Analysis III, WS 05/06
Verzeichnis der wichtigsten Definitionen und Sätze

Lorenz Schwachhöfer

Inhaltsverzeichnis

1 Integralsätze

Definition 1.1 *Eine* Kurve im $\mathbb{R}^n$ *ist eine stetige, stückweise differenzierbare Funktion* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$*, d.h.* γ *ist stetig und es gibt eine Unterteilung* $a = t_0 < \ldots < t_m = b$ *des Definitionsbereiches, so daß* $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ *stetig differenzierbar ist für* $i = 1, \ldots, m$*.*

Das Bild $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* Spur von γ*. Der* Anfangspunkt (bzw. Endpunkt) von γ *ist der Punkt* $\gamma(a)$ *(bzw.* $\gamma(b)$*).*

Sei $u : [c,d] \to [a,b]$ *eine differenzierbare Funktion mit* $u'(t) > 0$ *für alle* $t \in [c,d]$ *und* $u(c) = a$, $u(d) = b$*. Dann heißt die Kurve* $\sigma(t) := \gamma(u(t))$ Umparametrisierung von γ.

Bemerkung. Ist σ eine Umparametrisierung von γ, so schreibt man $\sigma \sim \gamma$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in $\mathbb{R}^n$.

Ist $\sigma \sim \gamma$, so haben σ und γ die gleiche Spur sowie den gleichen Anfangs- bzw. Endpunkt.

Definition 1.2 *Ein* Weg in $\mathbb{R}^n$ *ist eine Äquivalenzklasse von Kurven bzgl. der Umparametrisierungsrelation. Ist* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine Kurve, so bezeichnet* $[\gamma]$ *den von* γ *repräsentierten Weg.*

Nach obiger Bemerkung ist die Spur sowie Anfangs- und Endpunkt eines Weges wohldefiniert.

Definition 1.3 *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine Kurve. Die Kurve* $-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{R}^n$ *ist definiert als* $(-\gamma)(t) := \gamma(-t)$*, und der von* $(-\gamma)$ *repräsentierte Weg wird mit* $-[\gamma]$ *bezeichnet.*

Bemerkung. Die Wege $[\gamma]$ und $-[\gamma]$ haben die gleiche Spur. Der Anfangspunkt von $[\gamma]$ ist der Endpunkt von $-[\gamma]$ und umgekehrt. Ferner gilt $-(-[\gamma]) = [\gamma]$.

Definition 1.4 *Seien* $[\gamma]$ *und* $[\sigma]$ *Wege in* $\mathbb{R}^n$*, so daß der Endpunkt von* $[\gamma]$ *und der Anfangspunkt von* $[\sigma]$ *übereinstimmen. Wähle Repräsentanten* $\gamma : [-1,0] \to \mathbb{R}^n$ *und* $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *dieser Wege. Die* Verkettung von $[\gamma]$ und $[\sigma]$ *ist der Weg, der durch die Kurve*

$$(\gamma \star \sigma) : [-1,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad (\gamma \star \sigma)(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{falls } t \in [-1,0) \\ \sigma(t), & \text{falls } t \in [0,1]. \end{cases}$$

repräsentiert wird. Dieser wird mit $[\gamma] \star [\sigma]$ *bezeichnet.*

Bemerkung. Sind $[\gamma], [\sigma]$ und $[\tau]$ Wege in $\mathbb{R}^n$ und sind die folgenden Verknüpfungen definiert, so gilt:

$$([\gamma] \star [\sigma]) \star [\tau] = [\gamma] \star ([\sigma] \star [\tau]),$$

d.h. $\star$ ist assoziativ. Allerdings sind die Verknüpfungen $[\gamma] \star [\sigma]$ und $[\sigma] \star [\gamma]$ i.a. *nicht* gleich, selbst wenn beide definiert sind.

Zur Erinnerung (Analysis II, Definition 3.7 und Satz 3.8): Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so ist γ rektifizierbar, und die Länge von γ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| \, dt.$$

Bemerkung. Nicht jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar. Ein klassisches Beispiel hierfür ist die sogenannte *Peanokurve* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, für die gilt: f ist stetig und $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$! Diese Kurve füllt also ein ganzes Quadrat aus und ist nicht rektifizierbar.

Satz 1.5 *Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ Kurven in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

1. *Ist $\gamma \sim \sigma$, so ist $L(\gamma) = L(\sigma)$. Daher ist es auch sinnvoll, von der* Länge eines Weges *zu sprechen.*
2. $L([\gamma]) = L(-[\gamma])$.
3. $L([\gamma] \star [\sigma]) = L([\gamma]) + L([\sigma])$.

Definition 1.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein* Vektorfeld auf U *ist eine stetige Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto X_p$. Ein Vektorfeld heißt (k-mal) differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar), falls $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine (k-mal) differenzierbare (bzw. stetig differenzierbare) Abbildung ist.*

Definition 1.7 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Das* Gradientenfeld von f *ist das Vektorfeld $X_p := (\nabla f)_p$.*

Definition 1.8 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Falls es eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß X das Gradientenfeld von f ist, so heißt f* Stammfunktion von X. *(In der Physik heißt (das Negative einer) Stammfunktion auch* Potential von X*).*

Satz 1.9 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Menge und X ein Vektorfeld mit Stammfunktion $f : U \to \mathbb{R}$. Ist $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion von X, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ so daß $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ für alle $x \in U$.*

In anderen Worten: Auf einer zusammenhängenden Menge ist die Stammfunktion bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Definition 1.10 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und X ein Vektorfeld auf U. Sei $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve in U. Das* Wegintegral von X über γ *ist definiert als*

$$\int_{[\gamma]} X \cdot dx := \int_a^b \left(X_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) \right) \, dt.$$

Satz 1.11 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und X, Y Vektorfelder auf U, und seien γ, σ parametrisierte Wege, deren Spur in U enthalten sind.*

1. *Falls $\gamma \sim \sigma$, so ist $\int_{[\gamma]} X \cdot dx = \int_{[\sigma]} X \cdot dx$. Dies rechtfertigt die in Definition 1.10 eingeführte Schreibweise.*
2. $\int_{-[\gamma]} X \cdot dx = - \int_{[\gamma]} X \cdot dx$.
3. $\int_{[\gamma] \star [\sigma]} X \cdot dx = \int_{[\gamma]} X \cdot dx + \int_{[\sigma]} X \cdot dx$.
4. $\int_{[\gamma]} (X + Y) \cdot dx = \int_{[\gamma]} X \cdot dx + \int_{[\gamma]} Y \cdot dx$.

5. $\int_{[\gamma]}(c\, X) \cdot dx = c \int_{[\gamma]} X \cdot dx$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$.

6. $\left|\int_{[\gamma]} X \cdot dx\right| \leq ||X||_\infty L([\gamma])$, *wobei* $||X||_\infty = \max\{||X_{\gamma(t)}|| \mid t \in [a,b]\}$.

Bemerkung. In der Physik stellt ein Vektorfeld meist ein Kraftfeld dar. Das Wegintegral repräsentiert dann die Arbeit, die das Kraftfeld X an einem Teilchen verrichtet, das sich entlang des Weges $[\gamma]$ bewegt.

Satz 1.12 (Hauptsatz der Wegintegrale) *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* X *ein Vektorfeld auf* U *mit Stammfunktion* $f : U \to \mathbb{R}$. *Sei* $[\gamma]$ *ein Weg in* U *mit Anfangspunkt* p *und Endpunkt* q. *Dann gilt*

$$\int_{[\gamma]} X \cdot dx = f(q) - f(p).$$

Satz 1.13 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und zusammenhängend, und sei* X *ein Vektorfeld auf* U. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *X hat eine Stammfunktion.*

2. *Für alle Wege* $[\gamma]$ *und* $[\sigma]$ *in* U *mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt gilt:* $\int_{[\gamma]} X \cdot dx = \int_{[\sigma]} X \cdot dx$.

3. *Für jede Schleife* $[\gamma]$ *in* U *(d.h. für jeden Weg in* U*, dessen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen) gilt:* $\int_{[\gamma]} X \cdot dx = 0$.

Definition 1.14 *Eine offene Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* sternkonvex, *falls gilt:* $\exists x_0 \in U, \forall x \in U, \overline{xx_0} \subset U$.

Satz 1.15 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* X *ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf* U. *Schreibe* $X = (X_1, \ldots, X_n)$, *wobei die Komponenten* $X_i : U \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar sind.*

1. *Falls X eine Stammfunktion hat, so erfüllen die Komponenten von X die Gleichungen*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

2. *Falls U sternkonvex ist und die Gleichungen (1) erfüllt sind, so hat X eine Stammfunktion.*

Definition 1.16 *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine Kurve und sei* $\Gamma := \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ *die Spur von* γ. *Sei* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann ist das* Wegintegral von f über Γ *definiert als*

$$\int_\Gamma f(s)\, ds = \int_{[\gamma]} f(s)\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, ||\gamma'(t)||\, dt.$$

Satz 1.17 *Das Wegintegral hat folgende Eigenschaften:*

1. *Ist* $\gamma \sim \sigma$, *so ist* $\int_{[\gamma]} f(s)\, ds = \int_{[\sigma]} f(s)\, ds$.

2. $\int_{-[\gamma]} f(s)\, ds = \int_{[\gamma]} f(s)\, ds$.

3. $\int_{[\gamma]}(f+g)(s)\ ds = \int_{[\gamma]} f(s)\ ds + \int_{[\gamma]} g(s)\ ds$.

4. $\int_{[\gamma]} c\ f(s)\ ds = c\ \int_{[\gamma]} f(s)\ ds$ *für* $c \in \mathbb{R}$.

