G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 19.11.2001
Abgabe: 26.11.2001

Analysis für Informatiker
Blatt 5

Aufgabe 1:

a) Seien $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, nicht–negative reelle Zahlen. Mit $A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ bezeichnen wir das arithmetische Mittel und mit $G(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ das geometrische Mittel. Zeigen Sie: $G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$. Wann tritt das Gleichheitszeichen auf?
Hinweis: Reduzieren Sie den Beweis auf 1. $A(x_1, \ldots, x_n) = 1$. 2. $x_i \neq 0$ $i = 1, \ldots, n$, $j \in \{1, \ldots, n\} : x_j \neq 1$ für $n \geq 2$. Beweisen Sie die Aussage mittels vollständiger Induktion, wobei Sie etwa $x_2' = x_1 + x_2 - 1$ mit $x_1 = 1 + \varepsilon$, $x_2 = 1 - \delta$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, setzen und $x_1 x_2 \leq x_2'$ beachten.

b) Verwenden Sie die Ungleichung in a), um $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ zu zeigen.
Hinweis: Schreiben Sie n als Produkt $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots 1$ mit $n-2$ Einsen.

c) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, die folgenden Reihen absolut konvergieren:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n,\ p \in \mathbb{N}, \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \qquad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{x^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Hinweis für (3): Es ist $\left|x^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| \geq 1$.

Aufgabe 2: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

b) Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

c) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

d) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Aufgabe 3: Konvergieren die folgenden Reihen?

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-2}{3n+4}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)^2},$$

$$\text{d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}, \qquad \text{e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n(n+1)}.$$