *ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\forall v \in V,\ ||v|| \geq 0$.

2. $\forall v \in V,\ ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in V,\ ||\lambda v|| = |\lambda|\ ||v||.$

4. $\forall v, w \in V, ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||.$

Eigenschaften 1. und 2. heißen Positivität von $||\cdot||$, *3. heißt die* Homogenität von $||\cdot||$, *und 4. heißt* Dreiecksungleichung.

Ein Vektorraum V mit einer Norm $||\cdot||$ heißt normierter Vektorraum.

Satz 2.3 *Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist die Funktion*

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(v, w) := ||v - w||$$

eine Metrik auf V. Das heißt: Jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum.

Beispiele.

1. Der Betrag $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf dem (eindimensionalen) Vektorraum $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. D.h. $d(x, y) := |x - y|$ ergibt eine Metrik auf $\mathbb{K}$.

2. Sei $V = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$. Dann ist durch die Formel

$$||v||_\infty := max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad \text{wobei} \quad v = (x_1, \ldots, x_n),$$

eine Norm definiert, die *Maximumsnorm* oder ∞-*Norm* genannt wird.

3. Sei $V = \mathbb{K}^n$ und $p \geq 1$. Dann ist durch die Formel

$$||v||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{wobei} \quad v = (x_1, \ldots, x_n),$$

eine Norm definiert, die *p-Norm* genannt wird. (Dies wird in Satz 2.6 bewiesen.) Für $p = 2$ ist dies die *Euklidische Norm*.

4. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir definieren $C^0([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$. $C^0([a, b])$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzgl. der punktweisen Addition und Multiplikation.

   Dann ist durch die Formel

$$||f||_\infty := max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}, \qquad f \in C^0([a, b]),$$

eine Norm auf $C^0([a, b])$ definiert, die *Maximumsnorm* oder ∞-*Norm* genannt wird.

5. Für $p \geq 1$ ist durch die Formel

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx \right)^{1/p}, \qquad f \in C^0([a, b]),$$

eine Norm auf $C^0([a, b])$ definiert, die *p-Norm* genannt wird. (Dies wird in Satz 2.6 bewiesen.)

Lemma 2.4 *Seien $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ und $0 < \lambda < 1$. Dann gilt*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Satz 2.5 (Hölder-Ungleichung) *Es sei $p > 1$ und $q := \frac{p}{(p-1)}$, so daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1. *Für $v := (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $w := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||v||_p ||w||_q.$$

2. *Für $f, g \in C^0([a, b])$ gilt*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Satz 2.6 (Minkowski-Ungleichung) *Für $p \geq 1$ erfüllt $|| \cdot ||_p$ sowohl auf $\mathbb{K}^n$ als auch auf $C^0([a, b])$ die Dreiecksungleichung, d.h.*

1. *Für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$ gilt: $||v + w||_p \leq ||v||_p + ||w||_p$. Insbesondere ist $(\mathbb{K}^n, || \cdot ||_p)$ ein normierter Vektorraum.*

2. *Für alle $f, g \in C^0([a, b])$ gilt: $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$. Insbesondere ist $(C^0([a, b]), || \cdot ||_p)$ ein normierter Vektorraum.*

Definition 2.7 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt $x \in X$* Grenzwert von (x_n) *(Schreibweise: $x = \lim x_n$) falls* $\lim\ d(x_n, x) = 0$.

Falls (x_n) einen Grenzwert hat, so nennt man (x_n) konvergent, *andernfalls* divergent.

Satz 2.8 *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat* höchstens *einen Grenzwert.*

Satz 2.9 *Sei $(V, || \cdot ||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und seien $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in V und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

1. $\lim(v_n \pm w_n) = \lim v_n \pm \lim w_n$.

2. $\lim ||v_n|| = || \lim v_n||$.

3. $\lim(t_n v_n) = \lim t_n \ \lim v_n$.

Definition 2.10 *Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen. Man sagt*

1. (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *falls* $\forall x \in [a, b]$, $\lim f_n(x) = f(x)$. *Schreibweise: $f_n \stackrel{punktw.}{\longrightarrow} f$.*

2. (f_n) konvergiert bzgl. $|| \cdot ||_p$ gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *falls* $\lim ||f_n - f||_p = 0$. *Schreibweise: $f_n \stackrel{||\cdot||_p}{\longrightarrow} f$.*

3. (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *falls* $\lim ||f_n - f||_\infty = 0$. *Schreibweise: $f_n \Longrightarrow f$.*

Satz 2.11 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^0([a,b])$. Falls $f_n \Longrightarrow f$, dann gilt:*

1. *(f_n) konvergiert punktweise gegen f.*

2. *(f_n) konvergiert bzgl. $||\cdot||_p$ gegen f für alle $p \geq 1$.*

3. *f ist stetig.*

Definition 2.12 *Sei X eine Menge. Zwei Metriken d_1, d_2 auf X heißen* äquivalent *(Schreibweise: $d_1 \sim d_2$), wenn es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in X$ gilt:*

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y).$$

Bemerkung. $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Metriken auf X, d.h. es gilt für alle Metriken d_1, d_2, d_3 auf X:

1. $d_1 \sim d_1$.

2. Wenn $d_1 \sim d_2$, dann ist auch $d_2 \sim d_1$.

3. Wenn $d_1 \sim d_2$ und $d_2 \sim d_3$, dann ist auch $d_1 \sim d_3$.

Satz 2.13 "Äquivalente Metriken haben dieselben Grenzwerte" *Genauer:*
Seien $d_1 \sim d_2$ äquivalente Metriken auf X, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann gilt:
$\lim x_n = x_0$ *bezüglich d_1* $\Longleftrightarrow$ $\lim x_n = x_0$ *bezüglich d_2.*

Definition 2.14 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zwei Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ heißen* äquivalent *(Schreibweise: $||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_2$), falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so daß für alle $v \in V$ gilt:*

$$C_1||v||_1 \leq ||v||_2 \leq C_2||v||_1.$$

Bemerkung.

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V.

2. Ist $||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_2$, so ist auch $d_1 \sim d_2$, wobei $d_i(v,w) := ||v-w||_i$ die zur Norm gehörige Metrik auf V ist.

Beispiel. Sei $V := \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann gilt

1. Alle Normen $||\cdot||_p$, $1 \leq p \leq \infty$ sind äquivalent.

2. Eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert genau dann wenn alle Komponentenfolgen konvergieren. Genauer:

   Ist $v_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ mit $x_k^i \in \mathbb{K}$, so konvergiert $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn alle Folgen $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren für $i = 1, \ldots, n$. In diesem Fall ist $\lim v_k = (\lim x_k^1, \ldots, \lim x_k^n)$.

Definition 2.15 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* Cauchyfolge*, falls gilt:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Bemerkung. Jede konvergente Folge in X ist eine Cauchyfolge.

Definition 2.16 *Ein metrischer Raum (X,d) heißt* vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.*

Satz 2.17 "Äquivalente Metriken haben dieselben Cauchyfolgen." *Genauer:*

Sind $d_1 \sim d_2$ äquivalente Metriken auf X, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. d_1 genau dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. d_2 ist.

Bemerkung. Da äquivalente Metriken die gleichen Cauchyfolgen (Satz 2.17) und die gleichen konvergenten Folgen haben (Satz 2.13), folgt:

Sind $d_1 \sim d_2$ zwei äquivalente Metriken auf X, so ist (X,d_1) vollständig genau dann, wenn (X,d_2) vollständig ist.