5. $\int_{[\gamma]\star[\sigma]} f(s)\ ds = \int_{[\gamma]} f(s)\ ds + \int_{[\sigma]} f(s)\ ds$.

6. $\left|\int_{[\gamma]} f(s)\ ds\right| \leq C\ L([\gamma])$, *wobei* $C := \max\{|f(x)| \mid x \in \Gamma\}$.

Bemerkung. In der Physik interpretiert man $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ als z.B. die punktweise Dichte eines Drahtes Γ. Dann gibt $\int_\Gamma f(s)\ ds$ die Masse des Drahtes an.

Definition 1.18 *Ein* berandetes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ *ist eine kompakte Teilmenge* $K \subset \mathbb{R}^2$, *so daß* ∂K *die disjunkte Vereinigung von Spuren von Wegen ist, d.h.* $\partial K = Spur([\gamma_1])\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}Spur([\gamma_n])$.

∂K *heißt* positiv orientiert, *falls die Wege* $[\gamma_i]$ *so orientiert sind, daß "K links von* ∂K *liegt". Präziser: Für die Kurven* $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *soll gelten:* $\gamma_i(t_0) + t(J\gamma_i'(t_0)) \in K$ *für* $t > 0$ *hinreichend klein, wobei* J *die Drehung um* $90°$ *gegen den Uhrzeigersinn ist.*

Definition 1.19 *Sei* $K \subset \mathbb{R}^2$ *ein berandetes Gebiet. Eine* Unterteilung von K *ist eine Familie* $K_1, \ldots, K_n$ *von berandeten Gebieten in* $\mathbb{R}^2$, *so daß gilt:*

1. $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$, *und*

2. *Für* $i \neq j$ *ist* $K_i \cap K_j$ *die disjunkte Vereinigung von Spuren von Wegen.*

Bemerkung. Es folgt, daß dann $K_i \cap K_j \subset \partial K_i \cap \partial K_j$ für $i \neq j$.

Satz 1.20 (Green'scher Integralsatz) *Sei* $K \subset \mathbb{R}^2$ *ein berandetes Gebiet und sei* $X = (P,Q)$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von* K, *d.h. auf einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^2$ *mit* $K \subset U$. *Ist* ∂K *positiv orientiert, dann gilt:*

$$\int_{\partial K} P\ dx + Q\ dy = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y).$$

Hierbei bedeutet das Wegintegral $\int_{\partial K} P\ dx + Q\ dy = \sum_{i=1}^n \int_{[\gamma_i]} P\ dx + Q\ dy$, *wobei* $\partial K = Spur([\gamma_1])\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}Spur([\gamma_n])$ *ist und alle* $[\gamma_i]$ *positiv orientiert sind.*

Korollar 1.21 (Gauß'sche Flächenformel) *Sei* $K \subset \mathbb{R}^2$ *eine berandetes Gebiet, und sei* $A(K) := \mu_2(K)$ *der Flächeninhalt von* K. *Dann gilt:*

$$A(K) = \frac{1}{2}\int_{\partial K} x\ dy - y\ dx.$$

Definition 1.22 *Eine* Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k \leq n$ *ist eine Menge* $M \subset \mathbb{R}^n$ *mit folgender Eigenschaft:*

Für jedes $p \in M$ *existiert eine offene Umgebung* $V_0 \subset \mathbb{R}^n$, $p \in V_0$, *und eine Abbildung* $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ *mit* $U \subset \mathbb{R}^k$ *offen, so daß gilt:*

1. α *ist stetig differenzierbar und injektiv.*

2. $rk(d\alpha_x) = k$ *für alle* $x \in U$.

3. $\alpha(U) = M \cap V_0$.

Die Abbildungen $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ *heißen* Koordinatenabbildungen *oder* Koordinatensysteme *von* M.

Beispiele.

1. Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$. Dann ist $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Dann ist der *Graph von* f, d.h.

$$Graph_f := \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$.

Definition 1.23 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}^k$ *stetig differenzierbar.*

1. $x_0 \in U$ *heißt* regulärer Punkt von f, *falls* $rang(df_{x_0}) = k$ *(d.h. falls der Rang von* df_{x_0} *maximal ist). Andernfalls heißt* x_0 singulärer Punkt von f.

2. $z_0 \in \mathbb{R}^k$ *heißt* regulärer Wert von f *falls jedes* $x_0 \in f^{-1}(z_0)$ *regulär ist. Andernfalls heißt* z_0 singulärer Wert von f.

Bemerkung. $z_0 \in \mathbb{R}^k$ ist genau dann ein singulärer Wert, wenn es einen singulären Punkt $x_0 \in f^{-1}(z_0)$ gibt. Insbesondere ist also $z_0 \in \mathbb{R}^k$ auch dann ein regulärer Wert, wenn $f^{-1}(z_0) = \emptyset$.

Satz 1.24 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}^k$ *stetig differenzierbar. Sei* $z_0 \in \mathbb{R}^k$ *ein regulärer Wert von* f. *Dann ist* $M := f^{-1}(z_0) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *eine* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{n+k}$.

Definition 1.25 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und sei* $p \in M$. *Der* Tangentialraum von M in p *ist*

$$T_pM := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0, \\ \exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n \text{ differenzierbar mit} \\ (i) \;\; c(t) \in M \text{ für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ (ii) \;\; c(0) = p, \\ (iii) \;\; c'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

Satz 1.26 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei* $p \in M$ *und* $\alpha : U \to M \subset \mathbb{R}^n$ *ein Koordinatensystem um* p, *d.h.* $U \subset \mathbb{R}^k$ *ist offen und es gibt ein* $u_0 \in U$ *mit* $\alpha(u_0) = p$.

Dann ist $T_pM = Im(d\alpha_{u_0})$, *wobei* Im *das Bild der linearen Abbildung* $d\alpha_{u_0} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *bezeichnet. Insbesondere ist* T_pM *ein* k*-dimensionaler Unterraum von* $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.27 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und sei* $p \in M$. *Der* Normalenraum von M in p *ist definiert als*

$$N_pM := (T_pM)^{\perp}.$$

Insbesondere ist $\dim N_pM = n - k$.

Satz 1.28 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Sei $z_0 \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von f mit $M := f^{-1}(z_0) \neq \emptyset$. Dann ist $T_pM = \ker(df_p)$ für alle $p \in M$.*

Bemerkung. Ist im obigen Satz $k = 1$ und $c \in \mathbb{R}$ ein kritischer Wert von $f : U \to \mathbb{R}$, so folgt aus dem Satz, daß $T_pM = (\nabla f)_p^{\perp}$ und somit $N_pM = \mathbb{R}(\nabla f)_p$. Dies stimmt mit der Interpretation des Gradienten aus dem vergangenen Semester überein (vgl. Kurzskript Analysis II, Bemerkung nach Definition 3.16).

Definition 1.29 *Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ mit $k \leq n$. Das* von $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte Parallelepiped *ist die Teilmenge*

$$P(v_1, \ldots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid t_i \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz 1.30 *Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gibt es genau eine Funktion $vol_k : (\mathbb{R}^n)^k \to [0, \infty)$, $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto vol_k(v_1, \ldots, v_k)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Ist $O \in M_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix (d.h. $OO^t = I$), so ist $vol_k(Ov_1, \ldots, Ov_k) = vol_k(v_1, \ldots, v_k)$.*

2. *Faßt man $\mathbb{R}^k := \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ auf und sind $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, so ist $vol_k(v_1, \ldots, v_k) = |\det(v_1 \cdots v_k)|$, wobei diese Matrix als eine $k \times k$-Matrix aufgefaßt wird.*

Eine Möglichkeit zur Berechnung des Volumens ist wie folgt:

1. Falls $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, so ist $vol_k(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

2. Sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig, so daß $V := span(v_1, \ldots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler Untervektorraum ist, so finde eine Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_{n-k}$ des $(n-k)$-dimensionalen Untervektorraums $W := V^{\perp}$. Dann gilt:

$$vol_k(v_1, \ldots, v_k) = |\det(v_1 \cdots v_k \; w_1 \cdots w_{n-k})| \,.$$

Bemerkung. Man faßt $vol_k(v_1, \ldots, v_k)$ als das k-dimensionale Volumen des Parallelepipeds $P(v_1, \ldots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$ auf.

Einige Spezialfälle:

1. $k = 0$: In diesem Fall ist $P = \{0\}$ und daher $V = 0$ und $W = \mathbb{R}^n$. Daher ist $vol_0 = |\det(e_1 \cdots e_n)| = 1$, d.h. man legt das 0-dimensionale Volumen des Punktes $\{0\}$ als 1 fest.

2. $k = 1$: Es gilt: $vol_1(v) = ||v||$.

3. $k = n$: Es gilt: $vol_n(v_1, \ldots, v_n) = |\det(v_1 \cdots v_n)| = \mu_n(P)$. In diesem Fall ist also das n-dimensionale Volumen des Parallelepipeds P gleich dem Lebesguemaß von P.

4. $k = n - 1$: Sind $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig, so gibt es genau einen Vektor $N \in \mathbb{R}^n$ mit $v_i \cdot N = 0$, $||N|| = 1$ und $\det(v_1 \cdots v_{n-1} N) > 0$, d.h. $\det(v_1 \cdots v_{n-1} N) = vol_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. N wird als der *positive Normalenvektor von* $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ bezeichnet.

