HDoz.Dr.Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Analysis I (Lehramt)

Aufgabe 25: Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}.$$

Hinweis: Schätzen Sie c_n mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung ab.

Aufgabe 26 $(*)$**:**

(a) Die Folge (b_n) sei definiert wie in Aufgabe 25. Beweisen Sie, dass $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ (d.h. (b_n) ist monoton fallend).
Hinweis: Geeignet abschätzen, dabei die Bernoullische Ungleichung benutzen.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Hinweis: Folgern Sie zunächst, dass $a_n \leq e \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zeigen Sie dann $a_{n-1}a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_2 a_1 \leq e^{n-1} \leq b_{n-1}b_{n-2} \cdot \ldots \cdot b_2 b_1$ für $n \geq 2$ und vereinfachen Sie die Ausdrücke auf der linken bzw. rechten Seite.

Aufgabe 27: Bestimmen Sie die Grenzwerte von

(a) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 3n}$

(b) $b_n = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$

(c) $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

(d) $d_n = \sqrt[2n]{3^n + 1}$.

Aufgabe 28: Berechnen Sie $\sqrt{\frac{1}{3}}$ näherungsweise mit Hilfe der Methode der Intervallhalbierung. Führen Sie dabei 5 Iterationsschritte durch.

Abgabe: Mittwoch, den 5. Dezember 2001, 12 Uhr, in die Briefkästen.