Satz 2.18 *Sei $V = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann sind $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_p$, $p \geq 1$, vollständig, d.h. $(\mathbb{K}^n, d)$ mit $d(v,w) := ||v-w||_p$ (bzw. $d(v,w) := ||v-w||_\infty$) ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Satz 2.19 *$(C^0([a,b]), ||\cdot||_\infty)$ ist vollständig.*

Beispiel. Die Normen $||\cdot||_p$, $p \geq 1$ auf $C^0([a,b])$ sind *nicht* vollständig.

Definition 2.20 *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

1. *Für $x_0 \in X$ und $r > 0$ definiere $B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$. $B_r(x_0)$ heißt* Kugel um x_0 mit Radius r.
2. *Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt* offen*, falls gilt:*

$$\forall x_0 \in U\ \exists\varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x_0) \subset U.$$

3. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen*, falls $X\backslash A$ offen ist.*

Beispiele.

1. Für $X = \mathbb{K}$ mit $d(x,y) = |x-y|$ stimmt die Definition der Kugeln sowie der offenen und abgeschlossenen Mengen mit den in Analysis I eingeführten Definitionen überein.
2. Sei (X,d) eine Menge mit der diskreten Metrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

Dann ist *jede* Teilmenge von X sowohl offen als auch abgeschlossen.

Satz 2.21 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind die Kugeln $B_r(x_0) \subset X$ offen für alle $x_0 \in X$ und $r > 0$. Außerdem sind die Mengen $\{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\} \subset X$ abgeschlossen für alle $x_0 \in X$ und $r \geq 0$.*

Satz 2.22 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

1. *$\emptyset \subset X$ und $X \subset X$ sind offen.*
2. *Sind $U_1, \ldots, U_n \subset X$ offen, so ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset X$ offen.*
3. *Ist $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine beliebige Kollektion offener Teilmengen von X, so ist auch $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subset X$ offen.*

Außerdem gilt:

1'. *$\emptyset \subset X$ und $X \subset X$ sind abgeschlossen.*

2'. *Sind $A_1, \ldots, A_n \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset X$ abgeschlossen.*

3'. *Ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine beliebige Kollektion abgeschlossener Teilmengen von X, so ist auch $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subset X$ abgeschlossen.*

Satz 2.23 *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X,d). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$x_0 = \lim x_n$.*
2. *$\forall U \subset X$ offen mit $x_0 \in U$ gilt: $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$ ist endlich.*

Eine offene Teilmenge $U \subset X$, die x_0 enthält, heißt auch *Umgebung von x_0*.

Satz 2.24 *Seien $d_1 \sim d_2$ äquivalente Metriken auf X. Dann ist $U \subset X$ offen bzgl. d_1 genau dann, wenn $U \subset X$ offen bzgl. d_2 ist.*

Ebenso ist $A \subset X$ abgeschlossen bzgl. d_1 genau dann, wenn $A \subset X$ abgeschlossen bzgl. d_2 ist.

Kurz: Äquivalente Metriken haben dieselben offenen bzw. abgeschlossenen Mengen.

Definition 2.25 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$.*

1. *Der* offene Kern von Y *oder das* Innere von Y *ist definiert als*
$$Y^0 := \bigcup \{U \subset X \mid U \text{ ist offen und } U \subset Y\}.$$
2. *Der* Abschluß von Y *ist definiert als*
$$\overline{Y} := \bigcap \{A \subset X \mid A \text{ ist abgeschlossen und } Y \subset A\}.$$
3. *Der* Rand von Y *ist definiert als $\partial Y := \overline{Y} \setminus Y^0$.*

Bemerkung. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$.

1. $Y^0 \subset Y$ und Y^0 ist offen. Außerdem gilt: Ist U offen und $U \subset Y$, dann ist $U \subset Y^0$. Informell gesprochen: Y^0 *ist die größte offene Teilmenge von* Y.
2. $Y \subset \overline{Y}$ und $\overline{Y}$ ist abgeschlossen. Außerdem gilt: Ist A abgeschlossen und $Y \subset A$, dann ist $\overline{Y} \subset A$. Informell gesprochen: $\overline{Y}$ *ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von* Y.

Definition 2.26 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt* dicht*, falls $\overline{Y} = X$.*

Satz 2.27 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann gilt:*

1. $Y^0 = \{y \in Y \mid \exists \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(y) \subset Y\}$.
2. $\overline{Y} = \{x \in X \mid \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in* Y *mit* $x = \lim y_n\}$.

Definition 2.28 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Eine Teilmenge $W \subset Y$ heißt*

1. offen in Y*, falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt, so daß $W = Y \cap U$.*
2. abgeschlossen in Y*, falls es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ gibt, so daß $W = Y \cap A$.*

Satz 2.29 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $W \subset Y$ offen in Y genau dann, wenn $\forall w \in W\ \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(w) \cap Y \subset W$.*

Definition 2.30 *Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt* stetig*, falls gilt: Für jede offene Teilmenge $U \subset X_2$ ist $f^{-1}(U) \subset X_1$ offen.*

(Informell gesprochen: Stetige Urbilder offener Mengen sind offen.)

Satz 2.31 *Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) zwei metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist stetig.*
2. $\forall x \in X_1\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X_1,\ d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
3. *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X_1 gilt: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergent in X_2, und $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.*

Satz 2.32 *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen.*

1. *Falls $f_n \xrightarrow{||\cdot||_p} f$ für $p \geq 1$, so ist $\lim \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$.*
2. *Falls $f_n \Longrightarrow f$, so ist $\lim \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$.*

Bemerkung. Die Folgerung des Satzes gilt *nicht*, falls $f_n \overset{punktw.}{\longrightarrow} f$.

Definition 2.33 *Seien* (X_1, d_1), (X_2, d_2) *metrische Räume. Eine Funktion* $f : X_1 \to X_2$ *heißt* Kontraktion*, falls* $\exists q \in (0,1)$, $\forall x, y \in X_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leq q\ d_1(x, y).$$

q *heißt* Kontraktionskonstante von f.

Bemerkung. Ist $f : X_1 \to X_2$ eine Kontraktion, so ist f stetig.

Satz 2.34 (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei* (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \to X$ *eine Kontraktion. Dann hat* f *genau einen* Fixpunkt*, d.h. es gibt genau ein* $x \in X$ *mit* $f(x) = x$.

Bemerkung. Aus dem Beweis des Fixpunktsatzes folgt: Ist $x_0 \in X$ beliebig, so konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen den Fixpunkt $x \in X$, und es gilt die Abschätzung:

$$d(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q} C,$$

wobei $C := d(x_0, x_1)$ und $q \in (0,1)$ die Kontraktionskonstante ist.

Definition 2.35 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Eine Teilmenge* $K \subset X$ *heißt* kompakt*, falls gilt: Jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* K *hat eine in* K *konvergente Teilfolge, d.h.* $\exists (x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim x_{\varphi(n)} \in K$, *wobei* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *streng monoton steigend ist.*

Definition 2.36 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Eine Teilmenge* $B \subset X$ *heißt* beschränkt*, falls* $\exists x_0 \in X$, $\exists C > 0$, $\forall y \in B$, $d(y, x_0) \leq C$.

Bemerkung.

1. Ist $B \subset X$ beschränkt, so kann man das Element $x_0 \in X$ durch ein beliebiges Element $x_0' \in X$ ersetzen. (Dabei ist natürlich die Konstante $C > 0$ entsprechend anzupassen.)