5. $k = 2$, $n = 3$: Sind v_1, v_2 linear unabhängig, so ist der positive Normalenvektor $N = \frac{v_1 \times v_2}{||v_1 \times v_2||}$. Ferner gilt $vol_2(v_1, v_2) = ||v_1 \times v_2||$, d.h. die Länge des Kreuzprodukts zweier Vektoren entspricht dem Flächeninhelt des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Satz 1.31 *Seien $v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ mit $k \leq n$ und sei $A := (v_1 \cdots v_k) \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$vol_k(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\det A^t A}.$$

Lemma 1.32 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\alpha : U \to M \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to M \subset \mathbb{R}^n$ zwei Koordinatensysteme, wobei $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen sind. Definiere $U_1 := \alpha^{-1}(\tilde{\alpha}(\tilde{U})) \subset U$ und $\tilde{U}_1 := \tilde{\alpha}^{-1}(\alpha(U)) \subset \tilde{U}$. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$:*

$$\int_{U_1} f(\alpha(u))\ vol_k(d\alpha_u)\ du = \int_{\tilde{U}_1} f(\tilde{\alpha}(\tilde{u}))\ vol_k(d\tilde{\alpha}_{\tilde{u}})\ d\tilde{u}.$$

Definition 1.33 *Sei $M^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $f : M^k \to \mathbb{R}$ stetig. Das* (k-dimensionale) Integral von f über *M^k ist definiert durch die Bedingung, daß für jedes Koordinatensystem $\alpha : U \to M^k \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^k$ offen gilt:*

$$\int_{\alpha(U)} f(x) dvol_k = \int_{\alpha(U)} f(x) dS := \int_U f(\alpha(u))\ vol_k(d\alpha_u)\ du.$$

Ist $K \subset M^k$ kompakt, so definiert man das (k-dimensionale) Volumen von K *als*

$$Vol(K) := \int_K dvol_k.$$

Bemerkung. Nach Lemma 1.32 ist dieses Integral unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems definiert.

Beispiel. Sei $k = 1$. Eine zusammenhängende 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M^1 \subset \mathbb{R}^n$ ist die Spur des Weges einer regulären Kurve ohne Selbstschnitte. Das 1-dimensionale Integral über M^1 ist dann das Wegintegral einer Funktion von Definition 1.16. Das 1-dimensionale Volumen ist daher gerade die Weglänge.

Definition 1.34 *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ein* Normalenfeld auf *M^n ist eine stetige Abbildung $N : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, so daß gilt:*

1. *$||N_p|| = 1$ für alle $p \in M^n$,*
2. *$N_p \in N_p M^n$, d.h. $N_p \perp T_p M^n$ für alle $p \in M^n$.*

Besitzt M^n ein Normalenfeld, so heißt M^n orientierbar*. Das Normalenfeld N wird auch* Orientierung von *M^n genannt.*

Beispiele.

1. Das *Möbiusband* $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist eine *nicht orientierbare* Fläche.

2. Ist $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und ist $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f, so daß $M^n := f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist (Satz 1.24), so ist M^n orientierbar. In der Tat ist $N := \nabla f / ||\nabla f||$ ein Normalenfeld auf M^n.

Satz 1.35 *Ist $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zusammenhängend und orientierbar, so hat M^n genau zwei Normalenfelder, die Negative voneinander sind.*

Definition 1.36 *Eine* berandete k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ *ist eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gibt eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M^k \subset \mathbb{R}^n$, so daß $K = \overline{M}^k$ ist.*
2. *Sei $\partial K := K \backslash M^k$. Dann gibt es $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $R_1, \ldots, R_N \subset \mathbb{R}^n$ mit $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so daß*

$$\partial K = \overline{R}_1 \cup \ldots \cup \overline{R}_N.$$

Ist $k = n$, so heißt K auch berandetes Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene Teilmenge. Ein berandetes Gebiet besteht also aus einer beschränkten offenen Teilmenge, deren Rand der Abschluß von endlich vielen disjunkten $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten ist.

Beispiele.

1. $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein berandetes Gebiet. ∂K ist die Sphäre und damit eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
2. $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||_\infty \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein berandetes Gebiet. ∂K besteht aus den Seiten eines Würfels, d.h. aus dem Abschluß von endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.
3. $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1]\}$ ist *kein* berandetes Gebiet. Denn ∂K besteht aus der disjunkten Vereinigung von $\{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $\{0\}$. Letzteres ist aber keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Definition 1.37 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein berandetes Gebiet, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ das Innere von K und $\partial K = \overline{R}_1 \cup \ldots \overline{R}_N$ wie zuvor. Dann heißt ∂K* nach außen orientiert, *falls alle R_i durch Normalenfelder N orientiert sind, für die gilt: Für jedes $p \in \partial K$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ so daß*

$$p + tN_p \notin K, \qquad p - tN_p \in U \qquad \textit{für alle } t \in (0, \varepsilon).$$

Bemerkung. Man kann zeigen, daß der Rand eines berandeten Gebietes orientierbar ist, so daß die Orientierung nach außen von Definition 1.37 stets existiert.

Definition 1.38 *Sei $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Normalenfeld N, und sei X ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $M^{n-1} \subset U$. Der* Fluß *von X durch M^{n-1} ist definiert als*

$$Fluß(X, M^{n-1}) := \int_{M^{n-1}} (X \cdot N)\ dvol_{n-1}.$$

Bemerkung.

1. Ändert man die Orientierung von M^{n-1}, d.h. ersetzt man das Normalenfeld N durch sein Negatives, so ändert der Fluß sein Vorzeichen.

2. In der Physik wird der Fluß folgendermaßen interpretiert: Ist X das Geschwindigkeitsfeld z.B. eines Luftstroms, so mißt $Fluß(X, M)$, wieviel Luft pro Zeiteinheit die Fläche M^{n-1} durchfließt. Dabei wird dieser Strom positiv bzw. negativ gewertet, je nachdem ob der Strom in Richtung des Normalenfeldes N oder in die entgegengesetzte Richtung fließt.

Definition 1.39 *Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Die* Divergenz *von X ist die Funktion*

$$div(X) : U \to \mathbb{R}, \qquad div(X) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}.$$

Bemerkung. Als eine Erinnerungshilfe schreibt man formal $div(X) = \nabla \cdot X$ mit dem (nur formal definierten) "Vektor" $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})^t$.

Satz 1.40 (Gauß'sche Integralformel) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein berandetes Gebiet, und sei ∂K durch das Normalenfeld N nach außen orientiert. Sei X ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von K, d.h. auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subset U$. Dann gilt*

$$Fluß(X, \partial K) = \int_{\partial K} (X \cdot N) dvol_{n-1} = \int_K div(X)\ dvol_n.$$

(Mit dem Integral $dvol_n$ ist das Lebesgue-Integral auf dem $\mathbb{R}^n$ gemeint.)

Bemerkung. Der Gauß'sche Integralsatz hat bemerkenswerte Konsequenzen:

1. Sind X, Y zwei Vektorfelder auf (einer Umgebung von) K, so daß $X_p = Y_p$ für alle $p \in \partial K$, so folgt: $\int_K div(X)\ dvol_n = \int_K div(Y)\ dvol_n$.

2. Ist X ein Vektorfeld auf (einer Umgebung von) K, so daß $X_p = N_p$ für alle $p \in \partial K$, so ist $\int_K div(X)\ dvol_n = Vol_{n-1}(\partial K)$.

3. Es ergibt sich eine physikalische Interpretation der Divergenz: Ist X wiederum das Geschwindigkeitsfeld z.B. einer Luftstroms, so definiere $F(\varepsilon) := Fluß(X, S_\varepsilon(p))/Vol_{n-1}(S_\varepsilon(p))$, d.h. $F(\varepsilon)$ ist die *Flußdichte* (Fluß pro Zeit pro Fläche) durch die Sphäre $S_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - p|| = \varepsilon\}$.

   Aus der Integralformel folgt dann $F'(0) = \frac{1}{n} div(X)_p$. Man bezeichnet die Divergenz deshalb auch als die *Quelldichte von X*. Sie beschreibt im Wesentlichen die Differenz zwischen dem Fluß "aus p heraus" und dem Fluß "in p hinein".

Definition 1.41 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein berandetes Gebiet. Eine* Unterteilung von K *ist eine Familie $K_1, \ldots, K_N$ von berandeten Gebieten in $\mathbb{R}^n$, so daß*

1. *$K = K_1 \cup \ldots \cup K_N$, und*

2. *Für $i \neq j$ ist $K_i \cap K_j = \overline{R}_1 \cup \ldots \cup \overline{R}_L$, wobei für $k = 1, \ldots, L$ gilt: $R_k \subset \partial K_i \cap \partial K_j$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und $R_k \cap R_l = \emptyset$ für $k \neq l$.*

Definition 1.42 *Sei $X = (X_1, X_2, X_3)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$. Die* Rotation von X *ist das folgende Vektorfeld auf U:*

$$Rot(X) := \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right).$$

Bemerkung. Als eine Erinnerungshilfe schreibt man formal $Rot(X) = \nabla \times X$ mit dem (nur formal definierten) “Vektor” $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})^t$.

Wie das Kreuzprodukt ist auch die Rotation **nur für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ definiert!**

Definition 1.43 *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine* berandete Fläche, *d.h. eine berandete* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, und sei N ein Normalenfeld auf Σ. Die* von N induzierte *oder* positive Orientierung auf $\partial\Sigma$ *ist die Orientierung, für die gilt:*

Ist $\partial\Sigma$ im Punkte p differenzierbar, d.h. $p = \gamma(t_0) \in Spur([\gamma]) \subset \partial\Sigma$, so zeigt $N_p \times \gamma'(t_0)$ “in die Richtung von Σ”. Genauer: es gibt eine differenzierbare Kurve $\sigma : [0, \varepsilon) \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, so daß $\sigma(0) = p$ und $\sigma'(0) = N_p \times \gamma'(t_0)$.

Bemerkung. Ändert man die Orientierung von Σ, so ändert sich auch die induzierte Orientierung auf $\partial\Sigma$.

