G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 12.11.2001
Abgabe: 19.11.2001

Analysis für Informatiker
Blatt 4

Aufgabe 1:

Beweisen Sie:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 2:

a) Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl m besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung $m = g_0 + g_1 b + \ldots + g_k b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq g_i < b$ für $i = 0, 1, \ldots, k, g_k \neq 0$.

b) Geben Sie den zwölf–adischen Bruch an, dessen Grenzwert gleich dem Dezimalbruch $8\;374,25$ ist. (Verwenden Sie dazu die Ziffern 0 bis 9 und $\alpha :=$ zehn, $\beta :=$ elf.)

c) Geben Sie den 2–adischen Bruch mit Grenzwert $\frac{1}{5}$ an. (Hinweis: Es liegt ein periodischer Dualbruch vor.)

Aufgabe 3:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung falsch ist.

b) Zeigen Sie: Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen beschränkt ist.

Aufgabe 4:

a) Stellen Sie fest, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche absolut konvergieren. (Hinweis: Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden, verwenden Sie deshalb die Konvergenzkriterien aus Kapitel 2.5.)

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$,

iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$?