2. Sind $d_1 \sim d_2$ äquivalente Metriken auf X, so ist $B \subset X$ beschränkt bzgl. d_1 genau dann, wenn $B \subset X$ beschränkt bzgl. d_2 ist.

3. Sind $d_1 \sim d_2$ äquivalente Metriken auf X, so ist $K \subset X$ kompakt bzgl. d_1 genau dann, wenn $K \subset X$ kompakt bzgl. d_2 ist.

Satz 2.37 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann ist jede kompakte Teilmenge* $K \subset X$ *beschränkt und abgeschlossen.*

Bemerkung. Im Gegensatz zum Fall $X = \mathbb{K}$ (vgl. Satz 3.22 Kurzskript Analysis I) ist die Umkehrung dieses Satzes i.a. falsch. Gegenbeispiel:

$X = (C^0([0,1]), ||\cdot||_\infty)$, $K := \{f \in C^0([0,1]) \mid ||f|| \leq 1\}$. Dann ist $K \subset X$ beschränkt und abgeschlossen, aber *nicht* kompakt: In der Tat hat die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := x^n$ *keine* konvergente Teilfolge.

Satz 2.38 *Sei $f : X_1 \to X_2$ eine stetige Funktion zwischen den metrischen Räumen (X, d_1), (X, d_2), und sei $K \subset X_1$ kompakt. Dann ist auch $f(K) \subset X_2$ kompakt.*

(Informell gesprochen: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.)

Satz 2.39 *Sei V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $K \subset V$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *K ist kompakt.*
2. *K ist beschränkt und abgeschlossen.*

Satz 2.40 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.*

Definition 2.41 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Eine* offene Überdeckung von Y *ist eine Menge von offenen Teilmengen $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ mit $U_\alpha \subset X$ offen, so daß*

$$Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Eine Teilüberdeckung *einer offenen Überdeckung ist eine Teilmenge $\{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$, wobei $J \subset I$, so daß*

$$Y \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha.$$

Satz 2.42 (Heine-Borel) *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *K ist kompakt.*
2. *Jede offene Überdeckung von K hat eine endlichen Teilüberdeckung.*
   D.h.: Ist $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine Menge von offenen Mengen mit $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, so gibt es endlich viele Elemente $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in I$, so daß $K \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$.

Definition 2.43 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein* Häufungspunkt von X *ist ein Punkt $x_0 \in X$, so daß es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gibt mit $x_n \neq x_0$ für alle n und $\lim x_n = x_0$. Ist $x_0 \in X$ kein Häufungspunkt, so heißt x_0 ein* isolierter Punkt.

Definition 2.44 *Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt. Man sagt $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert, falls*

$$\exists L \in Y \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X, \quad 0 < d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), L) < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt L Grenzwert *und man schreibt $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$.*

Satz 2.45 *Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion, $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt und $L \in Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

2. *Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 = \lim x_n$ gilt: $L = \lim f(x_n)$.*

Satz 2.46 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) und (Z, d_3) metrische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Funktionen. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Definition 2.47 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein* Weg in X *ist eine stetige Abbildung $c : [a, b] \to X$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

$c(a)$ (bzw. $c(b)$) heißt der Anfangspunkt *(bzw.* Endpunkt*) von c, und c heißt* Weg von $c(a)$ nach $c(b)$.

Definition 2.48 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* wegzusammenhängend*, wenn gilt: Für alle $p, q \in X$ gibt es einen Weg von p nach q.*

Definition 2.49 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* zusammenhängend*, falls gilt: Ist $U \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen, dann ist $U = \emptyset$ oder $U = X$.*

Satz 2.50 *Ist (X, d) wegzusammenhängend, dann ist (X, d) zusammenhängend.*

Die Umkehrung gilt i.a. nicht: Es gibt Räume, die zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend sind.

Satz 2.51 *Sei V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $U \subset V$ offen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *U ist wegzusammenhängend.*

2. *U ist zusammenhängend.*

3 Differenzierbarkeit

Definition 3.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Man sagt f ist* differenzierbar in x_0*, falls eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so daß für alle $x \in U$ gilt:*

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x - x_0) + R(x),$$

wobei für die so definierte Funktion $R : U \to \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||R(x)||}{||x - x_0||} = 0.$$

Die lineare Abbildung ϕ heißt dann Differential von f in x_0*, und man schreibt $\phi = df_{x_0}$.*

Satz 3.2 *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$, so ist das Differential von f in x_0 eindeutig bestimmt. Genauer: Sind $\phi, \phi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei lineare Funktionen mit den in Definition 3.1 geforderten Eigenschaften, so ist $\phi = \phi'$.*

Satz 3.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist f stetig in x_0, d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Satz 3.4 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in U$ differenzierbar, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f \pm g$ und cf in x_0 differenzierbar, und es gilt:*

$$d(f \pm g)_{x_0} = df_{x_0} \pm dg_{x_0}, \qquad\qquad d(cf)_{x_0} = c\, df_{x_0}.$$

Satz 3.5 (Kettenregel) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : V \to \mathbb{R}^l$ Funktionen mit $f(U) \subset V$. Sei f differenzierbar in $x_0 \in U$ und g differenzierbar in $f(x_0) \in V$. Dann ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in x_0, und es gilt:*

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \cdot df_{x_0},$$

wobei die Multiplikation auf der rechten Seite die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen (bzw. Multiplikation von Matrizen) bezeichnet.

Satz 3.6 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Bezeichne die Komponenten von f mit $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, d.h.*

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist f differenzierbar in $t_0 \in I$ genau dann, wenn alle f_i, $i = 1, \ldots, m$, differenzierbar in $t_0 \in I$ sind. In diesem Falle ist die lineare Abbildung

$$df_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \qquad \textit{gegeben durch} \qquad df_{t_0}(s) = s \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_m'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Also ist die $(m \times 1)$-Matrix, die df_{t_0} repräsentiert, der Spaltenvektor $(f_1'(t_0), \ldots, f_m'(t_0))^t$.

Definition 3.7 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ stetig.*

1. *Ein* Polygonzug *von f ist eine Menge $P = \{f(t_0), \ldots, f(t_k)\}$, wobei $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ ist.*
2. *Die* Länge eines Polygonzugs *P ist definiert als $L(P) := \sum_{i=1}^k ||f(t_i) - f(t_{i-1})||_2$.*
3. *f heißt* rektifizierbar, *wenn die Menge $\{L(P) \mid P \text{ ein Polygonzug von } f\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.*
4. *Ist f rektifizierbar, so ist die* Länge von f *(oder auch* Bogenlänge von f*) definiert als*

$$L(f) := \sup\{L(P) \mid P \textit{ ein Polygonzug von } f\}.$$

(Falls f nicht *rektifizierbar ist, so sagt man auch $L(f) = \infty$.)*

Satz 3.8 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))^t$, stetig differenzierbar, d.h. $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar für $i = 1, \ldots, m$. Dann ist f rektifizierbar, und*

$$L(f) = \int_a^b ||f'(t)||_2 \; dt.$$

Definition 3.9 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$. Die i-te* partielle Ableitung von f in *$x_0 = (v_1, \ldots, v_n)^t$ ist definiert als*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0} \quad := \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i + t \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Hat $f : U \to \mathbb{R}^m$ die Komponenten $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^t$, so läßt sich nach der gleichen Formel auch die i-te partielle Ableitung von f bilden. Wegen Satz 3.6 ist diese Ableitung dann komponentenweise zu bilden, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)^t$.

