G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 21.01.2002
Abgabe: 28.01.2002

Analysis für Informatiker
Blatt 12

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,

c) $\lim\limits_{x \searrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right)$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Hinweis: Regel von de l'Hospital

Aufgabe 2:

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $D = [a, b]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
f sei in jedem $x \in (a, b)$ differenzierbar, und es gebe ein $k \in \mathbb{R}_+$ mit $|f'(x)| \leq k$. Zeigen Sie: f ist in D Lipschitz–beschränkt, und k ist eine Lipschitzkonstante von f in D; d. h. es gilt $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ für alle $x, y \in D$.

Aufgabe 3:

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $D = [a, b]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz–beschränkte Funktion mit einer Lipschitzkonstanten $k < 1$ (f heißt dann kontrahierend in D). Sei $x_0 \in D$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch $x_{n+1} := f(x_n)$. Es gelte:

a) $f(D) \subset D$ oder b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_1| \leq \frac{k}{1-k}|x_1 - x_0| \right\} \subset D$.

Zeigen Sie:

(i) Alle x_n sind definiert und liegen in D.

(ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen einen Fixpunkt p von f (also gegen ein p mit $p = f(p)$), und p ist einziger Fixpunkt von f in D.

(iii) Es gilt die Fehlerabschätzung $|p - x_{n+1}| \leq \frac{k}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Verwenden Sie für ii), dass $|x_{i+1} - x_i| \leq k^i |x_1 - x_0|$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also die Reihe $x_0 + \sum\limits_{i=0}^{\infty}(x_{i+1} - x_i)$ die konvergente Majorante $|x_1 - x_0| \sum\limits_{i=0}^{\infty} k^i$ besitzt. Ferner ist $x_0 + \sum\limits_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i) = x_{n+1}$.