Satz 1.44 (Satz von Stokes) *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine berandete Fläche, die durch ein Normalenfeld N orientiert ist, und sei $\partial\Sigma$ positiv orientiert. Sei X ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das auf einer Umgebung U von Σ (d.h. auf einer offenen Teilmenge mit $\Sigma \subset U \subset \mathbb{R}^3$) definiert ist. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\Sigma} X \cdot ds = \int_{\Sigma} N \cdot Rot(X)\ dS.$$

Bemerkung.

1. Betrachtet man $\mathbb{R}^2$ als die xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$, so kann man jedes berandete Gebiet der Ebene als eine berandete Fläche im $\mathbb{R}^3$ auffassen. Damit ist der Satz von Green (Satz 1.20) ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

2. Der Satz von Stokes liefert eine physikalische Interpretation des Rotationsvektors (und insbesondere eine Rechtfertigung für den Namen). Hierzu definieren wir für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, einen Einheitsvektor $N \in \mathbb{R}^3$ und ein $\varepsilon > 0$ den Weg $K(p, N, \varepsilon)$ als den Kreis um p vom Radius ε in der zu N senkrechten Ebene durch p.

Sei X ein Kraftfeld, und sei $W(p,N,\varepsilon)$ die Arbeit, die X an einem Teilchen verrichtet, das sich im positiven Sinne um $K(p,N,\varepsilon)$ bewegt. Dann folgt aus dem Satz von Stokes:

$$N \cdot Rot(X)_p = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} W(p,N,\varepsilon).$$

Diese Größe wird maximal genau dann, wenn N zu $Rot(X)_p$ parallel ist, und in diesem Fall ist $N \cdot Rot(X)_p = ||Rot(X)_p||$.

Das bedeutet: Bei Rotation um die von $Rot(X)_p$ aufgespannte Achse durch p verrichtet X die meiste Arbeit, und diese ist durch die Länge von $Rot(X)_p$ bestimmt.

In anderen Worten: $Rot(X)_p$ gibt die Tendenz zur Wirbelbildung des Kraftfeldes X bei p an. Kraftfelder X mit $Rot(X) = 0$ heißen deshalb auch *wirbelfrei*.

3. Eine mathematisch erstaunliche Anwendung besteht in der folgenden Beobachtung: Ist $[\gamma]$ ein geschlossener Weg und ist X ein Vektorfeld, das auf $[\gamma]$ verschwindet (d.h. $X_p = 0$ für alle $p \in Spur([\gamma])$), so gilt für *jede* Fläche Σ mit $\partial\Sigma = [\gamma]$

$$\int_\Sigma N \cdot Rot(X)\; dS = 0.$$

Dabei ist sowohl die Fläche Σ als auch das Vektorfeld X auf $\Sigma \backslash \partial\Sigma$ beliebig!

Definition 1.45 *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Ein Vektorfeld X auf U heißt* Rotationsfeld, *falls es ein differenzierbares Vektorfeld Y auf U gibt, so daß $X = Rot(Y)$.*

Satz 1.46 *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und sei X ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Dann gilt:*

1. *Hat X eine Stammfunktion, so ist $Rot(X) = 0$.*
2. *Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ sternförmig und ist $Rot(X) = 0$, so hat X eine Stammfunktion.*
3. *Ist X ein Rotationsfeld, so gilt $div(X) = 0$.*
4. *Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ sternförmig und ist $div(X) = 0$, so ist X ein Rotationsfeld.*

Bemerkung.

1. Die ersten beiden Teile sind lediglich eine Umformulierung von Satz 1.15 für $n = 3$.
2. Ist U sternförmig und $div(X) = 0$, so ist ein Vektorfeld Y mit $X = Rot(Y)$ durch die Formel

$$Y_x = \int_0^1 \left(t X_{\sigma_x(t)} \times \sigma_x'(t) \right)\; dt$$

gegeben, wobei $\sigma_x(t) := (1-t)x_0 + tx$ für $t \in [0,1]$ die Strecke $\overline{x_0 x}$ parametrisiert und $x_0 \in U$ so gewählt ist, daß für alle $x \in U$ auch $\overline{x_0 x} \subset U$ ist.

3. Physikalisch bedeutet dieser Satz, daß ein Kraftfeld auf einer sternförmigen Menge genau dann konservativ ist (d.h. eine Stammfunktion bzw. ein Potential hat), wenn es wirbelfrei ist. Anders ausgedrückt: Wirbel werden von Kräften erzeugt, die *kein* Potential haben, wie z.B. von Reibungskräften. (Autofahrer werden dies in den nächsten Monaten beim Bremsen auf glatter Fahrbahn desöfteren zu spüren bekommen...)

4. Ein *Kettenkomplex von Vektorräumen* ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$V_1 \xrightarrow{d_1} V_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_n} V_{n+1}$$

zwischen Vektorräumen V_k mit der Eigenschaft, daß $d_{i+1} \circ d_i = 0$ für $i = 1, \dots n-1$. Ein Kettenkomplex heißt *exakt*, falls $\ker(d_{i+1}) = \mathrm{im}(d_i)$ für $i = 1, \dots n-1$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Wir definieren $C^\infty(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ beliebig oft differenzierbar}\}$ und $\mathfrak{X}^\infty(U) := \{X : U \to \mathbb{R}^3 \mid X \text{ beliebig oft differenzierbar}\}$. Beides sind reelle Vektorräume, und wir haben die linearen Abbildungen

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\nabla} \mathfrak{X}^\infty(U) \xrightarrow{Rot} \mathfrak{X}^\infty(U) \xrightarrow{div} C^\infty(U).$$

Die Aussage von Satz 1.46 ist also zum einen, daß es sich hierbei um einen *Kettenkomplex* handelt (Teil 1 und 3), und zum anderen, daß für eine sternförmige Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ dieser Kettenkomplex *exakt* ist (Teil 2 und 4).

2 Differentialgleichungen

Wir haben folgende Methoden, um die Lösung einer Differentialgleichung explizit anzugeben.

1. *Separable Differentialgleichungen*

   Dies sind Differentialgleichungen der Form
   $$x'(t) = P(x(t))\ Q(t).$$
   Lösungsansatz: Forme um als $x'(t)/P(x(t)) = Q(t)$ und integriere:
   $$\int \frac{dx}{P(x)} = \int Q(t)\ dt.$$

2. *Exakte Differentialgleichungen*

   Eine Differentialgleichung der Form
   $$A(x,t) + B(x,t)x' = 0$$
   heißt *exakt*, falls $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}$ gilt. In diesem Fall gibt es nach Satz 1.15 (zumindest auf einer sternförmigen Teilmenge des Definitionsbereiches) eine Funktion f mit
   $$A = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial x}.$$
   Dann ist die Differentialgleichung äquivalent zu $\frac{d}{dt}(f(x(t),t) = 0$ und damit zu $f(x(t),t) = C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Dies gibt die Lösungen für $x(t)$.

3. *Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   Dies ist eine Differentialgleichung der Form
   $$x'(t) = P(t)\ x(t) + Q(t)$$
   mit gegebenen Funktionen P und Q. Die Lösungsmethode besteht nun darin, diese Gleichung mit dem Faktor
   $$e^{-\int P(t)\ dt}$$
   zu multiplizieren. Dann ensteht durch Umformen die Gleichung
   $$\left(x(t)e^{-\int P(t)\ dt}\right)' = Q(t)e^{-\int P(t)\ dt},$$
   und diese kann (im Prinzip) durch Integration gelöst werden.

4. *Homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   Dies sind Gleichungen der Form
   $$x' = f(x,t),$$
   wobei f eine *homogene Funktion* ist, d.h. es gilt $f(\lambda x, \lambda t) = f(x,t)$ für alle x, t und $\lambda \neq 0$, für die diese Gleichung definiert ist.

   Hier besteht die Lösungsmethode darin, die Substitution
   $$y(t) := \frac{x(t)}{t}$$
   zu verwenden. Dann erhält man eine *separable* Differentialgleichung in y.

5. *Bernoulli'sche Differentialgleichungen*

   Dies sind Differentialgleichungen der Form

   $$x'(t) = P(t)x(t) + Q(t)x(t)^p,$$

   wobei $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 1$ und P, Q gegebene Funktionen sind.

   Lösungsmethode: Verwende die Substitution

   $$y(t) := x(t)^{1-p}.$$

   Man erhält eine *lineare* Differentialgleichung in y.

6. *Homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

   Gegeben sei die Differentialgleichung

   $$x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = 0, \quad \text{wobei } b, c \in \mathbb{R}.$$

   Zunächst bestimmt man die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* dieser Differentialgleichung, d.h. man bestimmt die Nullstellen $\lambda_{1/2}$ von $\lambda^2 + b\lambda + c$.

   (a) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{wobei } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   (b) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, d.h. $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\omega$ mit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, so sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

   $$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \qquad \text{wobei } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   Ist $x \not\equiv 0$, so kann man die Lösung auch in der Form

   $$x(t) = A\ e^{\alpha t} \cos \omega(t - t_0) \qquad \text{mit } A > 0 \text{ und } t_0 \in [0, \tfrac{2\pi}{\omega})$$

   beschreiben.

   (c) Falls $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$, so sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

   $$x(t) = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t}, \quad \text{wobei } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7. *Inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

   Gegeben sei die Differentialgleichung

   $$x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = P(t), \quad \text{wobei } b, c \in \mathbb{R} \text{ und } P \text{ eine stetige Funktion ist.}$$

   Ist x_s eine *spezielle Lösung* dieser Differentialgleichung, so ist jede andere Lösung von der Form

   $$x = x_s + x_h,$$

   wobei x_h die allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen Differentialgleichung* ist, x_h erfüllt $x_h''(t) + b\, x_h'(t) + c\, x_h(t) = 0$. Man bekommt also die allgemeine Lösung, sobald eine spezielle Lösung gefunden ist.