Satz 3.10 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit Komponenten $f_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$. Sei $x_0 \in U$.*

1. *Falls f differenzierbar in x_0 ist, dann existieren alle partiellen Ableitungen $\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{x_0}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Außerdem ist die Ableitung $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die Matrix*
$$df_{x_0} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right|_{x_0} \end{pmatrix}.$$

2. *Falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ auf U (oder zumindest in einer Umgebung von x_0) existieren und in x_0 stetig sind, dann ist f differenzierbar in x_0.*

Bemerkung. Die Matrix $df_{x_0} = \left(\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{x_0} \right)$ heißt *Jacobimatrix von f in x_0*.

Definition 3.11 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt* stetig differenzierbar, *falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ auf ganz U existieren und stetig sind.*

Bemerkung. Nach Satz 3.10 ist demnach jede stetig differenzierbare Funktion auch differenzierbar.

Definition 3.12 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Der* Gradient von f in x_0 *ist definiert als*

$$(\nabla f)_{x_0} = (grad\ f)_{x_0} := (df_{x_0})^t = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0} \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x_0} \end{pmatrix}.$$

Definition 3.13 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = ||v||_2 = 1$. Die* Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung v *ist definiert als*

$$v_{x_0}(f) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + tv).$$

Satz 3.14 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$. Dann gilt:*

$$v_{x_0}(f) = (\nabla f)_{x_0} \cdot v =< (\nabla f)_{x_0}, v >,$$

wobei die rechte Seite das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ *bezeichnet: $x \cdot y =< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$.*

Korollar 3.15 *Seien $f : U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$ wie vorher. Dann gilt:*

1. $|v_{x_0}(f)| \leq ||(\nabla f)_{x_0}||$.
2. *Falls $(\nabla f)_{x_0} \neq 0$, dann ist $v_{x_0}(f) = \pm||(\nabla f)_{x_0}||$ genau dann, wenn $v = \pm\frac{(\nabla f)_{x_0}}{||(\nabla f)_{x_0}||}$.*

Definition 3.16 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Mengen $N_c := f^{-1}(c)$ für $c \in \mathbb{R}$ heißen* Niveauflächen von f.

Ist f differenzierbar und $\alpha : I \to N_c \subset U$ eine differenzierbare Kurve, so ist $< \alpha'(t), (\nabla f)_{\alpha(t)} >= 0$ für alle $t \in I$. D.h.: **Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen**.

Definition 3.17 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$. Dann heißt f*

1. 2-mal differenzierbar, *falls f differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind.*
2. 2-mal stetig differenzierbar, *falls f 2-mal differenzierbar ist und die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) : U \to \mathbb{R}$ stetig sind.*
3. k-mal differenzierbar, *falls f $(k-1)$-mal differenzierbar ist, und alle $(k-1)$-ten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_{k-1}}} : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind.*
4. k-mal stetig differenzierbar, *falls f k-mal differenzierbar ist, und alle k-ten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} : U \to \mathbb{R}$ stetig sind.*
5. beliebig oft differenzierbar, *falls f k-mal differenzierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Satz 3.18 (Satz von Schwarz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar, d.h.:*

$$\text{Für alle } i, j = 1, \ldots, n \text{ gilt:} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Definition 3.19 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Die* Hessesche Matrix von f in x_0 *ist definiert als*

$$\mathcal{H}_{x_0}(f) := \left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0} \right)_{i,j=1,\ldots n} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\right|_{x_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\right|_{x_0} & \cdots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}\right|_{x_0} \end{pmatrix}.$$

Ist f zweimal *stetig* differenzierbar, so ist die Hessesche Matrix nach dem Satz von Schwarz immer symmetrisch.

Satz 3.20 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $I := \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\}$. Dann ist die Funktion*

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(t) := f(x_0 + tv)$$

k-mal stetig differenzierbar, und $g^{(k)}(t) = < v, \nabla >^k (f)|_{x_0+tv} = \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k (f)|_{x_0+tv}$.

Definition 3.21 *Ein* Monom in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ *ist eine Funktion*

$$M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad M(x_1, \ldots, x_n) := x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n},$$

wobei $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}_0$. Der Grad von M *ist definiert als $j_1 + \ldots + j_n$.*

Definition 3.22 *Ein* Polynom in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ *ist eine Linearkombination von Monomen in $x_1, \ldots, x_n$, d.h. eine Funktion*

$$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad P = c_1 M_1 + \ldots + c_r M_r,$$

wobei $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ Konstanten und $M_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Monome in $x_1, \ldots, x_n$ sind. Der Grad von P *ist der maximale Grad der Monome M_i.*

Definition 3.23

1. *Ein* Multi-Index *oder* n-Multi-Index *ist ein n-Tupel $\alpha = (j_1, \ldots, j_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$, d.h. $j_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \ldots n$.*
2. *Der* Betrag *oder* Grad *eines Multi-Index ist definiert als $|\alpha| := j_1 + \ldots + j_n$.*
3. *Es bezeichnet $\alpha! := j_1! \ldots j_n!$.*
4. *Ist $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $|\alpha| \leq k$, so bezeichnet*
$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f := \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_n}}{\partial x_n^{j_n}} f.$$

Satz 3.24 *Sei $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Monom, $M(x_1, \dots, x_n) := x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$. Sei α ein n-Multi-Index. Dann ist*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} M \Big|_0 = \begin{cases} \alpha! & \textit{falls } \alpha = (j_1, \dots j_n), \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Satz 3.25 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gibt es genau ein Polynom T_k^{f,x_0} vom Grad $\leq k$, genannt das* Taylorpolynom von f vom Grade k in x_0, *so daß*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \Big|_{x_0} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} T_k^{f,x_0} \Big|_{x_0}$$

für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Dieses Polynom ist gegeben durch die Formel

$$T_k^{f,x_0}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha = (j_1, \dots, j_n), \\ |\alpha| \leq k}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \Big|_{x_0} (x_1 - v_1)^{j_1} \dots (x_n - v_n)^{j_n},$$

wobei $x_0 = (v_1, \dots, v_n)$.

Beispiel. Die Taylorpolynome der Grade $k = 0, 1$ und 2 lauten demnach

$$\begin{aligned} T_0^{f,x_0}(x) &= f(x_0), \\ T_1^{f,x_0}(x) &= f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0), \\ T_2^{f,x_0}(x) &= f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^t \, \mathcal{H}_{x_0}(f) \, (x - x_0). \end{aligned}$$

Definition 3.26 *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die* Strecke von x nach y *ist die Menge*

$$\overline{xy} := \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} = \{x + t(y - x) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz 3.27 (Satz von Taylor) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Seien $x, x_0 \in U$ mit $\overline{xx_0} \subset U$. Dann gibt es ein $\xi \in \overline{xx_0}$, so daß*

$$f(x) = T_k^{f,x_0}(x) + \frac{1}{(k+1)!} < x - x_0, \nabla >^{k+1} (f)|_\xi.$$

Korollar 3.28 (Mittelwertsatz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $x, x_0 \in U$ mit $\overline{xx_0} \subset U$. Dann gibt es ein $\xi \in \overline{xx_0}$, so daß*

$$f(x) - f(x_0) = df_\xi(x - x_0) = < (\nabla f)_\xi, x - x_0 > .$$

Satz 3.29 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $R := f - T_k^{f,x_0}$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{||x - x_0||^k} = 0.$$

Bemerkung. Funktionen $R: U \to \mathbb{R}$, für die $\lim_{x\to x_0} \frac{|R(x)|}{||x-x_0||^l} = 0$ gilt, bezeichnet man auch mit $o(||x-x_0||^l)$.

