G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 17.12.2001
Abgabe: 07.01.2002

Analysis für Informatiker
Blatt 9

Aufgabe 1:

Zeigen Sie:

a) Die Reihen $\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ sind für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent und in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergent. Die dadurch erklärten Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sin x$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \cos x$ sind stetig in $\mathbb{R}$.

b) Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$: 1) $\sin(-x) = -\sin x$, d.h. sin ist ungerade (insbesondere ist $\sin 0 = 0$);
2) $\cos(-x) = \cos x$ (d.h. cos ist gerade); $\cos 0 = 1$;
3) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$;
4) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$;
5) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2:

Die hyperbolischen Funktionen $\cos h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\cos h(x) := \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\sin h(x) := \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(1) $\cos h(0) = 1$, $\sin h(0) = 0$;
(2) $\cos h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
(3) $\cos h(-x) = \cos h(x)$, $\sin h(-x) = -\sin h(x)$;
(4) $\cos h(x+y) = \cos h(x) \cos h(y) + \sin h(x) \sin h(y)$,
$\sin h(x+y) = \sin h(x) \cos h(y) + \sin h(y) \cos h(x)$;
(5) $\cos h^2(x) - \sin h^2(x) = 1$;
(6) $\sin h(x)$ ist streng monoton wachsend.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ und $\lim\limits_{n \to \infty} ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie Blatt 2, Aufgabe 1.