HDoz.Dr.Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Analysis I (Lehramt)

Aufgabe 21: Bestimmen Sie die Grenzwerte von:

(a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n}{4n^2 + n + 1}$

(b) $a_n = \dfrac{n^3 + (-1)^n n}{2n^3 + (5 + (-1)^n)n + 1}$

(c) $a_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$

(d) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}$

(e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 22: Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass (a_n) eine Nullfolge ist, welche nicht?
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt:

(a) $|a_n| + |a_{n+1}| < 2\varepsilon$

(b) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$

(c) $||a_n| - |a_{n+1}|| < \varepsilon$

(d) $|a_n| < \varepsilon^2$.

Aufgabe 23: Untersuchen Sie die Folgen (a_n) und (b_n) auf Monotonie:

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-2}\ , \qquad b_n = \frac{n-1}{2^n}\ .$$

Aufgabe 24 $(*)$**:** Die rekursiv definierte Folge (a_n) sei gegeben durch:

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2 \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

(a) (a_n) ist monoton wachsend

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq a_n < \frac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

Abgabe: Mittwoch, den 28. November 2001, 12 Uhr, in die Briefkästen.