Außerdem bezeichnet man mit $O(||x-x_0||^l)$ Funktionen $R: U \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß es ein $\varepsilon > 0$ und ein $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in U$ mit $0 < ||x-x_0|| < \varepsilon$ gilt: $\frac{|R(x)|}{||x-x_0||^l} \leq C$.

Mit dieser Schreibweise läßt sich Satz 3.29 verkürzt so formulieren: Für eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in U$ gilt

$$f(x) = T_k^{f,x_0}(x) + o(||x-x_0||^k).$$

Aus dem Beweis von Satz 3.29 folgt sogar:

$$f(x) = T_k^{f,x_0}(x) + O(||x-x_0||^{k+1}).$$

Satz 3.30 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grade $\leq k$.*

Wenn $f(x) = P(x) + o(||x-x_0||^k)$, dann ist $P = T_k^{f,x_0}$.

Ebenso gilt: Wenn $f(x) = P(x) + O(||x-x_0||^{k+1})$, dann ist $P = T_k^{f,x_0}$.

Definition 3.31 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in U$. Dann heißt x_0 ein*

1. absolutes Minimum (bzw. absolutes Maximum) von f, *falls* $\forall x \in U$, $f(x) \geq f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) \leq f(x_0)$*),*
2. lokales Minimum (bzw. lokales Maximum) von f, *falls* $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap U$, $f(x) \geq f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) \leq f(x_0)$*),*
3. echtes absolutes Minimum (bzw. echtes absolutes Maximum) von f, *falls* $\forall x \in U$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) < f(x_0)$*),*
4. echtes lokales Minimum (bzw. echtes lokales Maximum) von f, *falls* $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in U$, $0 < ||x-x_0|| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) < f(x_0)$*),*
5. absolutes Extremum*, falls x_0 ein absolutes Maximum oder ein absolutes Minimum ist,*
6. lokales Extremum*, falls x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.*

Definition 3.32 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. $x_0 \in U$ heißt* kritischer Punkt von f*, falls $df_{x_0} = 0$, d.h. falls $(\nabla f)_{x_0} = 0$.*

Definition 3.33 *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann heißt A*

1. positiv semidefinit *(bzw.* negativ semidefinit*), falls $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $v^tAv \geq 0$ (bzw. $v^tAv \leq 0$),*
2. positiv definit *(bzw.* negativ definit*), falls $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0 \Rightarrow v^tAv > 0$ (bzw. $v^tAv < 0$).*

Satz 3.34 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

1. *Ist $x_0 \in U$ ein lokales Extremum von f, dann ist x_0 ein kritischer Punkt von f.*
2. *Ist f zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$ ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum) von f, so ist die Hessesche Matrix $\mathcal{H}_{x_0}(f)$ positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit).*

Satz 3.35 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f.*

Ist die Hessesche Matrix $\mathcal{H}_{x_0}(f)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist x_0 ein echtes lokales Minimum (bzw. echtes lokales Maximum) von f.

Lemma 3.36 *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\mathcal{H}_{x_0}(f)$ positiv (bzw. negativ) definit, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\mathcal{H}_x(f)$ positiv (bzw. negativ) definit ist für alle $x \in B_\varepsilon(x_0) \subset U$.*

Definition 3.37 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x_0 \in U$. Dann heißt f* lokal invertierbar in x_0, *wenn es offene Umgebungen $U_0 \subset U$, $x_0 \in U_0$ und $V_0 \subset \mathbb{R}^n$, $f(x_0) \in V_0$ gibt, so daß gilt:*

1. *$V_0 = f(U_0)$, und die Einschränkung $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ ist bijektiv,*
2. *$(f|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ ist stetig differenzierbar.*

Satz 3.38 (Satz von der Existenz des lokalen Inversen) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x_0 \in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist lokal invertierbar in x_0.*
2. *Die Jacobimatrix df_{x_0} ist invertierbar.*

In diesem Falle ist $d(f^{-1})_{f(x_0)} = (df_{x_0})^{-1}$.

Lemma 3.39 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $df_0 = Id$. Dann ist f lokal invertierbar in 0.*

Satz 3.40 *Sei $Gl(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$. Dann ist $Gl(n, \mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ offen, und die Abbildung*

$$\imath : Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R}), \qquad \imath(A) := A^{-1}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

Definition 3.41 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann bezeichnet*

1. *$C^k(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f$ k-mal stetig differenzierbar$\}$, und $C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R})$,*
2. *$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f$ beliebig oft differenzierbar$\}$, und $C^\infty(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$.*

Korollar 3.42 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$). Ist df_{x_0} invertierbar für ein $x_0 \in U$, so daß nach dem Umkehrsatz 3.38 eine lokale Umkehrfunktion $f^{-1} : V_0 \to U_0$ existiert ($x_0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$ und $f(x_0) \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$), so ist auch $f^{-1} \in C^k(V_0, \mathbb{R}^n)$.*

Definition 3.43 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+l}$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^l$. Schreibe Punkte in U als (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^l$. Sei $(x_0, y_0) \in U$ und $c_0 := F(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^l$. Man sagt* die Gleichung $F(x, y) = c_0$ ist in der Nähe von (x_0, y_0) nach y auflösbar, *falls es Umgebungen $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und $V_0 \subset \mathbb{R}^{n+l}$ von (x_0, y_0) und eine Funktion $f : U_0 \to \mathbb{R}^l$ gibt, so daß*

$$V_0 \cap F^{-1}(c_0) = \{(x, f(x)) \mid x \in U_o\},$$

d.h. in einer Umgebung von (x_0, y_0) ist $F^{-1}(c_0)$ der Graph einer Funktion f.

Satz 3.44 (Satz über implizite Funktionen) *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+l}$ offen und $F \in C^k(U, \mathbb{R}^l)$, $k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$. Für $(x_0, y_0) \in U$ sei $c_0 := F(x_0, y_0)$, und man definiere*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)} := \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i}\bigg|_{(x_0,y_0)}\right)_{\substack{r=1,\dots,l \\ i=1,\dots,n}} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)} := \left(\frac{\partial F_r}{\partial y_i}\bigg|_{(x_0,y_0)}\right)_{r,i=1,\dots l}.$$

Falls $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$ invertierbar ist, so ist die Gleichung $F(x, y) = c_0$ in der Nähe von (x_0, y_0) nach y auflösbar. Außerdem ist die entsprechende Funktion $f : U_0 \to \mathbb{R}^l$ k-mal stetig differenzierbar.

Satz 3.45 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, h \in C^1(U)$. Sei $S := \{x \in U \mid h(x) = 0\}$. Ist $x_0 \in S$ ein lokales Extremum der Einschränkung*

$$f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

und $(\nabla h)_{x_0} \neq 0$, so ist $(\nabla f)_{x_0} = \lambda(\nabla h)_{x_0}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Äquivalent hierzu definiere man die Funktion $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x, \lambda) := f(x) + \lambda h(x)$. Ist $x_0 \in S$ ein lokales Extremum der Einschränkung $f|_S$ und $(\nabla h)_{x_0} \neq 0$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so daß $(\nabla F)_{(x_0,\lambda)} = 0$.

