G. Rosenberger
D. Hennig

Ausgabe: 28.01.2002
Abgabe: 04.02.2002

Analysis für Informatiker
Blatt 13

Aufgabe 1:

Sei $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie induktiv, dass die n–te Ableitung von f für $x > 0$ die Form $\frac{p(x)}{x^m}e^{-\frac{1}{x}}$ für ein Polynom $p(x)$ hat.

Aufgabe 2:

Sei D eine Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Wir definieren $f^+, f^- : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, falls} \quad f(x) > 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad , \qquad f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{, falls} \quad f(x) < 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad .$$

Dann gilt also $f = f^+ - f^-$ und, wenn wir nach $|f| : D \to \mathbb{R}$ durch $|f|(x) := |f(x)|$ definieren, $|f| = f^+ + f^-$.
Zeigen Sie:
Ist $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch f^+, f^- und $|f|$ integrierbar.

Aufgabe 3:

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

a) Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist die durch

$$|f|^p(x) := |f(x)|^p$$

definierte Funktion $|f|^p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Hinweis: Betrachten Sie geeignete Treppenfunktionen ψ, φ mit $0 \leq \varphi \leq |f| \leq \psi$ und schätzen Sie $\int\limits_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x)dx$ ab.

b) Die Funktion $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.