   Um nun eine spezielle Lösung zu finden, gibt es u.a. folgende Lösungsansätze:

(a) Ist $P(t)$ ein Polynom der Ordnung n, so bestimme $x_s(t)$ als Polynom vom gleichen Grad.

(b) Ist $P(t) = ce^{kt}$, so verwende den Ansatz $x(t) = Ke^{kt}$.

(c) Ist $P(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, so verwende den Ansatz $x(t) = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t$.

(d) Allgemein verwendet man die *Variation der Konstanten*: Sind x_1, x_2 zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung, so verwendet man den Ansatz

$$x_s(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t),$$

wobei die Funktionen u_1, u_2, die Bedingungen

$$\begin{array}{ccccc} u_1'(t)\; x_1(t) & + & u_2'(t)\; x_2(t) & = & 0 \\ \\ u_1'(t)\; x_1'(t) & + & u_2'(t)\; x_2'(t) & = & P(t) \end{array}$$

erfüllen. Dieses Gleichungssystem kann nach $u_1'(t)$ und $u_2'(t)$ aufgelöst werden. Durch Integration erhält man dann die Funktionen u_1 und u_2 und damit die spezielle Lösung.

Definition 2.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Bezeichne Punkte in $\mathbb{R}^{n+1}$ als (t, x), wobei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig.*

1. *f heißt* Lipschitzstetig bzgl. x, *falls es ein $\lambda > 0$ gibt, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $(t, x), (t, y) \in U$ gilt:*
$$||f(t, y) - f(t, x)|| \leq \lambda ||y - x||.$$
In diesem Fall heißt λ Lipschitzkonstante von f.

2. *Sei $(t_0, x_0) \in U$. Dann heißt f* Lipschitzstetig bzgl. x bei (t_0, x_0), *falls es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von (t_0, x_0) gibt, so daß $f|_{U_0} : U_0 \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig bzgl. x ist.*

3. *f heißt* lokal Lipschitzstetig bzgl. x, *falls f Lipschitzstetig bzgl. x bei (t_0, x_0) ist für alle $(t_0, x_0) \in U$.*

Bemerkung. Da in $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, hängt die Lipschitzstetigkeit nicht von der Wahl der Norm ab.

Offensichtlich ist jede Lipschitzstetige Funktion auch lokal Lipschitzstetig.

Satz 2.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $(t_0, x_0) \in U$. Falls es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von (t_0, x_0) gibt, so daß $f|_{U_0} : U_0 \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, so ist f Lipschitzstetig bzgl. x bei (t_0, x_0).*

Insbesondere gilt: Ist $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. x.

Demnach gelten für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ die Implikationen

$$f \text{ stetig differenzierbar} \Longrightarrow f \text{ lokal Lipschitzstetig bzgl. } x \Longrightarrow f \text{ stetig.}$$

Die Umkehrung dieser Implikationen ist falsch.

Bemerkung. Im Beweis von Satz 2.2. wird deutlich, daß man lediglich die Beschränktheit der partiellen Ableitungen in Richtung x verwendet. D.h. man muß lediglich voraussetzen, daß es ein $C > 0$ gibt, so daß $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq C$ auf ganz U_0. Die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$ muß dagegen nicht unbedingt existieren.

Satz 2.3 (Satz von Picard-Lindelöf, 1.Version) *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $(t_0, x_0) \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig bzgl. x bei (t_0, x_0). Betrachte das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und genau eine differenzierbare Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, für die (2) gilt. D.h.: Ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. x, so hat (2) in der Nähe von t_0 eine eindeutige Lösung.

Satz 2.4 (Satz von Picard-Lindelöf, allgemeine Version) *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und bezeichne Punkte in U als (t, x) mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $(t_0, x_0) \in U$, und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig bzgl. x bei (t_0, x_0). Betrachte das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und genau eine differenzierbare Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, für die (3) gilt. D.h.: Ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. x, so hat (3) in der Nähe von t_0 eine eindeutige Lösung.

Korollar 2.5 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und bezeichne Punkte in U als (t, x) mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $(t_0, x_0) = (t_0, x_0^0, \ldots, x_0^{n-1}) \in U$, und sei $f : U \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig bzgl. x bei (t_0, x_0). Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine n-mal differenzierbare Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, so daß*

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right), \qquad x^{(k)}(t_0) = x_0^k \ \text{ für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Bemerkung. Das Korollar läßt sich auch allgemein für *Systeme* von Differentialgleichungen höherer Ordnung formulieren und ganz analog beweisen.

Definition 2.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $(t_0, x_0) \in U$ und $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$. Eine Funktion $x : J \to \mathbb{R}^n$ heißt* maximale Lösung, *falls gilt:*

1. *$x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in J$.*
2. *$x(t_0) = x_0$.*
3. *Ist $\tilde{J} \supset J$ ein offenes Intervall und $\tilde{x} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t))$ und $\tilde{x}|_J = x$, so folgt $J = \tilde{J}$ und daher $\tilde{x} = x$.*

Satz 2.7 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig bzgl. x, und sei $(t_0, x_0) \in U$. Dann gibt es genau eine* maximale *Lösung $x : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (3), wobei $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $-\infty \leq a < t_0 < b \leq \infty$ ist. Ferner gilt:*

1. *Ist $b < \infty$, so gibt es keine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in J mit $\lim t_n = b$ und $\lim(t_n, x(t_n)) \in U$.*
2. *Ist $a > -\infty$, so gibt es keine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in J mit $\lim t_n = a$ und $\lim(t_n, x(t_n)) \in U$.*

Bemerkung. Anschaulich kann man die beiden Eigenschaften der maximalen Lösungen so zusammenfassen:

Maximale Lösungen laufen vom Rand von U zum Rand von U.

Lemma 2.8 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig bzgl. x bei $(t_0, x_0) \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von $(t_0, x_0) \in U_0$ und ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in U_0$ gibt es genau eine Funktion $\tilde{x} : (\tilde{t}_0 - \varepsilon, \tilde{t}_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$\tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t)) \text{ für alle } t \in (\tilde{t}_0 - \varepsilon, \tilde{t}_0 + \varepsilon), \text{ und } \qquad \tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0.$$

Bemerkung. Die Existenz der Lösung $\tilde{x}$ ist bereits durch den Satz von Picard-Lindelöf (Satz 2.4) gewährleistet. Was das Lemma darüberhinaus besagt, ist, daß das *gleiche* $\varepsilon > 0$ den Definitionsbereich *aller* Lösungen $\tilde{x}$ für beliebige Anfangsdaten $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in U_0$ beschreibt.

Satz 2.9 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig bzgl. x, und sei $(t_0, x_0) \in U$. Sei $x : [T_-, T_+] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung zu (3), die auf einem kompakten Intervall definiert ist. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von $(t_0, x_0) \in U_0$, so daß für alle $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in U_0$ gilt:*

1. *Es gibt genau eine Lösung $\tilde{x} : [T_-, T_+] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $\tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t))$, $\tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$.*
2. *Es gilt: $||\tilde{x}(t) - x(t)|| < \varepsilon$ für alle $t \in [T_-, T_+]$.*

Satz 2.10 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig bzgl. x. Für $(t_0, x_0) \in U$ bezeichne $J_{(t_0,x_0)} \subset \mathbb{R}$ das offene Intervall, auf dem die (nach Satz 2.7 eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems (3) definiert ist. Bezeichnet man diese Lösung als*

$$x_{(t_0,x_0)} : J_{(t_0,x_0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

so gilt:

1. *Die Menge $V := \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid (t_0, x_0) \in U,\ t \in J_{(t_0,x_0)}\}$ ist offen in $\mathbb{R}^{n+2}$.*
2. *Die Abbildung $X : V \to \mathbb{R}^n$, $X(t, t_0, x_0) := x_{(t_0,x_0)}(t)$ ist stetig.*

Bemerkung. Dieser Satz besagt, daß sowohl die Definitionsintervalle $J_{(t_0,x_0)}$ der maximalen Lösungen als auch die maximalen Lösungen $x_{(t_0,x_0)} : J_{(t_0,x_0)} \to \mathbb{R}^n$ selbst sich "stetig mit dem Anfangswert (t_0, x_0) ändern". Dieses Ergebnis kann noch verallgemeinert werden:

Satz 2.11 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ k-mal stetig differenzierbar (und daher lokal Lipschitzstetig bzgl. x nach Satz 2.2). Dann ist die Abbildung $X : V \to \mathbb{R}^n$, $X(t, t_0, x_0) := x_{(t_0,x_0)}(t)$ von Satz 2.10 ebenfalls k-mal stetig differenzierbar.*

Satz 2.12 (Satz von Peano) *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $(t_0, x_0) \in U$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

eine lokale Lösung, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, die diese Gleichungen erfüllt.

Für einen Beweis der Sätze 2.11 und 2.12 siehe z.B. *Wolfgang Walter: "Ordinary Differential Equations", Springer Verlag.*

Bemerkung. Der Unterschied zwischen dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz 2.4) und dem Satz von Peano ist der folgende: Bei Picard-Lindelöf wird vorausgesetzt, daß f *Lipschitzstetig bzgl.* x ist, und dies ist eine stärkere Voraussetzung als die bloße Stetigkeit von f. Dafür ist die Folgerung bei Picard-Lindelöf stärker: In diesem Fall ist die Lösung *eindeutig*, während im Satz von Peano nur die Existenz (mindestens) einer Lösung gefolgert werden kann. Vgl. hierzu auch das 5. Übungsblatt.