Bemerkung. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Lagrangemultiplikator.*

4 Das n-dimensionale Lebesgue-Integral

Definition 4.1 *Ein n-*dimensionaler Quader *ist eine Menge $Q := I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, wobei $I_k \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.*

Die Länge eines Intervalls *I ist definiert als $\mu_1(I) := b - a$, falls $I = (a, b), [a, b), (a, b]$ oder $[a, b]$ mit $a \leq b$ gilt. Ist I unbeschränkt, so ist $\mu_1(I) = \infty$. Ist $I = \emptyset$, so ist $\mu_1(I) = 0$.*

Das n-dimensionale Maß *eines Quaders $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als $\mu_n(Q) := \mu_1(I_1) \ldots \mu_1(I_n)$, wobei hier die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ gilt.*

Definition 4.2 *Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt* Nullmenge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von offenen Quadern $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(Q_k) < \varepsilon$.*

Satz 4.3 *Sei $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Nullmengen $N_k \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. D.h.: "Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge".*

Konvention. Man sagt, eine gewisse Aussage gilt für *fast alle* $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, falls es eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, so daß die Aussage für alle $x \in \Omega \backslash N$ gilt.

Definition 4.4 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Die* charakteristische Funktion von A *ist die Funktion*

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases} .$$

Definition 4.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.*

1. *Eine* Treppenfunktion auf Ω *ist eine Funktion der Form*

$$\tau = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{Q_k},$$

wobei $c_1, \ldots, c_l \in \mathbb{R}$ und $Q_1, \ldots, Q_l \subset \Omega$ Quader mit $\mu_n(Q_k) < \infty$ sind.

2. *$Tr(\Omega)$ bezeichnet den Vektorraum aller Treppenfunktionen auf Ω.*

3. *Das* Integral einer Treppenfunktion $\tau = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{Q_k}$ *ist definiert als*

$$\int_\Omega \tau(x)\ dx := \sum_{k=1}^{l} c_k \mu_n(Q_k).$$

Bemerkung.

1. Das Integral $\int : Tr(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Funktion.

2. Sind $\tau, \sigma \in Tr(\Omega)$, dann sind auch $|\tau|, \max(\tau, \sigma), \min(\tau, \sigma) \in Tr(\Omega)$.

Definition 4.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$. Man sagt f_n* steigt (bzw. fällt) punktweise gegen *f und benutzt die Schreibweise $f_n \nearrow f$ (bzw. $f_n \searrow f$), falls für fast alle $x \in \Omega$ gilt: $(f_n(x))$ ist eine monoton wachsende (bzw. fallende) Folge und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*

Definition 4.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.*

1. *Eine Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ heißt* Lebesgue-integrierbar, *falls es eine Folge $\tau_n \in Tr(\Omega)$ gibt, so daß $\tau_n \nearrow f$ und $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tau_n(x)dx$ existiert. Die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to [0, \infty]$ bezeichnet man mit $\mathcal{L}^+(\Omega)$.*

2. *Für $f : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ definiere $f^\pm := \max\{\pm f, 0\}$, so daß $f^\pm : \Omega \to [0, \infty]$ und $f = f^+ - f^-$. Dann heißt f* Lebesgue-integrierbar, *falls $f^\pm \in \mathcal{L}^+(\Omega)$. Die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ bezeichnet man mit $\mathcal{L}(\Omega)$.*

Lemma 4.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $Tr(\Omega)$ mit $\tau_n \searrow 0$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tau_n(x)dx = 0$.*

Lemma 4.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : \Omega \to [0, \infty]$, $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $Tr(\Omega)$ so daß $\tau_n \nearrow f$ und $\sigma_n \nearrow f$. Falls die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tau_n(x)dx$ und $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sigma_n(x)dx$ existieren, so sind sie gleich.*

Definition 4.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.*

1. *Sei $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ und sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $Tr(\Omega)$ mit $\tau_n \nearrow f$, für die $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tau_n(x)dx$ existiert. Dann definiert man das* Lebesgue-Integral von f *als*
$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tau_n(x)dx.$$
2. *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega)$. Dann definiert man das* Lebesgue-Integral von f *als*
$$\int_\Omega f(x)dx := \int_\Omega f^+(x)dx - \int_\Omega f^-(x)dx,$$
wobei $\int_\Omega f^\pm(x)dx$ wie in 1. definiert ist.

Das Lebesgue-Integral ist wohldefiniert wegen Lemma 4.9.

Satz 4.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$f \pm g \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\int_\Omega (f \pm g)(x)dx = \int_\Omega f(x)dx \pm \int_\Omega g(x)dx$.*
2. *$cf \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\int_\Omega (cf)(x)dx = c\int_\Omega f(x)dx$.*
3. *Ist $f(x) \leq g(x)$ fast überall, so ist auch $\int_\Omega f(x)dx \leq \int_\Omega g(x)dx$.*
4. *$|f| \in \mathcal{L}(\Omega)$, und es gilt: $\left|\int_\Omega f(x)dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|dx$.*
5. *$\max\{f, g\} \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $\min\{f, g\} \in \mathcal{L}(\Omega)$.*

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt: $\mathcal{L}(\Omega)$ ist ein Vektorraum und die Abbildung $\int : \mathcal{L}(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ ist linear.

Satz 4.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.*

1. *Ist $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ und $g : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ erfüllt $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$, dann ist auch $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, und $\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega g(x)dx$.*
2. *Ist $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, $f(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

   1. $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = 0,$ 2. $f(x) = 0$ *für fast alle* $x \in \Omega$.

Satz 4.13 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezeichne $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Erweiterung*
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{für } x \notin [a, b]. \end{cases}$$
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist $\tilde{f}$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt
$$\int_\mathbb{R} \tilde{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$
d.h. der Wert des Lebesgue-Integrals von $\tilde{f}$ stimmt mit dem Wert des Riemann-Integrals von f überein.

Bemerkung.

1. Laut Definition 4.10 muß der Definitionsbereich einer Lebesgue-integrierbaren Funktion offen sein, während der Definitionsbereich einer Riemann-integrierbaren Funktion stets ein kompaktes Intervall ist. Deshalb muß man für das Lebesgue-Integral die Erweiterung $\tilde{f}$ betrachten.

   Es ist aber gebräuchlich, die Erweiterung von f mit dem gleichen Symbol zu bezeichnen, d.h. nicht zwischen f und $\tilde{f}$ zu unterscheiden. Ist also davon die Rede, daß $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, so ist damit stets gemeint, daß die *Erweiterung* von f Lebesgue-integrierbar ist.

2. Aus dem Satz folgt insbesondere, daß (die Erweiterung) jede(r) stückweise stetige(n) Funktion Lebesgue-integrierbar ist, und zur Berechnung des Integrals kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 5.11, Analysis I) verwendet werden.

3. Merke: Es gibt Lebesgue-integrierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die *nicht* Riemann-integrierbar sind (vgl. Hausaufgabenblatt 11).

