

Analysis für Informatiker
Blatt 8

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig sind:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{falls } x \neq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases}, a = 1 ;$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{falls } x \neq -1 \\ -2, & \text{falls } x = -1 \end{cases}, a = -1 ;$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}, & \text{falls } x \neq 9 \\ 1/3, & \text{falls } x = 9 \end{cases}, a = 9 ;$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{|x-3|}, & \text{falls } x \neq 3 \\ 1, & \text{falls } x = 3 \end{cases}, a = 3 .$

e) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^n-1}{x^m-1}, & x \neq 1 \\ 1/2, & x = 1 \end{cases}, a = 1 .$

Aufgabe 2:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine im Intervall I stetige Funktion, und sei $a \in I$. Für die Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq a$ und $g(a) \neq f(a)$. Zeigen Sie, dass g unstetig in a ist.

Aufgabe 3:

Die auf $D \subset \mathbb{R}$ erklärte Funktion $f(x)$ heißt gleichmäßig stetig auf D , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in D$$

mit $|x - y| < \delta$ gilt. Zeigen Sie:

- a) Jede in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.
(Hinweis: Satz von Bolzano–Weierstraß)
- b) Ist $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die der Lipschitz–Bedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ für } x, y \in D$$

genügt ($L \geq 0$ konstant), so ist f gleichmäßig stetig auf D .

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass

- a) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist, aber
- b) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Können Sie Klassen unendlich vieler Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$ angeben, die gleichmäßig bzw. nicht gleichmäßig stetig sind?