# Übungen zur Analysis I (Lehramt)

**Aufgabe 5:** Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

$$x^2 < y^2 \Leftrightarrow |x| < |y|$$

**Aufgabe 6:** Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq |3x-6|\}$

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + 2|x| \leq \frac{3}{2}\}$

**Aufgabe 7** ($*$)**:**

(a) Auf $\mathbb{C} = \{z \mid z = (a,b) \text{ mit } a,b \in \mathbb{R}\}$ seien eine Addition "+" sowie eine Multiplikation "$\cdot$" definiert durch $z_1+z_2 = (a_1+a_2, b_1+b_2)$ bzw. $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$ für $z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, daß $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Dieser heißt der Körper der komplexen Zahlen.

(b) Es sei $\mathbb{C}$ wie in (a). Für die Paare der Gestalt $(a,0)$ gilt $(a_1,0) + (a_2,0) = (a_1+a_2,0)$ sowie $(a_1,0)\cdot(a_2,0) = (a_1a_2,0)$, d.h. sie werden wie die entsprechenden reellen Zahlen $a$ addiert und multipliziert. Für $(a,0)$ schreibt man kurz $a$ und kann mit diesen speziellen Elementen von $\mathbb{C}$ rechnen wie mit reellen Zahlen. Weiterhin sei $i := (0,1)$. $i$ wird als imaginäre Einheit bezeichnet. Es gilt dann $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, und man erhält die folgende Zerlegung eines Paares $z = (a,b)$:
$z = (a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1) = a+bi$. Dies führt zu der für komplexe Zahlen gebräuchlichen Darstellung $z = a+bi$. Für $z = a+bi$ definiert man die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ durch $\overline{z} = a - bi$.
Beweisen Sie, daß für $z_1, z_2$ gelten $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ sowie $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

**Aufgabe 8:** Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+bi$ dar: (i) $\dfrac{2+i}{2-i}$ (ii) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^4}$

---

**Abgabe:** Mittwoch, den 31. Oktober 2001, 12 Uhr, in die Briefkästen.