Satz 4.14 (Satz von der monotonen Konvergenz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega)$, so daß für fast alle $x \in \Omega$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigt (bzw. fällt), und so daß $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$ existiert.*

Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, so daß $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$, und es gilt:

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Satz 4.15 (Satz von der dominierten Konvergenz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega)$, so daß der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ existiert, und definiere $f(x) := 0$, falls der Grenzwert* nicht *existiert. Ferner gebe es ein $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, so daß $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in \Omega$.*

Dann ist $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ und es gilt:

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Satz 4.16 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so daß $|f| : I \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Dann ist f sowohl uneigentlich Riemann- als auch Lebesgue-integrierbar, und die Werte des uneigentlichen Riemann- und des Lebesgue-Integrals stimmen überein.*

Bemerkung. Ist $I \subset \mathbb{R}$ nicht-kompakt und $f : I \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber $|f|$ *nicht* uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist f nicht Lebesgue-integrierbar. Zum Beispiel trifft dies auf die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x/x$ zu (vgl. Hausaufgabenblatt 11).

Ist $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \hat{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion und bezeichnet man Punkte des $\mathbb{R}^{n+m}$ als (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$, so definiert man

1. $f_x : \mathbb{R}^m \to \hat{\mathbb{R}}$, $f_x(y) := f(x, y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und
2. $f^y : \mathbb{R}^n \to \hat{\mathbb{R}}$, $f^y(x) := f(x, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^m$.

Satz 4.17 (Satz von Fubini und Tonelli) *Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ und verwende die Bezeichnung von oben. Dann gilt:*

1. *f_x ist Lebesgue-integrierbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$,*

2. *f^y ist Lebesgue-integrierbar für fast alle $y \in \mathbb{R}^m$,*

3. $$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^y(x)dx \right) dy.$$

   Insbesondere sind die (für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $y \in \mathbb{R}^m$ definierten) Funktionen $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x(y)dy$ und $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f^y(x)dx$ Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

Lemma 4.18 *Sei $N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Nullmenge. Sei*

$$N_x := \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in N\} \qquad \text{und} \qquad N^y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in N\}.$$

Dann sind $N_x \subset \mathbb{R}^m$ und $N^y \subset \mathbb{R}^n$ Nullmengen für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $y \in \mathbb{R}^m$.

Definition 4.19 *Sei Ω eine Menge.*

1. *Eine σ-*Algebra *$\mathcal{M}$* auf *Ω ist eine Menge von Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

   (a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,
   (b) Wenn $A \in \mathcal{M}$, dann ist auch $A^{\complement} := \Omega \backslash A \in \mathcal{M}$,
   (c) Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge in $\mathcal{M}$, so ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

2. *Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Ein* Maß auf *$\mathcal{M}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

   (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
   (b) Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge in $\mathcal{M}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, dann ist $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Ein Maßraum *$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ist eine Menge Ω mit einer σ-Algebra $\mathcal{M}$ auf Ω und einem Maß μ auf $\mathcal{M}$.*

Satz 4.20 *Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann gilt:*

1. *Falls $A, B \in \mathcal{M}$, dann ist auch $A \backslash B \in \mathcal{M}$.*

2. *Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge in $\mathcal{M}$, so ist auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.*

Satz 4.21 *Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt für alle $A, B, A_n \in \mathcal{M}$:*

1. *Falls $A \subset B$, dann ist $\mu(A) \leq \mu(B)$,*

2. *$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,*

3. *Falls $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, so ist $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,*

4. *Falls $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, so ist $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Definition 4.22 *1.* $A \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* Borel-Lebesgue-meßbar *wenn* $\chi_{A \cap B_R^\infty(0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *für jedes* $R > 0$, *wobei* $\chi_{A \cap B_R^\infty(0)}$ *die charakteristische Funktion von* $A \cap B_R^\infty(0)$ *und* $B_R^\infty(0)$ *die Kugel um* 0 *vom Radius* R *in* $||\cdot||_\infty$ *bezeichnet.*

2. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ auf $\mathbb{R}^n$ *ist die Menge aller Borel-Lebesgue-meßbaren Mengen.*

3. Das Borel-Lebesgue-Maß μ_n auf $\mathcal{B}_n$ *ist definiert durch*

$$\mu_n(A) := \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A \cap B_R^\infty(0)}(x) dx.$$

Der Lebesgue-Borel-Maßraum *ist das Tripel* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$.

Satz 4.23 $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *ist eine* σ*-Algebra und* $\mu_n : \mathcal{B}_n \to [0, \infty]$ *ist ein Maß auf* $\mathcal{B}_n$.

Definition 4.24 *Sei* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *ein Maßraum.*

1. Eine Nullmenge *ist eine Menge* $N \in \mathcal{M}$ *mit* $\mu(N) = 0$.

2. Der Maßraum heißt vollständig, *falls gilt: ist* $N \in \mathcal{M}$ *eine Nullmenge und* $N' \subset N$, *dann ist auch* $N' \in \mathcal{M}$.

Satz 4.25 *Der Borel-Lebesgue-Maßraum* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$ *ist vollständig. Desweiteren ist jede offene Menge Borel-Lebesgue-meßbar.*

Bemerkung.

1. Ist $A \in \mathcal{B}_n$ und $\mu_n(A) < \infty$, so folgt nach dem Satz der monotonen Konvergenz, daß $\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx$.
2. Für den Borel-Lebesgue-Maßraum stimmen die Begriffe der Nullmenge im Sinne der Definitionen 4.2 und 4.24 überein, d.h. $N \in \mathcal{B}_n$ erfüllt $\mu_n(N) = 0$ genau dann, wenn N eine Nullmenge im Sinne von Definition 4.2 ist.
3. Nach Satz 4.25 ist auch jede abgeschlossene Menge (als Komplement einer offenen Menge) wieder Borel-Lebesgue-meßbar und somit auch jeder Schnitt von offenen mit abgeschlossenen Mengen und wiederum Schnitte und Vereinigungen von solchen Mengen.

Beispiel. Es gibt kein Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, das den zusätzlichen Bedingungen $\mu([0, 1)) = 1$ und $\mu(A + c) = \mu(A)$ genügt, wobei $A + c := \{a + c \mid a \in A\}$ für $A \subset \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Daher kann ein "vernünftiges" Maß nicht für *alle* Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert werden. Dies ist der Grund, weshalb man das Borel-Lebesgue-Maß nur für bestimmte (allerdings sehr viele) Mengen definieren kann.

Zur Konstruktion einer nicht-meßbaren Menge $X \subset \mathbb{R}$ benötigt man das

Auswahlaxiom Seien I, Ω Mengen und $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine beliebige Kollektion von Teilmengen $X_\alpha \subset \Omega$, so daß $X_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in I$.

Dann gibt es eine *Auswahlfunktion* $f : I \to \Omega$, so daß $f(\alpha) \in X_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Lemma 4.26 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Translation, d.h. $T_{x_0}(x) := x + x_0$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ist $f : T_{x_0}(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, dann auch $f \circ T_{x_0} : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$, und es gilt*

$$\int_{T_{x_0}(\Omega)} f(y)dy = \int_\Omega (f \circ T_{x_0})(x)dx.$$

Lemma 4.27 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Basispermutation, d.h. A ist linear und $Ae_i = e_{\sigma(i)}$, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und σ eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ ist. Ist $f : A(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, dann auch $f \circ A : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$, und es gilt*

$$\int_{A(\Omega)} f(y)dy = \int_\Omega (f \circ A)(x)dx.$$

Lemma 4.28 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Scherung, d.h. A ist linear und es gibt Indizes $i \neq j$ und $t \in \mathbb{R}$, so daß $Ae_i = e_i + te_j$ und $Ae_k = e_k$ für $k \neq i$, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Ist $f : A(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, dann auch $f \circ A : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$, und es gilt*

$$\int_{A(\Omega)} f(y)dy = \int_\Omega (f \circ A)(x)dx.$$

Lemma 4.29 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Streckung, d.h. A ist linear und es gibt $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_i \neq 0$, so daß $Ae_i = c_i e_i$ für alle i, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Ist $f : A(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, dann auch $f \circ A : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$, und es gilt*

$$\int_{A(\Omega)} f(y)dy = |\det A| \int_\Omega (f \circ A)(x)dx.$$

Satz 4.30 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine* affine Abbildung, *d.h. $\varphi(x) = Ax + x_0$, wobei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist. Ist $f : \varphi(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, dann auch $f \circ \varphi : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$, und es gilt*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy = |\det A| \int_\Omega (f \circ \varphi)(x)dx.$$

Bemerkung. Falls A eine Scherung oder eine Basispermutation ist, dann ist $|\det A| = 1$, so daß Lemmata 4.27 und 4.28 Spezialfälle von Satz 4.30 sind.