Definition 2.13 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ und $a : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt die Gleichung*

$$x'(t) = A(t)x(t) + a(t) \tag{4}$$

für eine Funktion $x : J \to \mathbb{R}^n$, $J \subset I$, lineare Differentialgleichung erster Ordnung. *Ist $a \equiv 0$, so heißt die Differentialgleichung* homogen.

Bemerkung. Da die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U := I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f(t,x) := A(t)x + a(t)$ stetig ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A(t)e_i$ stetig sind, ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. x nach Satz 2.2. Daher ist insbesondere der Satz von Picard-Lindelöf und Satz 2.10 auf jede lineare Differentialgleichung anwendbar.

Lemma 2.14 (Lemma von Gronwall) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha, \beta \geq 0$, und sei $t_0 \in I$. Falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $t \in I$ die Ungleichung*

$$\alpha(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s)\ ds \right|$$

erfüllt ist, so gilt für alle $t \in I$:

$$\alpha(t) \leq C \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} \beta(s)\ ds \right| \right).$$

Lemma 2.15 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ und $a : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ist $x : [T_-, T_+] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (4), wobei $[T_-, T_+] \subset I$, und ist $t_0 \in [T_-, T_+]$, so gilt*

$$||x(t)|| \leq (||x(t_0)|| + K) \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} ||A(s)||\ ds \right| \right)$$

für alle $t \in [T_-, T_+]$, wobei $K := (T_+ - T_-) \max\{||a(t)|| \mid t \in [T_-, T_+]\}$.

Satz 2.16 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ und $a : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, und betrachte die lineare Differentialgleichung (4). Dann ist $J_{(t_0,x_0)} = I$ für alle $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, d.h. alle maximalen Lösungen von (4) sind auf* ganz I *definiert.*

Bemerkung. Es folgt aus diesem Satz, daß die Menge von Satz 2.10 gerade $V = I \times I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ist, d.h. wir haben die zugehörige stetige Abbildung $X : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Satz 2.17 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ stetig. Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung*

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

sowie die Abbildung $X : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von Satz 2.10. Für $s, t \in I$ definiere die Abbildung

$$\tilde{X}(t,s) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{X}(t,s)(x_0) := X(t,s,x_0).$$

Dann gilt:

1. *$\tilde{X}(t,s) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist linear und invertierbar für alle $s, t \in I$. Daher kann $\tilde{X}(t,s)$ als eine invertierbare Matrix aufgefaßt werden, d.h. man erhält eine Abbildung*

$$\tilde{X} : I \times I \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}.$$

2. *Für alle $r, s, t \in I$ gilt:*
   (a) *$\tilde{X}(r,s)\tilde{X}(s,t) = \tilde{X}(r,t)$,*
   (b) *$\tilde{X}(t,t) = Id_n$,*
   (c) *$\tilde{X}(s,t) = (\tilde{X}(t,s))^{-1}$.*

3. *Für $s, t \in I$, $s < t$ sei $\lambda := \max\{||A(r)|| \mid r \in [s,t]\}$. Dann gilt: $||\tilde{X}(s,t)|| \leq e^{\lambda(t-s)}$.*

4. *Die Abbildung $\tilde{X} : I \times I \to Gl(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist stetig differenzierbar, und es gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{X}(t,s) = A(t)\tilde{X}(t,s), \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial s}\tilde{X}(t,s) = -\tilde{X}(t,s)A(s).$$

Bemerkung. Die Abbildung $\tilde{X} : I \times I \to Gl(n,\mathbb{R})$ heißt *Resolvente* der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$. Im allgemeinen benutzt man für die Resolvente ebenfalls die Bezeichnung X anstelle von $\tilde{X}$, und wir werden diese Bezeichnung in Zukunft verwenden.

Satz 2.18 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ und $a : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $X : I \times I \to Gl(n,\mathbb{R})$ die Resolvente der homogenen Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems (4) mit $x(t_0) = x_0$ gegeben durch*

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)a(s)\ ds.$$

Satz 2.19 *Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\exp(A) = e^A := I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots$$

Bemerkung. Mit dem gleichen Beweis wie in Analysis I für (reelle oder komplexe) Zahlen zeigt man:

Sind $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ und ist $AB = BA$, so ist $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Insbesondere gilt für alle $s, t \in \mathbb{K}$: $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$. Da zudem $\exp(0) = I_n$, folgt hieraus, daß $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$, d.h. die Martix $\exp(A)$ ist für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar.

Satz 2.20 *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(tA)$ differenzierbar, und es gilt:*

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Satz 2.21 *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Resolvente der homogenen Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ gegeben durch*

$$X(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

Insbesondere ist für eine stetige Abbildung $a : I \to \mathbb{R}^n$ mit einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t) + a(t)$, $x(t_0) = x_0$, gegeben durch

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}a(s)\ ds = e^{tA}\left(e^{-t_0A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}a(s)\ ds\right).$$

Beispiele.

1. Sei $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann ist $e^A = diag\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$.
2. Sind $A, P \in M_n(\mathbb{K})$ und P invertierbar, so gilt $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.
3. Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisierbar, d.h. $A = PDP^{-1}$, wobei P invertierbar und $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt: $e^A = Pdiag\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)P^{-1}$.

3 Funktionentheorie

Definition 3.1 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt* holomorph, *falls sie komplex differenzierbar ist, d.h. falls für alle $z_0 \in U$ der Grenzwert*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Die Funktion $f' : U \to \mathbb{C}$ heißt dann Ableitung von f.

Satz 3.2
1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann auch $f \pm g$, fg und (falls $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$) $\frac{f}{g}$, und für die Ableitungen gelten die gleichen Regeln (Produkt- und Quotientenregel) wie für reell differenzierbare Funktionen.*
2. *Sind $U, \tilde{U} \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$, $g : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(U) \subset \tilde{U}$, so ist auch die Verknüpfung $(g \circ f) : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gilt die* Kettenregel $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.
3. *Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ den Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty]$, so ist die Funktion $f : B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ holomorph.*

Definition 3.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt* analytisch, *falls sie lokal als Potenzreihe dargestellt werden kann, d.h.: Für jedes $z_0 \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $\rho \geq \varepsilon$, so daß $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$.*

Bemerkung.

1. Man kann auf gleiche Weise auch *reell analytische* Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ definieren, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

2. Nach Satz 3.2, 3. sind analytische Funktionen stets holomorph. Wir werden später die erstaunliche Umkehrung dieser Tatsache beweisen: Jede holomorphe Funktion ist analytisch! Daraus folgt insbesondere: Ist f *einmal* komplex differenzierbar, dann ist f sogar *beliebig oft* differenzierbar! Dies ist für *reell* differenzierbare Funktionen ganz sicher nicht der Fall.

Satz 3.4 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Definiere $u, v : U \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist holomorph.

2. $u, v : U \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*:*

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Dabei stehen die Indizes für partielle Ableitungen ($u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$ etc.).

Sind diese Aussagen erfüllt, so gilt: $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$.

Satz 3.5 *(Vgl. Satz 4.7, Analysis I) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$. Falls $f'(z_0) \neq 0$, so ist f ein* lokaler Biholomorphismus*, d.h.: Es gibt offene Umgebungen $U_0 \subset U$, $z_0 \in U_0$ und $V_0 := f(U_0) \subset \mathbb{C}$, so daß $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv und die Umkehrabbildung $g := f^{-1} : V_0 \to U_0$ holomorph ist. Außerdem gilt für alle $z \in U_0$:*

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Definition 3.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Eine* komplexe Stammfunktion von f *ist eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$, so daß $F' = f$.*

Satz 3.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine komplexe Stammfunktion.*

Definition 3.8 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, und sei $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{C}$ eine stückweise differenzierbare Kurve. Das* komplexe Wegintegral von f über γ *ist definiert als:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \in \mathbb{C}.$$

Satz 3.9 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ für (stetige) Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{C}$:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{[\gamma]} (u, -v) \cdot dx + i \int_{[\gamma]} (v, u) \cdot dx$$

mit dem Wegintegral von Vektorfeldern in Definition 1.10.

Satz 3.10 *(Vgl. Satz 1.11) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ stetig. Seien γ, σ parametrisierte Wege, deren Spur in U enthalten ist.*

1. *Falls $\gamma \sim \sigma$, so ist $\int_\gamma f(z)\ dz = \int_\sigma f(z)\ dz$. Deshalb schreibt man auch $\int_{[\gamma]} f(z)\ dz$.*
2. $\int_{-[\gamma]} f(z)\ dz = -\int_{[\gamma]} f(z)\ dz$.
3. $\int_{[\gamma]\star[\sigma]} f(z)\ dz = \int_{[\gamma]} f(z)\ dz + \int_{[\sigma]} f(z)\ dz$.
4. $\int_{[\gamma]} (f+g)(z)\ dz = \int_{[\gamma]} f(z)\ dz + \int_{[\gamma]} g(z)\ dz$.
5. $\int_{[\gamma]} (c\ f)(z)\ dz = c\ \int_{[\gamma]} f(z)\ dz$ *für alle* $c \in \mathbb{C}$.
6. $\left|\int_{[\gamma]} f(z)\ dz\right| \leq M\ L([\gamma])$, *wobei* $M := \max\{|f(z)| \mid z \in Spur([\gamma])\}$.

