G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 03.12.2001
Abgabe: 10.12.2001

Analysis für Informatiker
Blatt 7

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{R}$:

a) $f_n(x) = x^n$, b) $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$.

Aufgabe 2:

Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \neq 0$, eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $f(x) = n$.

a) Zeigen Sie, dass $\#\{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = 0\} \leq n$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel $x^i - a^i = (x-a) \sum_{j=0}^{i-1} x^j a^{i-1-j}$ für $i \in \mathbb{N}$.

b) f heißt gerade bzw. ungerade, wenn $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: f ist genau dann gerade (bzw. ungerade), wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden (bzw. geraden) Zahlen $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^r-1}{x-1}$ für $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

Hinweis: Führen Sie b) auf den Fall $r \in \mathbb{N}$ zurück.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie alle Stetigkeitspunkte der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, gegeben durch

i) $f(x) = [x]$, $D = \mathbb{R}$; ii) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$, $D = \mathbb{R}$;

iii) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{k+1}, & \text{falls } \frac{1}{k+1} < |x| \leq \frac{1}{k} (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$, $D = [-1, 1]$.

b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine im Intervall I stetige Funktion, und sei $a \in I$. Für die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ gelte $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq a$ und $g(a) \neq f(a)$. Zeigen Sie, dass g unstetig in a ist.