HDoz.Dr.Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Analysis I (Lehramt)

Aufgabe 13: Beweisen Sie: Es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14:

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

(*Hinweis:* direkt beweisen).

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

(*Hinweis:* Binomischen Satz und Teil (a) benutzen).

(c) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$$

(*Hinweis:* vollständige Induktion, Teil (b) benutzen).

Aufgabe 15 $(*)$:

(a) Bestimmen Sie die Menge aller oberen und die Menge aller unteren Schranken, das Supremum und das Infimum von

(i) $A = \left\{3 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ (ii) $B = \left\{3 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{3\}$.

(b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aufgabe 16: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und nach oben beschränkt. Zeigen Sie:

(a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

(b) wenn $A \cap B \neq \emptyset$, so gilt $\sup(A \cap B) \leq \sup A$

(c) wenn $A \cap B \neq \emptyset$, so gilt $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

(d) wenn $A \subseteq B$, so gilt $\sup A \leq \sup B$.

Abgabe: Mittwoch, den 14.November 2001, 12 Uhr, in die Briefkästen.