Satz 3.11 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Falls f eine komplexe Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$ hat, dann gilt für jeden Weg γ in U von p nach q:*

$$\int_{[\gamma]} f(z)\ dz = F(q) - F(p).$$

Satz 3.12 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f hat eine komplexe Stammfunktion.*
2. *Sind $[\gamma]$ und $[\sigma]$ Wege in U, die den gleichen Anfangs- und den gleichen Endpunkt haben, dann gilt: $\int_{[\gamma]} f(z)\ dz = \int_{[\sigma]} f(z)\ dz$.*
3. *Ist $[\gamma]$ eine Schleife in U, so ist $\int_{[\gamma]} f(z)\ dz = 0$.*

Satz 3.13 (Cauchy'scher Integralsatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K \subset U$ ein berandetes Gebiet, und sei ∂K positiv orientiert. Dann gilt:*

$$\int_{\partial K} f(z)\ dz = 0.$$

Satz 3.14 (Cauchy'sche Integralformel) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K \subset U$ ein berandetes Gebiet, und sei ∂K positiv orientiert. Dann gilt für alle $z_0 \in K^o := K \backslash \partial K$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0}\ dz.$$

Korollar 3.15 (Komplexer Mittelwertsatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$. Sei $r > 0$ so, daß $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\ dt.$$

Satz 3.16 (Potenzreihensatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f analytisch. Für die Potenzreihendarstellung von f gilt folgendes:*

Sei $z_0 \in U$. Definiere $\rho_0 := \max\{r > 0 \mid B_r(z_0) \subset U\}$, und für $r \in (0, \rho_0)$ definiere $M_r := \max\{|f(z)| \mid |z - z_0| \leq r\}$ und

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

wobei $K_r(z_0)$ der Kreis um z_0 vom Radius r mit der positiven Orientierung (entgegen dem Uhrzeigersinn) ist. Dann gilt:

1. $|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$
2. *Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hat Konvergenzradius $\rho \geq \rho_0$.*
3. *Für alle $z \in B_{\rho_0}(z_0) \subset U$ gilt: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und daher $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.*

Bemerkung. Aus der letzten Eigenschaft folgt insbesondere, daß das komplexe Wegintegral $\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ nicht von der Wahl von $r \in (0, \rho_0)$ abhängt!

Definition 3.17 *Eine* ganze Funktion *ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

Bemerkung. Nach dem Potenzreihensatz läßt sich eine ganze Funktion um jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ als Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ entwickeln. Diese Potenzreihe hat unendlichen Konvergenzradius ($\rho_0 = \infty$, da $U = \mathbb{C}$).

Satz 3.18 (Satz von Liouville) *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Ist f beschränkt, dann ist f konstant.*

Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.1, Analysis II) *Jedes nicht-konstante Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.*

Satz 3.19 (Identitätssatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls die Menge $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in U hat, so ist $f = g$.*

Definition 3.20 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. $z_0 \in U$ heißt* Nullstelle von f, *falls $f(z_0) = 0$. Der* Grad *oder die* Vielfachheit *der Nullstelle z_0 ist die Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die es eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt, so daß $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ für alle $z \in U$ und $g(z_0) \neq 0$ gilt. Gibt es keine solche Zahl, so heißt z_0 eine* Nullstelle unendlicher Ordnung.

Bemerkung. Mit der Potenzreihenentwicklung von f um z_0 sieht man unmittelbar, daß die Vielfachheit auch als $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ definiert werden kann. Insbesondere ist z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞ genau dann, wenn f in einer Umgebung von z_0 verschwindet; ist $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend, so ist dies nach dem Identitätssatz 3.19 genau dann der Fall, wenn $f = 0$.

Satz 3.21 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f (d.h. eine Nullstelle vom Grad $k \in \mathbb{N}$). Dann gibt es eine Umgebung $U_0 \subset U$, $z_0 \in U_0$ und eine holomorphe Funktion $h : U_0 \to \mathbb{C}$, so daß $f(z) = h(z)^k$ für alle $z \in U_0$ gilt, und so daß z_0 eine einfache Nullstelle von h ist.*

Definition 3.22 *Seien X, Y metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt* offen, *falls f offene Mengen in offene Mengen abbildet, d.h.: Für $U \subset X$ offen ist $f(U) \subset Y$ offen.*

Satz 3.23 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f offen.*

Korollar 3.24 (Maximumsprinzip) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ offen (z.B. U zusammenhängend und f holomorph und nicht konstant). Sei $K \subset U$ kompakt und $M := \max\{|f(z)| \mid z \in K\}$. Falls $|f(z_0)| = M$ für $z_0 \in K$, dann ist $z_0 \in \partial K$, d.h.* "offene Funktionen nehmen ihr Maximum stets auf dem Rand an".

Satz 3.25 (Lemma von Schwarz) *Sei $U := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und sei $f : U \to U$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U$.*

Außerdem gilt: Gibt es ein $0 \neq z_0 \in U$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist $f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.

Notation: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Dann ist das *Ringgebiet um z_0 mit Radien R_1 und R_2* die Menge

$$A_{R_1}^{R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Satz 3.26 (Laurentreihensatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ gelte $A_{R_1}^{R_2} \subset U$. Dann gilt für alle $z \in A_{R_1}^{R_2}$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

für $r \in (R_1, R_2)$. Genauer: Für alle $z \in A_{R_1}^{R_2}$ gilt

$$f(z) = L_N(z - z_0) + L_H((z - z_0)^{-1}),$$

wobei $L_N(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ bzw. $L_H(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_N \geq R_2$ bzw. $\rho_H \geq 1/R_1$ sind. Desweiteren gilt die Ungleichung

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}, \text{ wobei } M_r := \max\{|f(z)|, |z - z_0| = r\}.$$

Bemerkung.

1. Die Reihen $L_N(z - z_0) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ bzw. $L_H((z - z_0)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ heißen *Nebenteil* bzw. *Hauptteil* der Laurentreihe.

2. Ist $B_{R_2}(z_0) \subset U$, d.h. ist f auch auf dem Inneren des Kreisgebiets definiert, so folgt nach dem Cauchy'schen Integralsatz (Satz 3.13), daß $a_{-n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Daher ist der Potenzreihensatz (Satz 3.16) ein Spezialfall des Laurentreihensatzes.

Satz 3.27 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $A_{R_1}^{R_2}(z_0) \subset U$. Dann sind die Koeffizienten der Laurentreihenentwicklung von f in $A_{R_1}^{R_2}(z_0)$ eindeutig bestimmt, d.h.:*

Falls $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ für alle $z \in A_{R_1}^{R_2}(z_0)$, so ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 3.28 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und sei $z_0 \notin U$. Dann heißt z_0* isolierte Singularität von f, *falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $A_0^{\varepsilon}(z_0) \subset U$.*

Definition 3.29 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \notin U$ eine isolierte Singularität.*

1. *z_0 heißt* hebbare Singularität, *falls es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ gibt, so daß $\tilde{f}|_U = f$ gilt. Die Funktion $\tilde{f}$ heißt dann* Hebung *der Singularität.*

2. *z_0 heißt* Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ von f, *falls $(z-z_0)^k f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 hat und $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) \neq 0$.*

3. *z_0 heißt* wesentliche Singularität, *falls z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.*

Satz 3.30 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *z_0 ist hebbar.*

2. *f ist bei z_0 beschränkt, d.h.: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und ein $C > 0$, so daß für alle $z \in A_0^{\varepsilon}(z_0) \subset U$ gilt: $|f(z)| \leq C$.*

Satz 3.31 (Satz von Casorati-Weierstraß) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine wesentliche Singularität von f. Ist $\varepsilon > 0$ so, daß $A_0^{\varepsilon}(z_0) \subset U$, so ist $f(A_0^{\varepsilon}) \subset \mathbb{C}$ eine dichte offene Teilmenge.*

Satz 3.32 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f. Sei $\varepsilon > 0$ so, daß $A_0^{\varepsilon}(z_0) \subset U$ und sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f auf $A_0^{\varepsilon}(z_0)$. Dann gilt:

1. *z_0 ist hebbar genau dann, wenn $a_{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

2. *z_0 ist ein Pol der Ordnung k von f genau dann, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_{-n} = 0$ für alle $n > k$.*

3. *z_0 ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn $\{n \in \mathbb{N} \mid a_{-n} \neq 0\}$ unendlich ist.*

Definition 3.33 *1. Eine geschlitzte Ebene ist eine Menge der Form* $\mathbb{C}_\theta := \mathbb{C}\backslash\{-re^{i\theta} \mid r \in [0,\infty)\}$*, wobei* $\theta \in \mathbb{R}$ *fest ist.*

2. Sei $\theta \in \mathbb{R}$*. Dann ist die Einschränkung* $\exp : \mathbb{R} \times i(\theta - \pi, \theta + \pi) \to \mathbb{C}_\theta$ *bijektiv, und die Umkehrabbildung*

$$\log : \mathbb{C}_\theta \longrightarrow \mathbb{R} \times i(\theta - \pi, \theta + \pi)$$

heißt Zweig der (komplexen) Logarithmusfunktion*.*

Bemerkung.

1. Jeder Zweig der Logarithmusfunktion ist holomorph, und für die Ableitung gilt $\log'(z) = \frac{1}{z}$.
2. Ist eine geschlitzte Ebene gegeben, die die positive reelle Achse enthält (d.h. $\theta \neq (2n+1)\pi$), so wählt man i.a. $\theta \in (-\pi, \pi)$ (außer wenn explizit anders festgelegt). Durch diese Wahl stimmt der Zweig des komplexen Logarithmus mit dem reellen Logarithmus auf $(0, \infty)$ überein.
3. Es gilt: $Re(\log(z)) = \log|z|$ und $Im(\log(z)) = Arg(z)$, wobei $Arg(z)$ durch die Polardarstellung $z = |z|\exp(iArg(z))$ definiert ist. Beachte, daß $Arg(z)$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist.

Definition 3.34 *Sei* $\mathbb{C}_\theta \subset \mathbb{C}$ *eine geschlitzte Ebene und* $\log : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}$ *ein Zweig der komplexen Logarithmusfunktion. Für* $a \in \mathbb{C}$ *definiert man die* Potenzfunktion mit Exponent a *durch*

$$z^a : \mathbb{C}_\theta \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z^a := \exp(a \log z)$$

und für $a \in \mathbb{C}_\theta$ *definiert man die* Exponentialfunktion mit Basis a *durch*

$$a^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad a^z := \exp(z \log a).$$

Bemerkung.

