G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 14.01.2002
Abgabe: 21.01.2002

Analysis für Informatiker
Blatt 11

Aufgabe 1: Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen in 0 differenzierbar sind:

a) $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \end{cases}$

b) $g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \end{cases}$

c) $h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \end{cases}$

Aufgabe 2: Sei $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen: $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^{(x^x)}$; b) $f(x) = (x^x)^x$; c) $f(x) = x^{(x^a)}$;
d) $f(x) = x^{(a^x)}$; e) $f(x) = a^{(x^x)}$.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + \frac{1}{x}$.

a) Ist f auf $\mathbb{R}^\star$ stetig und differenzierbar? Berechnen Sie alle Ableitungen von f.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}^\star$ gilt $f(x) = 0$? Welche $x \in \mathbb{R}^\star$ sind lokale Extrema?

c) Geben Sie die Intervalle an, in denen f konvex bzw. konkav ist.

d) Skizzieren Sie den Graphen.

Aufgabe 4: Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie: Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Logarithmusfunktion $ln : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$, $x \to ln\ x$, in $\mathbb{R}_+^\star$ konkav ist.