Die Formel in Satz 4.30 gilt auch, wenn A *nicht* invertierbar und daher $\det A = 0$ ist. Dies wird hier allerdings nicht weiter benötigt.

Definition 4.31 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein* Diffeomorphismus *ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, so daß gilt:*

1. *φ ist injektiv und daher $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ bijektiv.*
2. *Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.*

Bemerkung.

1. Nach dem Umkehrsatz ist $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus genau dann, wenn φ injektiv und $d\varphi_x$ für alle $x \in \Omega$ invertierbar ist. Außerdem impliziert der Umkehrsatz, daß $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls offen ist.

2. Ist $x \in \Omega$ und $y := \varphi(x) \in \varphi(\Omega)$, so gilt $(d\varphi^{-1})_y = (d\varphi_x)^{-1}$.

Satz 4.32 (Transformationssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Sei $f : \varphi(\Omega) \to \hat{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann ist auch $|\det d\varphi_x|(f \circ \varphi) : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt die* Transformationsformel

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy = \int_\Omega |\det d\varphi_x|(f \circ \varphi)(x)dx.$$

Bemerkung. Ist $\varphi(x) = Ax + x_0$ eine affine Abbildung, so ist $d\varphi_x = A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Daher ist Satz 4.30 ein Spezialfall des Transformationssatzes 4.32.

Beispiel. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Borel-Lebesgue-meßbar und $r > 0$. Dann ist auch $Y := \{rx \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}^n$ Borel-Lebesgue-meßbar, und $\mu_n(Y) = r^n \mu_n(X)$.

Beispiel. *(Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$)* Betrachte die Transformation

$$\varphi : (0, \infty) \times I \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta) =: (x, y),$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall der Länge 2π ist. Dann ist $\varphi : (0, \infty) \times I \to \varphi((0, \infty) \times I)$ ein Diffeomorphismus, dessen Bild eine *geschlitzte Ebene* ist, d.h. das Komplement eines im Ursprung beginnenden Strahls. Insbesondere ist $\varphi((0, \infty) \times I) \subset \mathbb{R}^2$ das Komplement einer Nullmenge.

Es gilt $\det d\varphi_{(r,\theta)} = r$, und daher nach der Transformationsformel für eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\int_\Omega f(x, y)\ d(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ d(r, \theta).$$

Merkregel: $d(x, y) = r\ d(r, \theta)$.

Beispiel. *(Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$)* Betrachte die Transformation

$$\varphi : (0, \infty) \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(r, \theta, z) := (r\cos\theta, r\sin\theta, z) =: (x, y, z),$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall der Länge 2π ist. Dann ist $\varphi : (0, \infty) \times I \times \mathbb{R} \to \varphi((0, \infty) \times I \times \mathbb{R})$ ein Diffeomorphismus, dessen Bild das Komplement einer von der z-Achse berandeten Halbebene ist. Insbesondere ist $\varphi((0, \infty) \times I \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ das Komplement einer Nullmenge.

Es gilt $\det d\varphi_{(r,\theta,z)} = r$, und daher nach der Transformationsformel für eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_\Omega f(x, y, z)\ d(x, y, z) = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ r\ d(r, \theta, z).$$

Merkregel: $d(x, y, z) = r\ d(r, \theta, z)$.

Beispiel. *(Sphärische Koordinaten in $\mathbb{R}^3$)* Betrachte die Transformation

$$\varphi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times I \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(\rho,\phi,\theta) := (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi) =: (x,y,z),$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall der Länge 2π ist. Dann ist $\varphi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times I \to \varphi((0,\infty) \times (0,\pi) \times I)$ ein Diffeomorphismus, dessen Bild das Komplement einer von der z-Achse berandeten Halbebene ist. Insbesondere ist $\varphi((0,\infty) \times (0,\pi) \times I) \subset \mathbb{R}^3$ das Komplement einer Nullmenge.

Es gilt $\det d\varphi_{(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$, und daher nach der Transformationsformel für eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_\Omega f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\ \rho^2 \sin\phi\ d(\rho,\phi,\theta).$$

Merkregel: $d(x,y,z) = \rho^2 \sin\phi\ d(\rho,\phi,\theta)$.

Satz 4.33 (Cavalierisches Prinzip) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to [0,\infty]$ eine Funktion, so daß $f^n \in \mathcal{L}(I)$. Die Menge*

$$X := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in I, x \in \mathbb{R}^n, ||x|| \le f(t)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

heißt Rotationskörper *der Rotationskurve f, und es gilt:*

$$\mu_{n+1}(X) = V_n \int_I f(t)^n\ dt,$$

wobei $V_n := \mu_n(B_1(0))$ das n-dimensionale Volumen der Einheitskugel ist.

Satz 4.34 *Sei $V_n := \mu_n(B_1(0))$ das n-dimensionale Volumen der Einheitskugel. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_0$:*

$$V_{2n} = \frac{1}{n!}\pi^n, \qquad V_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

Bemerkung. Aus diesen Formeln folgt auch, daß $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$, d.h. in hohen Dimensionen ist das Volumen der Einheitskugel sehr klein!

Bezeichne Punkte in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit (x,t), wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und für $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ sei $\Omega_x := \{t \in \mathbb{R} \mid (x,t) \in \Omega\}$ und $\Omega^t := \{x \in \Omega \mid (x,t) \in \Omega\}$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so definiere $f_x : \Omega_x \to \mathbb{R}$ bzw. $f^t : \Omega^t \to \mathbb{R}$ durch $f_x(t) := f(x,t)$ bzw. $f^t(x) := f(x,t)$.

Satz 4.35 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so daß gilt:*

1. *$f^t : \Omega^t \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar für alle $t \in \mathbb{R}$,*
2. *$f_x : \Omega_x \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$,*
3. *Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es eine offene Umgebung $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, so daß $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| \leq h(t)$ für alle $(x,t) \in \Omega$ mit $x \in U$.*

Dann ist die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) := \int_{\Omega_x} f(x,t)\ dt$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_x} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\ dt.$$

Satz 4.36 *Definiere die* Gammafunktion *durch*

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\ dt.$$

Dann ist Γ beliebig oft differenzierbar, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n\ t^{x-1} e^{-t}\ dt.$$

Satz 4.37 *Es gilt:*

1. *$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$;*
2. *$\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$;*
3. *$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}\ \sqrt{\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung. Mit der Γ-Funktion lassen sich die Volumina der Einheitskugeln in $\mathbb{R}^n$ von Satz 4.34 auch schreiben als

$$V_n = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$