1. Die Potenzfunktion und die Exponentialfunktion sind holomorph, und für die Ableitungen gelten dieselben Formeln wie für die entsprechenden reellen Funktionen, d.h. $(z^a)' = az^{a-1}$ und $(a^z)' = \log a \; a^z$.
2. Es gelten die Potenzgesetze $z^{a+b} = z^a z^b$ und $z^0 = 1$. Allerdings gilt i.a. weder $(z^a)^b = z^{ab}$ noch $(ab)^z = a^z b^z$.

   Beispiele: $(e^{2\pi i})^{2\pi i} = 1^{2\pi i} = 1$, aber $e^{(2\pi i)(2\pi i)} = e^{-4\pi^2} \neq 1$.

   Für $\theta := 0$, d.h. $\log : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ sei $a := i$ und $b := (-1+i)/\sqrt{2}$. Dann ist $\log a = \pi i/2$ und $\log b = 3\pi i/4$ und daher $a^i = \exp(-\pi/2)$ und $b^i = \exp(-3\pi/4)$, somit $a^i b^i = \exp(-5\pi/4)$. Dagegen ist $(ab)^i = (-(1+i))^i = \exp(i \log(-(1+i))) = \exp(3\pi/4) \neq \exp(-5/4\pi)$.

Definition 3.35 *Sei* X *ein topologischer Raum (z.B. ein metrischer Raum) und seien* $\gamma, \sigma : [a,b] \to X$ *stetige Kurven.*

1. Falls $\gamma(a) = \sigma(a) =: p$ *und* $\gamma(b) = \sigma(b) =: q$*, so heißen* γ *und* σ homotop *(Schreibweise:* $\gamma \sim^{hom} \sigma$*), falls es eine stetige Abbildung* $H : [a,b] \times [0,1] \to X$ *gibt, so daß*

   (a) $H(t,0) = \gamma(t)$ *für alle* $t \in [a,b]$,
   (b) $H(t,1) = \sigma(t)$ *für alle* $t \in [a,b]$,
   (c) $H(a,s) = p$ *für alle* $s \in [0,1]$,
   (d) $H(b,s) = q$ *für alle* $s \in [0,1]$.

   In diesem Falle heißt H Homotopie zwischen γ und σ*.*

2. *Falls* γ *und* σ *Schleifen sind, d.h. falls* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *und* $\sigma(a) = \sigma(b)$*, so heißen* γ *und* σ frei schleifenhomotop *(Schreibweise:* $\gamma \sim^{f.hom} \sigma$*), falls es eine stetige Abbildung* $H : [a,b] \times [0,1] \to X$ *gibt, so daß*

   (a) $H(t,0) = \gamma(t)$ *für alle* $t \in [a,b]$,
   (b) $H(t,1) = \sigma(t)$ *für alle* $t \in [a,b]$,
   (c) $H(a,s) = H(b,s)$ *für alle* $s \in [0,1]$.

   In diesem Falle heißt H freie Schleifenhomotopie zwischen γ und σ*.*

3. *Ist* γ *eine Schleife (d.h.* $\gamma(a) = \gamma(b) =: p$*), so heißt* γ nullhomotop*, falls* γ *homotop zur trivialen Schleife* $\sigma \equiv p$ *ist.*

Bemerkung.

1. $\sim^{hom}$ bzw. $\sim^{f.hom}$ sind Äquivalenzrelationen auf der Menge der Wege in X zwischen p und q bzw. auf der Menge der Schleifen von X. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen* bzw. *freie Homotopieklassen*.

2. Ist σ eine Umparametrisierung von γ, so ist $\gamma \sim^{hom} \sigma$.

Definition 3.36 *Sei* X *ein wegzusammenhängender topologischer Raum und* $p \in X$*. Die* Fundamentalgruppe von X mit Fußpunkt p *(Schreibweise:* $\pi_1(X,p)$*) ist definiert als die Menge der Homotopieklassen von Schleifen am Punkte p, wobei die Gruppenoperation durch die Verknüpfung gegeben ist.*

Satz 3.37 *Sei* X *ein wegzusammenhängender topologischer Raum und* $p, q \in X$*. Dann ist* $\pi_1(X,p) \cong \pi_1(X,q)$*. Daher kann man auch von* der *Fundamentalgruppe von* X *sprechen und bezeichnet sie mit* $\pi_1(X)$*.*

Definition 3.38 *Ein topologischer Raum* X *heißt* einfach zusammenhängend*, falls* X *wegzusammenhängend ist und* $\pi_1(X) = \{e\}$*, d.h. falls jede Schleife in* X *nullhomotop ist.*

Satz 3.39 *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *sternkonvex. Dann ist* U *einfach zusammenhängend.*

Satz 3.40 *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig und* $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \gamma([a,b])$*. Dann gibt es stetige Funktionen* $r : [a,b] \to (0,\infty)$ *und* $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$*, so daß für alle* $t \in [a,b]$ *gilt:*

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)}.$$

Bemerkung. Im vorstehenden Satz ist $r(t) = |\gamma(t) - z_0|$ eindeutig bestimmt. Dagegen ist θ nur bis auf Konstanten bestimmt: Gilt $\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)} = z_0 + r(t)e^{i\tilde{\theta}(t)}$, so ist $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + 2\pi n$ für ein festes $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 3.41 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Schleife, d.h. γ ist stetig mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Für $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ ist die* Windungszahl *oder* Umlaufzahl von γ um z_0 *definiert als*

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z},$$

wobei $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion aus Satz 3.40 ist.

Satz 3.42 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise differenzierbare Schleife, und sei $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$. Dann gilt*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\ dz.$$

Satz 3.43 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $\gamma, \sigma : [a,b] \to U$ stückweise differenzierbar, so daß gilt:*

- *γ und σ haben gleiche Anfangs- und Endpunkte, und $\gamma \sim^{hom} \sigma$, oder*
- *γ und σ sind Schleifen, und $\gamma \sim^{f.hom} \sigma$.*

Dann ist $\int_\gamma f(z)\ dz = \int_\sigma f(z)\ dz$.

Korollar 3.44 *Seien $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ stückweise differenzierbare Schleifen. Falls γ und σ frei schleifenhomotop in $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ sind, dann gilt*

$$I(\gamma, z_0) = I(\sigma, z_0).$$

Korollar 3.45 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene einfach zusammenhängende Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine komplexe Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$.*

Satz 3.46 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise differenzierbare Schleife. Dann ist die Funktion $I(\gamma, \_) : \mathbb{C}\backslash Spur(\gamma) \to \mathbb{Z}$ stetig und daher konstant auf allen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash Spur(\gamma)$.*

Definition 3.47 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ein* Zyklus in U *ist eine (formale) Summe von stückweise differenzierbaren Schleifen in U, d.h.*

$$C = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n,$$

wobei $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ Schleifen in U sind.

Die (formale) Summe von zwei Zyklen ist damit wohldefiniert, ebenso wie das komplexe Wegintegral $\int_C f(z)\ dz$ einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Außerdem definiert man die Windungszahl $I(C, z_0) := \sum_{k=1}^n I(\gamma_k, z_0)$ für einen Punkt $z_0 \notin Spur(C) := \bigcup Spur(\gamma_i)$. Damit gilt: $I(C_1 + C_2, z_0) = I(C_1, z_0) + I(C_2, z_0)$.

Zwei Zyklen $C_1 = \gamma_1 + \ldots \gamma_n$ und $C_2 = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m$ heißen *homotop in U*, falls $n = m$ und $\gamma_k \sim^{f.hom} \sigma_k$ für alle k. Sind C_1 und C_2 homotope Zyklen, so folgt nach Satz 3.43 sofort, daß $\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz$ für alle holomorphen $f : U \to \mathbb{C}$ und insbesondere $I(C_1, z_0) = I(C_2, z_0)$ für alle $z_0 \notin U$.

Satz 3.48 (Cauchy'scher Integralsatz - Umlaufzahlversion) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und C ein Zyklus in U. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt: $\int_C f(z)\ dz = 0$.*
2. *$I(C, z_0) = 0$ für alle $z_0 \notin U$.*

Definition 3.49 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $z_0 \notin U$ eine isolierte Singularität von f, so ist das* Residuum von f in z_0 *definiert als*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z)\ dz,$$

wobei $0 < r < \varepsilon$ und $A_0^\varepsilon(z_0) \subset U$.

Bemerkung.

1. Offensichtlich gilt $Res_{z_0}(f + g) = Res_{z_0}(f) + Res_{z_0}(g)$.
2. Nach der Formel für die Koeffizienten der Laurantreihe in $A_0^\varepsilon(z_0)$ von Satz 3.26 gilt $Res_{z_0}(f) = a_{-1}$. Insbesondere ist $Res_{z_0}(f) = 0$, falls z_0 eine hebbare Singularität von f ist.
3. Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und hat g eine einfache Nullstelle in z_0, so ist $Res_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Satz 3.50 (Residuensatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und C ein Zyklus in U, der keinen Punkt in $\mathbb{C}\backslash U$ umläuft. Sei $A \subset U$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkte, so daß $A \cap Spur(C) = \emptyset$, und sei $f : U\backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. alle $a \in A$ sind isolierte Singularitäten von f. Dann gilt:*

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{a\in A} I(C, a) Res_a(f).$$

Bemerkung. Die Anzahl der Elemente $a \in A$ mit $I(C, a) \neq 0$ ist endlich, daher hat die Summe in dieser Formel nur endlich viele von 0 verschiedene Summanden und ist somit wohldefiniert.