G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 26.11.2001
Abgabe: 03.12.2001

Analysis für Informatiker
Blatt 6

Aufgabe 1: Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

b) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$.

c) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

Aufgabe 2: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ und $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Zeigen Sie: Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, ihr Cauchy–Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ aber nicht.

Aufgabe 3: Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Man definiert den Betrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}$ durch $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Zeigen Sie:

a) Cauchy–Schwarzsche Ungleichung in $\mathbb{R}^2$:
Seien $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt: $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.

b) $\mathbb{C}$ ist ein bewerteter Körper.
(Hinweis: Zum Nachweis des Axioms (B 3) aus Definition 1.2.12 können Sie a) benutzen, wenn Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auffassen.)

c) In $\mathbb{C}$ definiert man die Konvergenz von Folgen und Reihen analog wie in $\mathbb{R}$.

(i) Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} s_m$ existiert ($s_m = \sum_{n=1}^{m} z_n$ m–te Partialsumme).

Zeigen Sie: Für $z_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $z = a + ib \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$; $z = a + ib \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$.

Aufgabe 4: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Zeigen Sie: Für $|x| \leq 1 + \frac{k}{2}$ gilt $\exp(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + r_{k+1}(x)$, wobei $|r_{k+1}(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$.